


Officio Topografico


OFFICIO TOPOGRAFICO

CHRISTIANUS L.B. DE WOLFF

Regis Borussiæ Consiliarius intimus,
Universitatis Halensis Cancellarius, Dynasta in Dœltzig.



L. B.
CHRISTIANI WOLFII

POTENTISSIMI BORUSSIÆ REGIS CONSILIARII INTIMI, UNIVERSITATIS HALLENSIS CANCELLARII, IBIDEMQUE PROFESSORIS JURIS NATURÆ ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ SCIENTIARUM REGIÆ PARISINÆ, BRITANNICÆ, ET BORUSSICÆ MEMBRI.

ELEMENTA
MATHESEOS
UNIVERSÆ

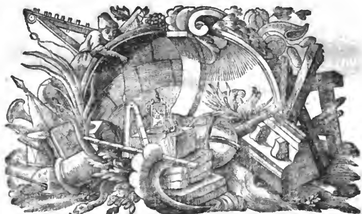
IN QUINQUE TOMOS DISTRIBUTA.

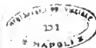
TOMUS PRIMUS,

Qui COMMENTATIONEM DE METHODO MATHEMATICA, ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, TRIGONOMETRIAM PLANAM, & ANALYSIM tam FINITORUM quam INFINITORUM complectitur.

[illegible]

Correctionibus & Adnotationibus Cajetani Marzacalia aucta.





VERONÆ, MDCCXLVI.

TYPIS DIONYSII RAMANZINI BIBLIOPOLÆ APUD S. THOMAM.

SUPERIORUM PERMISSU.

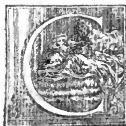
Ac Privil. Illustriss. & Excellentis. Senatus Ven. ad decenn.

PLATO apud *Theonem Smyrnæum*, Cap. I. p. 20

Adolefcentibus eorumque ætati conveniunt Difciplinæ Mathematicæ, quæ animam præparant & defecant, ut ipfa ad Philofophiam capeffendam idonea reddatur.

IMMORTALI VIRO CHRISTIANO L. B. DE WOLFF MATHEMATICO PRÆSTANTISSIMO.

CAJETANUS MARZACALIA S. P. D.



Um ELEMENTORUM MATHESEOS UNIVERSÆ, quæ tu in uſum ſtudioſæ juventutis edidiſti, partes ſingulæ magnis laudibus celebrari mereantur, tum Analyſis cæteris omnibus eſt laudabilior. Rem ita ſe habere, meque ita ſcribentem obſervantia ſingulari erga te mea non moveri, ſatis oſtendunt vel ſoli Profeſſores noſtrates; hi enim calculi rationem tradentes, opus tuum præ manibus habere, atque Auditoribus legendum ſolent quam maxime commendare.

Nec immerito: siquidem vere aureum atque admirabile est; primum quidem perspicuitate, quam in explicandis rebus magis abditis atque difficilibus summa cum brevitate mirabiliter conjunxisti; tum rerum copia atque delectu, quibus legentium animos instruendo jucunditate afficis; denique methodo, qua ad docendum nulla magis idonea. Equidem, ne vera laude te videar fraudasse, quod in me ipso expertus sum, ingenue fatebor; Algebram nempe tuam, quæ vere totius humanæ eruditionis apicem [a] *attingit, ita facilem esse intellectu, ut discendi cupiditate laborem, & perspicuitate difficultatem levante, duabus circiter hebdomadis eam partem, quæ* de Analysi infinitorum *est, tyrocinii tempore totam meo marte percurrere valuerim ac probe intelligere. Ex his profecto intelliges, quanta voluptate in editione hujus tomi laboraverim. Utinam vero bona valetudo cæteros quoque ad optatum finem perducere sinat! Certe summopere curæ mihi erit, ut* opus *totum* [b] [*utar verbis tuis*], *quantum per me fieri poterit*, utilius efficiatur, *nihilque sit, quod non emendatissimum prodeat. Interim hunc ipsum tomum, quem denuo recusum in lucem ire jubeo, ad te quasi tibi dicatum mitto, sperans diligentiam meam* [*quod vehementer opto*] *eam apud te gratiam inituram, ut me cœpta benevolentia in in dies magis magisque prosequi non dedigneris. Vale.*

Veronæ die 7. Augusti 1746.

PRÆ-

(a) Wolfius in præfatione ad Analysin.
(b) Epistola ad Cajetanum Marzacalia die 5. Junii an. 1746.

PRÆFATIO.



TSI nullo tempore, quo ſcientiis honos fuit, defuerint viri egregii, qui præclaris ingenii ac virtutum dotibus ſupra communem mortalium ſortem evecti erudita illa Mathemata digna ſtatuerunt, in quibus elaborarent, nec infelici ſucceſſu ſuſpiciendis inventis eadem amplificarunt, quemadmodum veterum monumenta palam loquuntur; ante noſtram tamen ætatem ad illud faſtigium non fuerunt evecta, in quo hodie conſtituta miramur. Neque indigna ſunt, quæ in dies magis magiſque excolantur, &, exploſa loquaci ſophiſtica, in ſcholas revocentur, cum neminem, niſi aut tardiore fuerit ingenio, aut ignarus artis oſor affectu præpeditam habuerit mentem, fore exiſtimen, qui non eorum puritatem, evidentiam ac ſublimitatem miretur, & ob utilitates innumeras inde in genus humanum redundantes de Arte noſtra præclare ſentiat. Mentem enim humanam valde perficit Matheſis, ad Philoſophiam aliaque ſtudiorum genera & latius, & profundius, & utilius tractandum inſtruit, ad ſolidiorem doctrinam adminicula inexpectata ſuppeditat, maximas ad vitam utilitates affert.

Non ignota loquor, non inexpectata Mathematum peritis. Attamen nullus dubito fore, ut vulgus literatorum ex ſuo ingenio alios judicans perſuadere conetur ignaris, ex præpoſtero in ſcientias Mathematicas ſtudio proficiſci has laudes. Quamvis autem non ea ſit penes me garrientium (a)

 aucto-

(a) Auctor ſum his hominibus, ut Præfationem legant, quam *Philippus Melanchthon*, communis Germaniæ Præceptor, *Joannis Vogelini* Elementis Geometriæ præmiſit. Ex ea notulas quaſdam hinc inde adſpergemus conſenſum Philippeorum cum noſtris manifeſtaturas. Ita ergo generatim ad rem noſtram *Melanchthon*: *Scio*, inquit, *has adhortationes apud eos, qui ſordidis ingeniis præditi ſunt, nihil proficere, qui præſtantiſſimarum diſciplinarum dignitatem non proſpiciunt, aut ſectantur quaſdam vendibiliores artes, quæſtus gratia. Nam & mentes habent monſtroſas, & magno ſcelere turbant proportionem Geometricam, cum non tribuunt ſuam artibus dignitatem. Sed recta ingenia, etiam mediocria, incitari poſſunt ipſa artium admiratione, ſi admoneantur, deinde ſi accedat artifex, qui commode tradat. Ideo ſpero aliquorum ſtudia commoveri poſſe.*

auctoritas, ut, quæ inſcite obſtrepunt, ſcite retundam; non tam quod plurimi inſtitutione indignos judicent, qui convitiis extorquere volunt, ut doceantur, & illos demum lumine dignos cenſeant, qui modeſte id deſiderant, quam quod in ſciolis erudiendis oleum operamque perdi pro comperto habeam, quippe qui tum (ut cum HOROCCIO (a) loquar) *pulchre ſibi diſputare videntur, ſi, quod arguendo evertere non poſſunt, tanquam ridiculum contemnant, aut puerilibus dicteriis adſperſum aliorum riſui exponant*: cum tamen mearum partium eſſe exiſtimem, ut generoſa atque excelſa ingenia ad ſtudia Mathematica incendam atque inflammem; quid, quæſo, impedit, quominus evincam, non eſſe Mathematicos (liceat mihi denuo HOROCCII verbis (b) uti) *tam perfrictæ frontis, ut abſurdas quaſvis ampullas magno clamore ignaris divendant, modo in fucati laboris præmium breviſſimo inanis gloriæ flatu intumeſcant & inter inconditos plaudentium ſtrepitus placide ſibi adulentur*? multo minus ita dibuccinare laudes ſuas, ut apud alios merito nullam inveniant.

Agedum, ergo! quis eſt, qui Scientias Mathematicas & rerum evidentia ac ſublimitate, & demonſtrationum rigore ac profunditate, & ordinis pulchritudine ac concinnitate ceteris omnibus longe ſuperiores mentem perficere negare auſit? Qui mentis dotes ignorat; qui judicium leve a gravi, ingenium hebes ab acri non diſtinguit; qui denique culmen perfectionum non proſpicit, ad quod menti pervenire datum eſt. Tum demum, me judice, ingenii acie pollebis, ſi non modo clara ab obſcuris, diſtincta a confuſis, adæquata ab inadæquatis, explorata ab inexploratis, certa ab incertis, probabiliora a minus probabilibus diſcernere valebis, ſed & ipſemet fueris exactus & perſpicuus in definiendo, ſolers & circumſpectus in obſervando, ingenioſus & accuratus in experimentando, ſeverus & acutus in judicando, concinnitatis & rigoris tenax in demonſtrando, patiens & profundus in meditando, ſagax & expeditus in inveniendo. Sed quomodo, quæſo, comparantur habitus tam præclari? Non niſi crebro exercitio. Multus ergo ſis neceſſe eſt in notionibus evolvendis, in demonſtrationibus concipien-

(a) In Aſtronomia *Kepleriana* defenſa atque promota, c. 1 p. 53
(b) In Prolegomen. p. 8

cipiendis, in problematibus resolvendis, nec proletaria in meditando & inveniendo collocanda est opera. Cum ideo disciplinas, quæ huic scopo conveniant, præter Mathematicas nullas noverint, qui Mathematicas & ceteras eadem diligentia pertractarunt; studium Mathematicum ad acuendum judicium apprime necessarium pronuntiamus & sine eo ad solidam rerum cognitionem perveniri posse negamus (a).

Equidem non ignoro, homines quosdam, cum sint in Mathesi hospites ac plane rudes, se jactare, quod audiverint Mathematicos de rebus Mathematicis optime, de aliis a Mathesi alienis pessime judicantes: veruntamen quod ad tam inconsiderate dicta reponam, non unum habeo. Quoniam nimirum non quævis terra Mathematicum alit (neque enim creantur in Academiis ut Doctores); sane non apparet, unde imperitus Artis obtrectator certus fuerit factus, sibi rem cum Mathematico fuisse. Quid si Agrimensorem viderit, aut Architectum, aut Conspicillorum politorem, aut Instrumentorum fabum, aut Virum, cui data est docendi quidem, sed non sciendi Mathesin potestas? Quis enim adeo insanus est, ut unumquemque censeat titulo, quem fama fallax aut fortuna cæca eidem tribuit? Non insolitum, nec inauditum, ut, quem ignari judicant Matheseos apprime peritum, quem Professores *Euclidis*, *Apollonii*, *Archimedis alterius* elogio etiam post fata mactant; idem tamen a Mathematicis summis, vere idoneis harum rerum arbitris, Matheseos imperitus appelletur. Enimvero etiamsi hoc demus, Artis nostræ osorem audivisse Mathematicum de rebus ad Mathesin non spectantibus judicantem; nondum tamen video, unde cognoverit, quod male judicaverit: aliter enim nisi judicaret qui ingenii acumine pollet, aliter qui haud altius vulgo sapit, inter ingenium acre & hebes nullum foret discrimen, nec concedendum erat, in Mathesi cum laude versatis res quaslibet profundius scrutari datum esse. Denique si vel maxime aliquando contigerit, Mathematicum aliquem de rebus ad se non pertinentibus male judicasse; hinc saltem colliges,

(a) *Melanchthon*, loc. cit. *Si qui non totos se huic studio dedent; tamen hit ad judicia formanda---opus est cognitione Elementorum Geometriæ.* Idem paulo ante: *Cum demonstrationes Geometriæ maxime sint illustres; nemo sine aliqua cognitione hujus artis perspicit, quæ sit vis demonstrationum, nemo sine ea erit artifex methodi.*

ges, ipsum, occasione ita ferente, de re, quam nondum meditatus fuerat, per præcipitantiam, vitium ἀγεωμετρήτοις tantum non semper familiare, statuisse.

Neque enim defendimus, quod eadem opera, qua quis Mathemata sibi familiaria reddit, ceterarum quoque rerum cognitione animum imbuat, & criminationis loco habemus, si qui per malitiam affirment, quod Mathematici glorientur, penes se solos esse principia veritatis: sed quod Matheseos cultura reliquis studiis præmissa efficiat, ut alias disciplinas facilius, rectius & profundius percipere possis, ubi ad eas industriam atque assiduitatem attuleris; id vero est quod asseveramus. Nescio vero, qua fronte, qui inexperta loquuntur, majorem sibi fidem haberi velint, quam iis, qui nisi experta non confitentur. Utinam tandem, qui Reipublicæ præsunt, caverent ne ad cetera studia tractanda animum appellerent, nisi Mathematica cognitione imbuti: neque ullus dubito fore ut aliam Reipublicæ faciem contueremur. (a) Ut enim taceam, quæ a doctrina in Rempublicam redundant, emolumenta, plurimum refert, si, qui ob eruditionem utrique perficiuntur, sint assidui, considerati, moderati & veritatis amantes, quos Matheseos studium efficit, ubi ita tractetur, ut amplificet usum rationis.

Quotquot humanæ mentis vires cognoscere student earumque usum scrutari gestiunt, eos ad Mathematum culturam invitamus. Ostendet Algebra atque Geometria sublimior, nihil esse tam abditum, quin detegatur: docebit Astronomia cum Geographia, nihil esse a sensibus hominum tam remotum, quin id satis distincte cognoscere & accurate dimetiri valeamus: testabitur calculus Astronomicus, quanta certitudine futura cæli phænomena prædicere liceat, etsi Genius nullus motuum, quibus sidera feruntur, leges Astronomis revelavit: Optica cum Astronomia discrimen inter repræsentationes rerum in intellectu & in imaginatione monstrabit: Arith-

(a) *Melanchthon*, loc. cit. *Jacent desertæ & neglectæ artes Mathematicæ, multis jam sæculis. Nam proxima ætas* (quidni & nostra?) *juventutem ab hac vera Philosophia ad insulsissimas cavillationes abduxerat. Nunc, postquam hæ explosæ sunt e scholis, annitendum erat, ut pura & nativa Philosophia traderetur, quæ conduceret ad solidam doctrinam consequendam. Nam hæc nostra ætas satis commonefacit nos, quantum opus sit Reipublicæ perfecta doctrina, quia multi passim, tum inopia judicii, tum quia diserte explicare nihil possunt, sparserunt aut defundunt opiniones absurdas & confusaneas, ex quibus magna certamina, magna dissensiones extiterunt. Nec finis horum malorum erit ullus, nisi ad veram & eruditam studiorum rationem juventus revocata fuerit.*

Arithmetica, Trigonometria & Analysis regulas generales suppeditabunt, quibus in inveniendo dirigatur intellectus & una cum sensibus compescatur imaginatio, ne meditationes turbet: Methodus denique Mathematica rectum rationis usum manifestabit.

Quanta sit vis Mathematum in scientia naturali, ex Statica, Mechanica, Hydrostatica, Aerometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Astronomia & Geographia abunde perspicitur: quæ omnes argumenta quædam Physica solidius atque profundius pertractata exhibent, quam sine Matheseos principiis fieri poterat. Nonne enim Physici est explicare motum, gravitationem corporum, proprietates aeris, phænomena visus, structuram universi, naturam & proprietates corporum Mundi totalium? Quod si vero quæ de motu solidorum in Statica & Mechanica, de gravitatione corporum in fluidis in Hydrostatica, de motu fluidorum in Hydraulica, de aere in Aerometria, de visu in Optica, Catoptrica & Dioptrica, de corporibus Mundi totalibus eorumque motuum legibus in Astronomia & Geographia traduntur, cum iis conferre dignatus fueris, quæ de iisdem argumentis in Physicorum systematibus occurrunt, demtis præsertim iis, quæ ex Mathematicorum voluminibus descripta sunt; quantum discriminis intercedat inter doctrinas Physicas principiis Mathematicis superstructas atque Mathematicorum opera excultas, & inter ea dogmata quæ Mathematicorum opem adhuc desiderant, illico constabit. Unde non miramur ROBERTUM BOYLIUM de Scientia naturali experimentando præclare meritum ita scribentem (a): *De Mathematica nonnihil tibi propositurus sum, eum imprimis in finem, ne forte (quod & mihi olim evenit) seducaris Philosophorum istorum modernorum auctoritate, qui cum Physici objectum sit materia, Mathematicas disciplinas, tanquam abstractis saltem quantitatibus & figuris occupatas, studio naturali obesse magis, quam prodesse contendunt. Quamvis enim opinionem ipsius* KEPLERI, *trium Imperatorum Mathematici aliorumque Astronomorum recentium absurdam, hominibus persuadentem, quod Mathematica quempiam ad Studium naturale facilius absolvendum non omnino idoneum reddere possit, restabilire & defendere aliquando conatus fuerim; ingenue tamen confiteor, quod experimentis meis in specie*

(a) In Considerationibus circa utilitatem Philosophiæ naturalis experimentalis. Exercitat. VI. §. 1 & 2 p. m. 483

ſpecie Mechanicis, Mathematicæ in Phyſica uſum ingentem mihi demonſtrantibus, ſæpe jam exoptarim, ut in Geometriæ theoriam & ſtudium Algebræ ſpecioſæ, quam puer ferme addidici, majorem impendiſſem partem temporis & induſtriæ, quæ Planimetriæ & Fortificatoriæ (de qua me integrum Tractatum ſcripſiſſe memini) aliiſque Practicis Mathematicæ partibus a me attributa fuit. Imo nec miramur ingenue profitentem: (a) *Vereor, implorandam eſſe a Mathematicis lectoribus veniam pro iis rebus, quas, ſi in Matheſi magis pollerem, accuratius tractaſſem.* Alibi nimirum oſtendi (b), tum demum in ſcientia naturali ad certitudinem ſeu evidentiam perveniri & dominium in res creatas obtineri, ſi Matheſis ad Phyſicam applicetur.

Niſi utilitates, quas Matheſis ad vitam affert, ſponte ſua occurrerent attentis; non modo Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Architecturæ, Mechanicæ, Hydroſtaticæ, Hydraulicæ uſus in Oeconomia ampliſſimus facile oſtendi, ſed etiam evidenter demonſtrari poſſet, maximam felicitatis humanæ partem Matheſi ſuperſtructam: ut taceam commoda, quæ Matheſis præſtat abſolutis ſtudiis Academicis in exteras regiones excurrentibus, quibus maxima utilitatis ac voluptatis ex itinere capiendæ pars perit, ſi in illa fuerint hoſpites ac peregrini.

Cum ideo diſciplinarum Mathematicarum utilitates innumeras mente attenta perpenderem, propria autem experientia edoctus non ignorarem, deſiderari adhuc Matheſeos univerſæ Elementa, quæ ad illas conſequendum ſufficerent; ante triennium idiomate patrio Elementa Matheſeos univerſæ publici juris feci, in quibus ea potiſſimum explanavi, quæ ad praxin tendunt, ideoque theorias prætermiſi, quarum non ideo manifeſtus eſt uſus. Dum liber adhuc ſub prælo ſudabat, contigit ut multi eundem expeterent: (c) quo ipſo adductus Bibliopola deſiderabat, ut eundem in ſermonem Latinum transfunderem. Hujus ego deſiderio annuens bonam jam operis partem habitu Romano indutam prælo deſtinaveram, cum conſultius mihi videretur, ſi theoretica uberius exponerentur, quam in Opere Germanico ad juvandum primos tyronum conatus compoſito fieri par

(a) In Præfat. ad nova Experimenta Phyſico-Mechanica de vi Aeris elaſtica.
(b) In Præfat. ad Elementa Aerometriæ, An. 1709 ſeorſim edita.
(c) Elementa iſta Germanica ab eo tempore jam quarta vice typis reſcripta; & in compendium redacta, quod ter lucem adſpexit.

ri par erat, ut Latinum ſcilicet etiam ſatisfaceret ad ſublimiora tendentibus. Quæ igitur ſermone Latino prodeunt Elementa, a Germanicis multum differunt novoque ordine digeſta ſunt. In iis elaborandis tantum operæ collocare non licuit, quantum opus iſtiuſmodi requirere videbatur. Præterquam enim quod ſex, minimum quinque per diem horas inſtituendæ juventuti Academicæ cum in Matheſi, tum in Philoſophia impendam; varia obſtacula alia impediverunt, quo minus omnia ex voto fierent. Quoniam nimirum Bibliopola, qui aliquos jam ſumptus in editionem fecerat, inſtabat, ut opus cœptum perficerem; ſingulas fere propoſitiones typis deſcribendas tradere coactus fui, quamprimum a me in chartam conjectæ eſſent, typothetis ſcilicet quotidie penſum ſemidiurnum a manu mea exſpectantibus. Quodſi ergo quædam in hoc opere deprehendis, quæ jure diſplicent, ea nec mihi placere ſcias velim. Si totum diſplicet, ut meliora des hortor, gratum & mihi & aliis facturus. Interea patere, ut hoc duce utantur, quotquot ad ſolidam Mathematum cognitionem non ſine operæ, ſumptuum & temporis compendio adſpirant, quamdiu deſit magis fidus. Theoretica & practica eadem induſtria expoſui: Ex his unuſquiſque ſeligat, quæ ad palatum ſuum eſſe exiſtimaverit, reliqua aliis, non ſibi dicta putet. Indicem geminum ſubjunxi: quorum alter eſt rerum atque verborum, ut his Elementis etiam inſtar Lexici Mathematici uti poſſint; quorum ſtudia eodem juvantur; alter Elementa *Euclidea* cum noſtris confert, ut, quæ ex *Euclide* paſſim citantur, etiam in noſtris inveniri poſſint, nec *Euclideis* habeant opus, qui noſtra poſſident. Vale, Lector benevole, & his noſtris utere, Tomum alterum, qui Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perſpectivam, Trigonometriam Sphæricam, Aſtronomiam, Cronologiam, Geographiam, Gnomonicam, Pyrotechniam, Architecturam militarem atque civilem, una cum Bibliotheca Mathematica complectetur, propediem eſpectans. Dabam Halæ Magdeburgicæ ipſis Calendis Octobris An. 1713.

MONI-

MONITUM AUCTORIS
DE EDITIONE NOVA.



Ovam horum Elementorum editionem daturi operam dedimus, ut multo correctiora prodirent, multo etiam auctiora. Etenim in singulis disciplinis ea adjecimus, quæ adhuc desiderari posse videbantur & viam ad ulteriora sternunt: quo ipso contigit, ut disciplinæ nonnullæ novam plane formam adeptæ fuerint, &, quæ in editione priore per duos Tomos digesta fuerant, in hac posteriore quinque Tomos complecti necesse fuerit. Ita in Tomo primo, qui nunc prodit, ut taceamus, quæ passim interspersa sunt, Arithmeticæ accesserunt capita nonum & decimum integra de fractionibus decimalibus & sexagesimalibus, Geometriæ caput secundum partis posterioris de sectione & situ planorum, Trigonometriæ & Algebræ problemata varia, quæ utilitate sese commendant, vel quædam inveniendi artificia continent per cetera nondum insinuata. Accessere etiam tum Geometriæ, tum Analysi finitorum, tum Analysi infinitorum figuræ novæ tabulis æneis incisæ. Et quoniam Philosophiam certam ac utilem effecturi Mathematum notitiam amplificamus, ut ad eam capessendam animi defæcati præparentur, nuperque in Opere Logico methodum, quæ convenit doctrinæ solidæ, accuratius delineavimus, quam hactenus ab aliis factum fuerat, ac inprimis genuinam demonstrationum formam distincte exposuimus; ideo demonstrationes ita digessimus, ut exempla regulis ad amussim respondeant, & elementa hæc manu assidua volventibus naturalis ratiocinandi modus sua veluti sponte sese insinuet; nascanturque in animo ideæ, quæ Logicæ præceptis respondent. Nulli igitur dubitamus fore, ut, qui in his elementis attenta mente perlegendis fuerint assidui, fructus eximios percipiant: id quod quemadmodum speramus maxime optamus. Dabam Marburgi Cattorum die 11. Martii An. 1730.

DE



DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

PRÆFATIO.



SI quid mei judicii eſt, operam non inanem ſumit, qui methodum Mathematicorum diligentiſſime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum poteſt, attendit, & rationes evidentiæ illorum funditus perſpicit; verum ad alias etiam diſciplinas, utut labore non adeo facili, cum fructu tamen prorſus inſigni, eandem transfert. Quodſi vero Matheſis non aliam præ-

præter hanc unicam cultoribus ſui afferret utilitatem; eidem tamen gnaviter incumbere deberent, quotquot diſciplinarum ſtudia ingrediuntur. Eumque in finem ſtudium mathematicum tantopere commendant viri docti ac intelligentes, quos inter (*a*) LOCKIUM, (*b*) MALEBRANCHIUM, (*c*) TSCHIRNHUSIUM nominaſſe ſufficiat, quorum in philoſophia rationali illuſtranda ſolertia haud paucorum opinionem vicit. Hanc igitur de methodo mathematica commentationem mole exiguam, ſed rerum ubertate gravem, Elementis Matheſeos univerſæ præmiſi, ne in iis deſiderari paterer induſtriam meam, quorum ad recte philoſophandum quam maxime neceſſaria eſt cognitio: (*d*) inprimis cum exiguus admodum ſit eorum numerus, quibus interiora methodi ſunt perſpecta; multo minor autem illorum, qui methodo mathematica prompte utuntur. Ceterum hæc commentatio de methodo ſingulari cum attentione perlegenda &, ubi Arithmeticæ ac Geometriæ elementa evolvuntur, præcepta methodi ſunt relegenda, tum ut penitus intelligantur, tum ut appareat, quomodo iis ſatisfiat. Ita demum Matheſeos ſtudium vere acuet intellectum.

CON-

(a) In Tractatu de directione ingenii (qui inter opera poſthuma idiomate Anglico Londini 1706 edita habetur) p. 30.
(b) De inquirenda veritate lib. 6. c. 6. & 7.
(c) In introductione ad Matheſin & Phyſicam Germanice conſcripta p. m. 17. & ſeqq.
(d) Uberius huc ſpectantia expoſuimus in Logica ſeu Philoſophia rationali.

CONSPECTUS COMMENTATIONIS DE METHODO MATHEMATICA.

Methodus Mathematica definitur §. 1, & ejus forma generaliter describitur §. 2. Hæc ut specialius explicetur, docetur quid sint definitiones §. 3, & harum gratia traditur explicatio notionum cum in genere §. 4 cum in specie clararum §. 6, obscurarum §. 7, distinctarum §. 8, confusarum §. 9, adæquatarum §. 10. 11, & inadæquatarum §. 12. Ostenditur, quænam notiones in numerum definitionum admittantur §. 13. 14. 15. Definitiones dividuntur in nominales & reales §. 16. 17. 18. Exponuntur quatuor modi inveniendi definitiones nominales §. 19. 20. 21. 22, & quatuor alii inveniendi reales §. 25. 26. 27. 28. Indicatur, quomodo innotescat, quod definitiones tam nominales §. 23. 24, quam reales §. 29, possibiles sint. Declaratur indoles axiomatum & postulatorum §. 30. 31. 33 & abusus quidam notantur §. 32. Disseritur quoque de experientia §. 34. 35. 36. 37. Definitur theorema §. 38, & distincte agitur de propositionis partibus thesi, atque hypothesi §. 39. 40. 41. 42, & de demonstratione §. 43. 45. 47, ubi etiam docetur usus citationum Mathematicis in demonstrationibus solennis §. 44. Similiter declaratur problematum §. 48, corollariorum §. 49. 50, scholiorum §. 51, ratio. Asseritur methodi mathematicæ universalitas §. 52, & ratio redditur, cur interdum Mathesis judicium acuere debeat §. 53, interdum minus §. 54. Denique respondetur ad objectiones, quæ contra methodum mathematicam a nonnullis afferri solent §. 55. 56. 57.

DE METHODO MATHEMATICA
BREVIS COMMENTATIO.

§. 1. Per *Methodum Mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis suis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiuntur autem Mathematici a definitionibus; inde ad axiomata & postulata, in Mathesi mixta ad experientias seu observationes, progrediuntur; his tandem theoremata & problemata superstruunt: ubique vero corollaria & scholia, si e re visum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter se distinguuntur & unde, quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente repræsentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus distincte tradidit sagacissimus *Leibnitius (a)*: quæ quanti sit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. 6. Est scilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoscendam sufficit, e.gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obscura* est *notio*, quæ ad rem oblatam recognoscendam non sufficit. Talis est e.gr. plantæ, ad cujus conspectum dubitas, utrum ea sit nec ne,

 quam

(a) In Actis Eruditorum An. 1684, p. 537.

quam alio tempore alibi videras, & cui hoc vel illud nomen tribui suevit.

§. 8. Clara *Notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis, e. gr. quod circulus sit figura linea curva in se redeunte terminata, cujus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. 9. *Confusa* est *notio* clara, si notas, ex quibus rem oblatam recognoscis, recensere minime valeas, utut in tales sit resolubilis: qualis est e. gr. notio coloris rubri.

§. 10. Distincta *notio adæquata* dicitur, si & notarum, ex quibus componitur, notiones distinctas habueris, e. gr. notio circuli, paulo ante tradita, censetur adæquata, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedii, distantiæ æqualis & terminationis notiones distinctas habueris.

§. 11. In hac analysi cum progredi liceat, donec ad notiones irresolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus, manifestum est, in præsenti tamen non explicandos. Sufficit monuisse, quod notiones quædam confusæ admitti queant, quarum evolutio ad demonstrationes non apprime necessaria. Ita *Euclides* non resolvit notionem æqualitatis, utut eadem notiones trianguli æquilateri, rhombi & figurarum regularium ingrediatur. Propositiones enim, ad quarum demonstrationem necessaria erat, facile ipsi sine probatione concedi poterant, e. gr. quod æqualia eidem tertio sint æqualia inter se; quod figuræ sibi mutuo congruentes sint æquales; quod æqualibus per æqualia multiplicatis facta sint æqualia &c. Defectum scilicet analyseos supplent propositiones, quæ per experientiam satis certæ sunt.

§. 12. *Inadæquata* est *notio*, si notarum, quæ distinctam ingrediuntur, nonnisi confusas notiones habueris.

§. 13. In numerum definitionum mathematicarum non admittuntur nisi notiones distinctæ &, quantum fieri potest, aut pro re nata sufficit, adæquatæ.

§. 14. Hinc in definitionibus subsequentibus non utuntur vocibus, nisi vel ex antecedentibus, vel aliunde satis intelligatur, quæ res iis subjiciantur.

§. 15. Et, si quando notione confusa contenti sumus, res, ad quam spectat, obvia sit necesse est, ut vel præsentem quandocunque libuerit percipere, vel sæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminisci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas classes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Talis est quadrati, si figura quadrilatera, æquilatera, rectangula esse dicatur.

§. 18. *Definitio realis* est notio distincta rei genesin, hoc est, modum, quo fieri potest, exponens. Talis in Geometria est Circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. 19. Ad definitiones nominales multis modis pervenitur: quos inter primus nominari debet, si ad rem præsentem, quam percipimus, attendimus. Hac ratione Astronomis innotuit, eclipsin Lunæ esse privationem lumi-

luminis Lunæ plenæ. Cum cura vero distinguenda sunt, quæ distingui possunt, eoque fine singula primum sigillatim considerari, mox inter se conferri debent, ut definitio notio distincta evadat, qualis *vi* §. 13. esse debet.

§. 20. Definitiones hac vel alia methodo investigatas expendentes varias plerumque determinationes animadvertimus, quibus omissis generaliores evadunt. E. gr. Si ex definitione *trianguli*, quod sit spatium tribus lineis comprehensum, linearum numerus expungatur; notionem *figuræ* habebis, quod sit spatium lineis terminatum.

§. 21. Si determinationes in definitionibus obvias consideres; alias iis geminas comminisci datur: qua ratione definitiones aliæ inveniuntur. E. gr. Ubi perpendis figuram trianguli a ternario laterum numero dependere; quaternarium, aut numerum quemcunque alium ternario majorem substitue, ut definitio *figuræ quadrilateræ* aut *multilateræ* cujuscunque prodeat.

§. 22. Quemadmodum vero *vi* §. 20 determinationes quædam omitti; sic etiam novæ superaddi possunt. E. gr. in definitione trianguli species & ratio linearum, quam inter se habent, determinari potest. Ponamus nimirum lineas esse rectas; generalis notio trianguli in notionem *trianguli rectilinei* abit. Ponamus porro esse latera omnia inter se æqualia; notio trianguli generalis in notionem *trianguli æquilateri* degenerabit.

§. 23. Definitionum per methodum primam inventarum realitas extra omnem dubitationis aleam posita. Quis enim, quæ actu existere cognoscit, utrum esse possint nec ne, dubitabit? Dubitaret enim, num perciperet, quæ se percipere sibi conscius est: id quod valde absonum. E. gr. Si quis lunam deficientem intuetur; quod eclipsin pati possit, dubitare nequit. Idem de illis definitionibus judicium esto, quæ a possibilibus abstrahuntur.

§. 24. Alia vero definitionum per methodum tertiam & quartam inventarum est ratio. Utrobique enim arbitrium regnat, sive juxta tertiam determinationes datas in alias similes convertas, sive juxta quartam datis alias superaddas: nostrum autem arbitrium nullam rebus existendi necessitatem imponit. Licet e. gr. spatium tribus lineis rectis comprehendi possit, inde tamen nondum liquet, quod etiam quatuor, quinque, aut pluribus quotcunque aliis terminari queat. Et quamvis tres lineæ rectæ spatium comprehendant; inde tamen nondum apparet, quod inter se æquales esse possint. Tales itaque definitiones possibiles esse demonstrandum est: id quod Geometræ circa figuras præstant, dum earum constructionem tradunt.

§. 25. Definitiones reales vel a priori inveniuntur, vel a posteriori innotescunt. A priori definitiones reales investigabis, si ex plurium possibilium, quæ tibi innotuerunt, combinatione novum quoddam possibile producis, e. gr. ex combinatione machinarum simplicium machinam quandam compositam, cujus nullam antea habebas notionem. Et in hac quidem methodo casui persæpe aliquid datur. Exemplo est compositio telescopii per fortui-

tuitam combinationem lentis convexæ cum concava detecta, narrante *Borello*.

§. 26. Difficilius idem præstatur, si ex data definitione nominali realis invenienda. Hoc enim in casu notiones distinctas eorum evolvere tenemur, quæ in ista continentur, ut appareat, qualia ad rei formationem requirantur; postea cognitiones jam ante acquisitas mente recolere debemus, visuri num talia succurrant, per quæ rei formationem concipere licet. E. gr. datur in Astronomia definitio nominalis eclipsis Lunæ, quod scilicet sit privatio luminis Lunæ plenæ; invenienda est definitio realis ejusdem. Lumen igitur lunare & plenilunium meditari debemus. Ubi illud a Sole secundum lineas rectas in corpus lunare incidere & tempore plenilunii eclipticì Lunam Soli diametraliter opponi, adeoque Tellurem duobus hisce corporibus interpositam in locum Soli oppositum projicere umbram succurrit; haud difficulter innotescit, eclipsin Lunæ oriri, si ea umbram terræ ingrediatur.

§. 27. A posteriori definitiones reales innotescunt, si rei formationi præsentes attendimus. E.gr. Si quis videat in campo circulum describi fune circa clavum fixum in gyrum acto; is genesin circuli concipit per motum lineæ rectæ circa punctum fixum.

§. 28. Ad definitiones reales quoque pervenitur, dum compositum totum in suas partes simplices resolvitur, quod in organicis potissimum locum habet. Hac ratione e. gr. structuram machinæ jam extantis assequimur.

§. 29. Circa hoc definitionum genus duo consideranda sunt, antequam de illarum possibilitate judicare licet, nempe 1.° utrum ea existant aut existere possint, nec ne, quæ ad genesin rei concurrere assumimus: 2.° num ab iis proficisci queant, quæ in formatione rei iisdem tribuimus: id quod ex natura definitionis realis (§.18) liquet. Horum vero certitudinem vel experientia, vel eorum, quæ per consequentias legitimas alio tempore deduximus, reminiscentia consequimur. Ita e. gr. in definitione circuli superius (§. 27) tradita per experientiam claret, lineam rectam circa punctum fixum in gyrum agi posse. Ast in definitione eclipsis lunaris ratione, experientia licet stipata, assequimur, Lunam Telluris umbram ingredi posse.

§. 30. Definitiones tam reales, quam nominales cum in se considerari, tum inter se conferri possunt. Quicquid ex consideratione eorum, quæ in una definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, si quid rei convenire, aut non convenire enuntiet; *Postulatum* vero, si quid effici posse affirmet vel neget. E. gr. Ex genesi circuli liquet, omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter se æquales esse, cum unam eandemque lineam in diverso situ referant. Hæc adeo propositio in axiomatum numero habetur. Ast dum per eandem definitionem intelligitur, ex quovis puncto quovis intervallo circulum describi posse: id inter postulata collocatur.

§. 31. Quoniam igitur axiomatum & postulatorum veritas per intuitum definitionum, ex quibus fluunt, cogno-

gnoſcitur; demonſtratione nulla indigent. Vera enim eſſe intelliguntur, quamprimum realitas definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *propoſitiones per ſe notæ*, item *ex terminis manifeſtæ* dicuntur.

§. 32. Multi hac axiomatum proprietate abutuntur, dum præmiſſas ſyllogiſmorum, quas probare neſciunt, pro axiomatibus venditant. Hinc videas in axiomatum numerum referri propoſitiones, quas ſine probatione non admittunt intelligentes. Equidem negandum non eſt, ipſum *Euclidem*, qui in demonſtrando ſe virum præſtitit, propoſitiones utique demonſtrabiles in axiomatum numerum retuliſſe, propterea quod æqualitatis, congruentiæ, lineæ rectæ aliarumque rerum notiones explicare non poterat: monuimus tamen jam in ſuperioribus (§. 11), ipſum non ſuppoſuiſſe niſi propoſitiones, quarum certitudo ſtatim cuique patet per recordationem vel maxime confuſam eorum, quæ olim ſæpius experti ſumus, aut etiamnum, ſi ita viſum fuerit, denuo extemplo experiri poſſumus, imo quibus in judicando tantum non quotidie utuntur omnes, quale e. gr. eſt, quod eidem tertio æqualia ſint æqualia inter ſe; item quod figuræ & lineæ rectæ ſibi mutuo congruentes ſint æquales. *Euclidis* igitur exemplum abuſum, quem taxamus, minime tuetur.

§. 33. Notandum nimirum, eo minorem fieri axiomatum numerum, quo ſufficientius notiones evolvuntur. Imo ſi verum fateri fas eſt, vera axiomata non ſunt niſi propoſitiones idenricæ.

§. 34. Cum axiomatibus & poſtulatis etiam experientiæ nonnunquam confunduntur. *Experiri* autem dicimur, quicquid ad perceptiones noſtras attenti cognoſcimus, e. gr. dum accenſa candela conſpicua fieri videmus, quæ ante non apparebant.

§. 35. Experientiæ itaque ſunt rerum ſingularium, quoniam nonniſi res ſingulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans caſum ſingularem in medium proferre tenetur, niſi vel ſenſui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Matheſi exactiſſime obſervatur. Neque enim e. gr. in Aſtronomia Solis orientis & occidentis obſervationes recenſentur, utpote quotidianæ ac omnibus ſatis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum obſervationes a diverſis Aſtronomis tempore diverſo diverſiſque inſtrumentis celebratæ fideliter referuntur, cum non in cujuſvis poteſtate exiſtant.

§. 36. Mathematici quoque experientias a concluſionibus inde deductis accurate diſtinguunt, aliis ut plurimum has cum illis confundentibus. E. gr. Quod candela accenſa corpora, quæ ante non apparebant, in conſpectum prodeant, per experientiam innoteſcit. Quodſi vero perpendens, lumen in cauſa eſſe, cur tenebris diſcuſſis appareant, & una expendens rerum naturalium eodem modo ſe habentium eundem eſſe effectum, infero; quicquid lumine colluſtratur, videri poteſt: hæc propoſitio non in experientiarum, ſed concluſionum per legitimam conſequentiam inde derivatarum numerum referenda.

§. 37. Iſtiuſmodi concluſiones omiſſis experientiis commemorantur, ſi modus,

modus, quo ex his eliciuntur, omnibus fuerit cognitus atque perspectus. E.gr. Maximam Solis declinationem non immediate metimur, sed ex data elevatione Æquatoris & altitudine meridiana Solis in solstitio invenimus. Proprias igitur de ea observationes traditurus, non altitudinem Solis meridianam in solstitio observatam annotet opus est, sed sufficere potest, ut ipsam declinationem statim indicet. Si enim constet, quantam elevationem Æquatoris assumserit; nec quanta meridiana fuerit altitudo Solis ignoratur. Quod si vero non appareat, quomodo propositio data ex prævia quadam experientia eliciatur; casus singularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari possit. Quod enim aliquid perceperis, cum demonstrare nequeas; ut credatur, jure poscis: sed quomodo unum ex altero deductum fuerit, cum rationis examini subsit, ut fides deductis habeatur, sine ratione flagitas.

§. 38. Propositio theoretica, ex pluribus definitionibus inter se collatis eruta, *Theorema* appellatur. E.gr. Si in Geometria triangulum cum parallelogrammo super eadem basi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipsis eorundem definitionibus, partim ex aliis ipsorum proprietatibus jam ante erutis infertur, parallelogrammum esse trianguli duplum; ea propositio in theorematum numerum referenda.

§. 39. Duo autem sunt, quæ in omni theoremate attentionem merentur, *Propositio* nempe, atque *Demonstratio*. Illa quidem enuntiatur, quid rei cuidam sub certis conditionibus convenire possit, quid non; in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus, illud ipsi convenire, concipere valet.

§. 40. Absolute possibile non est nisi ens a se: reliqua vero omnia tantum admisso alio possibilia esse intelliguntur, hoc est, nil eorum est sine quadam conditione. Hæc igitur in propositione una exprimenda. E. gr. Triangulum est dimidium parallelogrammi, si bases & altitudines fuerint sigillatim æquales. In propositione itaque tam basium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet propositio in *Hypothesin* & *Thesin* commode distinguitur: quarum illa conditiones recenset, sub quibus aliquid affirmatur, vel negatur, hæc vero complectitur, quod vel affirmatur, vel negatur. E.gr. in propositione allata hypothesis est, *si triangulum & parallelogrammum super æquali basi & ejusdem altitudinis existant*; thesis autem, *illud hujus dimidium est*.

§. 41. Notandum vero, si in ipsa rei definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, hypothesin distincte non exprimi. E.gr. Si tres in triangulo anguli 180 graduum dicantur; hypothesi carere videtur propositio: quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet propositio: si quædam figura tribus lineis rectis terminatur; tres habet angulos junctim sumtos duobus rectis æquales. En hypothesin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. 42. Datur autem in propositione affirmativa necessarius nexus inter hypo-

hypothesin atque thesin; in negativa autem nullus concipi potest, sed hæc illi repugnat. Quoniam scilicet in subjecto deprehenditur, quod hypothesis involvit; ei quoque convenire debet, quod in thesi continetur. E. gr. in hoc theoremate, quod *triangulum sit dimidium parallelogrammi super eadem basi & ejusdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus basin & altitudinem basi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein asserimus, quod sit parallelogrammi dimidium. Posterius concipitur propter prius.

§. 43. Nexum inter thesin & hypothesin in propositionibus affirmativis, repugnantiam in negativis *demonstratio* manifestat. Eorum igitur definitiones, quæ in hypothesi ac thesi continentur, eorundemque proprietates ex istis derivatæ, aut aliunde cognitæ demonstrationum principia existunt. Quoniam vero in Mathesi principia non admittuntur, nisi quæ ante fuerunt evicta; definitiones ac propositiones, quibus demonstrationes superstruuntur, citari solent, partim ut appareat genuina principia adhiberi; partim ut ignaris constet, unde ipsorum certitudo haurienda.

§. 44. Enimvero citationes definitionum, axiomatum, postulatorum, theorematum & problematum non exiguum habent usum, nec sine ratione in Mathesi singulis cogitationum generibus singula nomina imponuntur. Demonstratio namque non convincit nisi principiis demonstrandi extra dubitationis aleam positis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera supponenda sint, antequam veritatis propositionis datæ convinci possis. Et quoniam definitiones primi conceptus existunt, axiomata vero ex iis immediate deducuntur, theoremata vero vel immediate, vel mediate ex iisdem derivantur; ex nomine veritatis cujuslibet, ad quam in demonstratione provocatur, statim addiscitur, utrum multa supponenda sint nec ne, & quo ordine sit procedendum, ut convictio locum habeat. Imo cum ad veritatem definitionum, axiomatum & postulatorum, theorematum & problematum dijudicandam peculiaribus artificiis opus sit; nomina veritatum citatarum simul methodos in memoriam revocant, quibus principia demonstrandi persuadeas convincendo.

§ 45. Non alia vero est ratio ex principiis conclusiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis Logicis, ubi de syllogismo agitur, jamdudum exposita. Sunt enim demonstrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita ut omnia vi Syllogismorum concludantur, omissis saltem præmissis, quæ vel sponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut sit demonstratio, præmissæ syllogismorum novis syllogismis tamdiu probandæ sunt, donec perveniatur ad syllogismum, in quo præmissæ sunt vel definitiones, quas jam constat esse possibiles, vel propositiones aliæ identicæ.

§. 46. Equidem demonstratu haud difficile foret, (*a*) genuinam demonstrationem, quæ convictionem plenariam

(a) Ostendimus id in Logica §. 551. & seqq.

riam pariat, fieri non posse, nisi cogitationes nostræ juxta regulas syllogisticas dirigantur; his tamen ambagibus in præsenti opus non est. Cum enim de quæstione facti disputemus; exempla allegasse sufficit. Scilicet non ignotum est, *Clavium* demonstrationem propositionis primæ elementi primi *Euclidis* in syllogismos resolvisse: imo *Herlinum*, atque *Dasipodium* sex priora elementa *Euclidis*, & *Henischium* integram Arithmeticam per syllogismos in forma exhibitos demonstrasse.

§. 47. Equidem non ignoro, esse hac nostra præsertim ætate non paucos, qui sibi persuadent, demonstrationum mathematicarum formam a legibus syllogismorum abhorrere, multo minus concedere, illas vim omnem ad convincendum ab his unice habere; sed nec me latet, contrarium videri Viris non modo præclara judicii vi pollentibus, sed & attentione magis severa utentibus: quorum auctoritas me permovit, ut eam in rem penitius inquirerem, & sic præjudicium ex præcipitantia in judicando ortum cognoscerem. Fatetur certe *Leibnitius* (*a*), vir in Mathesi & omni eruditione reliqua summus, *firmam esse demonstrationem, quæ præscriptam a Logica formam servat*. Similiter *Joannes Wallisius*, Mathematicus profundus, (*b*) agnoscit, *id, quod in Mathesi proponitur probandum, syllogismi unius pluriumve ope deduci*. Imo ingeniosissimus etiam *Hugenius* (*c*) observavit, *paralogismos in Mathesi sæpius vitia formæ existere*. Verum enimvero ne auctoritatibus magis, quam rationibus (*d*) pugnare videat (quanquam in hoc argumento maximum pondus habeat tantorum virorum auctoritas); fontes præjudicii vulgaris retegere libet. Quamdiu scilicet in Mathesi versamur, figuris & characteribus in ratiocinando juvamur, ex quarum inspectione non minus, quam ex aliarum propositionum citatione multæ præmissæ syllogismorum supplentur: ad quod si non satis attendatur, quam sancte in demonstrationibus mathematicis leges syllogismorum custodiantur non apparet.

§. 48. *Problemata* facienda proponunt, & tribus partibus constant, *Propositione* scilicet, *Resolutione*, ac *Demonstratione*. In propositione, quid fieri debeat, indicatur. In resolutione singuli actus ordine decenti recensentur, quibus efficitur, quod erat faciendum. Denique in demonstratione evincitur, factis iis, quæ resolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque problema demonstrandum, in theorema convertitur, cujus hypothesin resolutio, thesin vero propositio constituit. Generalis enim omnium problematum demonstrandorum (ut jam innuimus) tenor hic est: Factis iis, quæ resolutio præcipit, illud quoque efficitur, quod erat faciendum. Quare non opus est, ut de problematibus plura dicantur.

§. 49. Rationes subinde non desunt, cur ad casus speciales applicentur propositiones generales, & ex quibusdam propositiones sæpe alias prona consequentia deducere licet. Quæ utroque modo

(a) Acta Erudit. An. 1684. p. 541. conf. Essais de Theodicee p. 37. 40. 41. 73.

(b) Operum Mathem. Vol. 3. f. 180, hoc est Logic. lib. 3. cap. 22.

(c) Acta Erudit. An. 1711. pag. 477.

(d) Vide eas in Logica nostra §. 551 & seqq.

modo eruuntur propositiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 50. Primum corollariorum genus demonstratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in universum casibus demonstratum fuit, de hoc vel isto in specie ut denuo demonstretur opus non est. E. gr. ubi de omnibus triangulis ostensum, tres angulos eorum una sumtos duobus rectis æquari; idem in specie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Ast alterum corollariorum genus demonstrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis propositionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. E. gr. si theorematí, cujus modo mentionem feci, hoc corollarium subjungatur: *in triangulo rectangulo unus saltem actu rectus esse potest*; ratio illationis non negligenda, quod scilicet, positis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 51. In *Scholiis* denique tam definitionibus, quam propositionibus earumque corollariis subjungi solitis, obscura declarantur, ad dubia respondetur, usus doctrinarum indicatur, historia ac fontes inventionum describuntur, &, si qua alia scitu, nec injucunda, nec inutilia occurrunt, inferuntur.

§. 52. Explicatam hactenus methodum qui probe perpendit, ejus universalitatem haud dubie agnoscet, nec diffitebitur, sine ea ad solidam rerum cognitionem perveniri haud quaquam posse. Dicitur vero *Methodus mathematica*, imo sæpius *Geometrarum Methodus*, quia huc usque Mathematici fere soli, in Geometria inprimis, ejus leges sancte custodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis disciplinis applicare studuerunt; conatui tamen ipsorum eventus minime respondit. Etenim nunc notiones non satis evolverunt, nunc sine probatione assumserunt, quæ maxime probari debebant, nunc per saltum ratiocinati sunt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri possunt.

§. 53. Explicatæ methodi legibus cum ex asse satisfiat in Mathesi præsertim pura, non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant, hoc est, quod eorum cultores promptitudinem acquirant veritatem quamlibet, ad quam cognoscendam animum appellunt, accuratius, quam alii solent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, quale demonstrationum mathematicarum meditatio censeri debet.

§. 54. Fructus igitur, quem ex studio Matheseos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quasdam mathematicas aliasque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri solitas, addiscunt. Licet enim in vita communi utiles existant; neminem tamen judicii acumine, ac inveniendi habitu beant, quia *per* §. *præc.* hæc nonnisi a seria demonstrationum meditatione expectare licet.

§. 55. Superest ut ad objectiones duas respondeam, quas contra methodum Geometrarum nonnulli afferre solent, præsertim cum satis prævideam non defuturos, qui easdem contra Elementa mea Matheseos urgebunt. Nempe vitio vertitur Geometris, 1.° *quod multa*

multa definiant, quæ definitione non habent opus, & quod multa probent, quæ probatione non indigent: 2.° quod ordinem, quo generaliora & simpliciora specialibus & compositis præponi necesse est, negligant, nec ad unum argumentum pertinentia uno loco absolvant.

§. 56. Objectioni primæ ut satisfiat, explicandum est, quando definitiones sint superfluæ, & quales esse debeant propositiones, ut probatione non indigeant: id quod ex fine definitionum, atque indole demonstrationum redditur manifestum. Definitiones nimirum hunc habent usum, ut vel subsequentibus aliis intelligendis inserviant, vel principia demonstrandi præbeant. Ostendant igitur adversarii, *Euclidem*, aut Geometram alium ullam dedisse definitionem, qua nec ad subsequentes explicandas, nec in propositionibus demonstrandis utuntur. Quamdiu vero exempla istiusmodi in medium afferre nequeunt, Geometras reprehendere desinant, quod nimii sint in definiendo, & suum potius errorem agnoscant, quod definitionibus non alium tribuant usum, nisi qui in rebus definitis agnoscendis & ab aliis distinguendis consistit. Diximus porro superius, præmissas syllogismorum tamdiu continuandas esse, donec ad definitiones, quas jam constat esse possibiles, & propositiones identicas perveniatur. Sine ratione itaque non admittuntur nisi propositiones identicæ, ac experientiæ claræ, in quibus notiones primæ fundantur. Reliquæ propositiones omnes sunt demonstrandæ. Ostendant igitur adversarii, *Euclidem*, aut Geometram alium propositiones identicas & notiones in experientiis claris fundatas demonstrasse. Quamdiu vero hujusmodi exemplum nullum in medium afferre valent; Geometras reprehendere desinant, quod probent, quæ probatione non indigere ipsis videntur, & potius discant, quod in demonstrando nunquam nimis accurati esse possimus, præsertim ubi extra Mathesin versamur, nec, ut ibi, figuris ac characteribus in ratiocinando juvamur.

§. 57. Quoniam igitur rigor in demonstrando laudi ducitur Geometris (§56); nec ordo jure taxatur, quo sine in demonstrando accurati esse nequimus. Eo nimirum ordine singula proponenda sunt, quo unum ex altero facilius infertur. Quare cum satis experiamur, id fieri minime posse, si in unum cumulum congerantur, quæ de subjecto eodem cognosci possunt; *ordo scholæ* Philosophis vulgaribus relinquendus, & a Geometris aliisque, quibus res profundius meditari datum est, *ordo naturæ* retinendus.

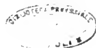
F I N I S.

ELEMEN-



ELEMENTA ARITHMETICÆ.

PRÆFATIO.





Non dubito fore aliquos, qui mirabuntur, quod elementa Matheseos universæ conscribens MATHESIN UNIVERSALEM prætermittam. Enimvero quam perperam nonnulli Mathesin universalem appellant, eam ego ab Arithmetica diversam non agnosco. Quantitates enim, quarum affectiones & relationes in ea considerant, pro numeris indeterminatis habeo: quæ etiam ratio est, cur non aliæ ipsarum, quam numerorum sint affectiones ac relationes. Ea igitur, quæ in Mathesi universali vulgo tractari solent, ego in Arithmetica pertracto: quo rationum potissimum doctrina spectat. Calculum tamen numerorum indeterminatorum, quem LITERALEM appellare solent, non integrum trado, quia in demonstrationibus arithmeticis & geometricis integro opus non habeo. Plenior

nior adeo explicatio ANALYSI reſervatur. Nec rationum doctrinam ope calculi hujus ſolius demonſtro, quia cum rigore demonſtrandi, quem mihi obſervandum propoſui, ea demonſtrandi ratio non ſubſiſtit, utpote in qua multa communiter ſine probatione aſſumuntur, quæ & a veteribus demonſtrata, nec mihi ſine probatione concedi poſſe viſa ſunt, ubi ſolidam doctrinam cordi habueris. Veram autem MATHESIN UNIVERSALEM in deſideratorum numero colloco, eam nempe, quæ leges metiendi generales & ad omnium rerum quantitatem determinandam menſuras convenientes præſcribit: nec repertu adeo facilem judico. Ceterum quæ commodius ope calculi literalis eruuntur, nec ad communis Geometriæ elementa intelligenda neceſſaria ſunt; ea ad Analyſin rejeci. Tirones ſub initium praxes arithmeticas ſolas cum definitionibus ſibi familiares reddere debent, theorematibus problematumque demonſtrationibus omiſſis. In calculo exercitati theoremata ad multa exempla numerica applicent, ut non modo eorum ſenſum clare perſpiciant, ſed eadem quoque memoriæ firmiter inſigant, quo in promptu ſint, quoties iis vel ad demonſtrandum, vel ad inveniendum opus eſt. Iis intellectis problematum demonſtrationes expendere, ac his perceptis inoffenſo pede ad theorematum demonſtrationes progredi licebit. Abſit autem, ut quis arbitretur, omnibus calcandam eſſe hanc ſemitam. Quorum enim eſt major mentis acies, congenita vel aliis ſtudiis acquiſita, & facilius conſervatur attentio; illi elementa integra eo ordine perlegere poſſunt, quo conſcripta ſunt. Uſus Arithmeticæ per diſciplinas reliquas omnes ſe diffundit. Ea igitur reliquis omnibus præmittenda fuit, & ante eas cum cura addiſcenda eſt. Quantus Arithmeticæ in vita civili uſus ſit, experientia loquitur: quantus in Phyſicis & aliis Philoſophiæ partibus, experientur quotquot Matheſi abſoluta ſolidam extra eam doctrinam quærere allaborabunt. Quantum denique in perficiendo intellectu poſſit, in ipſa pertractatione hinc inde annotavimus, &, ſi quis culturam convenientem ſtudio Arithmetico non negaverit, experientia optima erit Magiſtra.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Arithmeticæ.

DEFINITIO 1.

1. ARithmetica est numerorum scientia. Pars ejus *practica* est scientia computandi, hoc est, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut si fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6 & 8 junctim sumtis æqualis est.

SCHOLION.

2. *Patet adeo Arithmeticam practicam esse methodum inveniendi specialem. Ab ea igitur, si rite meditemur, regulas inveniendi generales abstrahere licet. Particularis enim methodus in applicatione regularum generalium consistit. Dederunt aliqua huc spectantia* Cartesius *tum in Tractatu de methodo, tum in iis, quæ de ingenii directione inter posthuma habentur, &* R.P. Malebranchius *in egregio opere de inquirenda veritate. Plura, quamvis paucis, nos damus infra (§. 125).*

DEFINITIO 2.

3. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat. Illustris *Leibnitius* unum sic definit: Si A sit B, nec præterea D ponatur B, nisi A & D idem sint, ponetur B unum.

DEFINITIO 3.

4. *Unitas* est abstractum, per quod dicimus unum.

DEFINITIO 4.

5. *Unitates eædem* sunt, quæ per eandem notionem agnoscuntur: *diversæ* sunt, quæ agnoscuntur per diversas.

SCHOLION.

6. *Ponamus e. gr. A esse globum lapideum, B similiter esse globum lapideum alium: erunt A & B unitates eædem. Sed si A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diversæ. Quodsi A, B & C tantum ut globos consideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.*

DEFINITIO 5.

7. Si A sit unum, B sit unum, C sit unum, D sit unum &c. nec tamen B, C, D &c. sint idem cum A; erunt A, B, C, D &c. *Plura* seu *Multa*.

DEFINITIO 6.

8. *Multitudo* est abstractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO 7.

9. Si A sit idem cum B, C & D simul sumtis; dicetur A *Totum*; B vero, C & D dicentur ejus *Partes*, & intuitu partis B reliquas C & D &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

DEFINITIO 8.

10. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, *Numerus* dicitur.

SCHOLION 1.

11. *Nempe si pro unitate linea recta sumatur; numerus quoque exprimi potest per rectam: id quod infra in Geometria & Analysi abunde patebit.*

SCHO-

SCHOLION 2.

12. *Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut sub eadem definitione numeros cum integros, cum fractos, tam rationales, quam irrationales comprehendere valeamus.*

DEFINITIO 9.

13. *Numerus determinatus* est, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. *Indeterminatus* est, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas*.

SCHOLION.

14. *In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodsi quæsiveris, quanta ea sit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium assumis & illius ad hanc relationem quæris, ac pro diversa unitate assumta per diversum numerum determinatum latitudinem fluvii enuntias. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum distincte intelligitur.*

DEFINITIO 10.

15. *Æqualia* sunt, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest. *Inæqualia* sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM 1.

16. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti substitui potest, quod vero alteri, salva nempe quantitate, substitui potest, alteri æquale est (§. 15); pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM 2.

17. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 15); erit idem alterius parti æquale.

HYPOTHESIS 1.

18. *Signum æqualitatis est* =.

SCHOLION.

19. *Hoc signo primus usus est* Hariotus, *Anglus* (a), *& hodie plerique eodem utuntur. Nonnulli cum* Cartesio *adhibent Signum sequens* ∞; *quidam etiam alia. Apud Auctores* Harioto *antiquiores nullum æqualitatis signum occurrit.*

DEFINITIO 11.

20. *Majus* est, cujus pars alteri toti æqualis est: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

21. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis sit (§. 16), & vicissim B æquale parti ipsius A (§. 17); inæqualium unum A majus, alterum B minus est (§. 20).

HYPOTHESIS 2.

22. *Signum majoritatis est* >; *minoritatis* <.

SCHOLION.

23. *Signis his itidem primus usus est* Hariotus (b). *Eum secuti celeberrimus* Wallisius (c) *&* R. P. Lamy (d). *Aliis alia placent: plerisque nulla sunt;*

DEFINITIO 12.

24. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo* est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res a se invicem discerni debent.

COROLLARIUM 1.

25. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero, modo sit istiusmodi, ut sine alio assumto intelligi possit.

COROLLARIUM 2.

26. Cum quantitas sine alio assumto per se non intelligi, sed tantum dari possit (§. 13. 14); Similia, salva similitudine, quantitate differre possunt (§. 25), atque adeo quantitas est discrimen internum similium.

SCHOLION.

27. *Similitudinis notionem distinctam primus eruit* Leibnitius. *Dixit nempe* similia, quæ non possunt distingui, nisi per compræsentiam. *Quoniam vero terminus* compræsentiæ *plerisque obscurus videtur; aliam definitionem intellectu planiorem substituere libuit. Ceterum res* compræsentes *fiunt duplici modo, nimirum vel immediate unum alteri, vel utrique idem aliquod tertium applicando: id quod intellectu facilius evadet, si in exemplum aliquod aciem ingenii intendamus. Ponamus itaque duo horologia portatilia prorsus inter se similia esse. Illorum unum possideat* Grachus; *alterum* Cajus. *Quodsi* Cajus *in præsentia* Grachi *horologium suum depromat, næ is attonitus sibi persuadebit,* horolo-

(a) In Artis Analyticæ praxi Sect. 1. f. 10. (b) Loc. cit. (c) Vide Arith. c. 35 f. 126. Vol. 1. Oper. Mathem.

(d) Elementis Geometriæ lib. 3. sect. 5. p. 177. edit. Par. 1710.

horologium suum esse; quod Cajus *manu tenet; at diversum a suo agnoscet, ubi & suum depromit, hoc est, horologium* Caii *a suo distinguit* Grachus *per compræsentiam, unum nempe alteri immediate applicando. Sed si locorum vel temporum intervallum inter duo ædificia similia interjectum menti una cum ipsis exhibetur; vel si dimensiones templorum aut statuarum similium ad staturam nostram aut mensuram datam aliam referimus; similia animo compræsentia sistuntur, idem tertium utrique eorum applicando.*

HYPOTHESIS 3.

28. *Signum similitudinis est* ∽.

SCHOLION.

29. *Commendatur in Miscellaneis Berolinensibus* (a). *Communiter nullo utuntur.*

DEFINITIO 13.

30. *Pars aliquota est*, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. *Pars* vero *aliquanta* est, quæ repetita aliquoties, semper vel major, vel minor est toto.

DEFINITIO 14.

31. *Commensurabilia* sunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum est pars aliquota alterius. *Incommensurabilia* sunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO 15.

32. *Quantitates homogeneæ* sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare potest, seu quarum una ab altera vel semel, vel aliquoties ablata tandem vel nihil, vel se minus relinquit. *Heterogeneæ* vero sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare nequit.

DEFINITIO 16.

33. *Numerus numerans* est, cujus unitas denotat ens in genere: *Numerus* vero *numeratus* est, cujus unitas denotat certam quandam entis speciem, vel genus quoddam determinatum.

SCHOLION.

34. E.gr. *Si quis simpliciter dicat*, sex; *is non determinat, quænam sint illa entia, quæ numerantur, adeoque utitur* numero numerante. *Contra si quis dixerit eum addito*, sex globi aurei; *is speciem entium determinat, quæ numerat, adeoque utitur* numero numerato. *Vocant nonnulli numerum numerantem* abstractum; *numeratum vero* concretum.

DEFINITIO 17.

35. *Numeri inter se homogenei* sunt, qui ad eandem; *heterogenei*, qui ad diversas unitates referuntur.

SCHOLION.

36. *Hæc divisio numerum numeratum potissimum respicit. Omnis nempe numerus determinatam quandam unitatem supponit* (§. 10). *Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando respicimus* (§. 5). *E. gr. ea globi proprietas est, qua ab aliis corporibus distinguitur, quod singula puncta superficiei a centro æqualiter distent. Quodsi igitur hanc unitatis notam constituas; singula corpora, quibus eadem convenit, unitatis naturam induunt, suntque unitates eædem, quatenus sub hac notione continentur* (§. cit.). *Quodsi vero globos porro distinguas e. gr. per materiam, ex qua constant, & alios ut aureos, alios ut plumbeos spectes; quæ antea eadem erant unitates, nunc diversæ evadunt. Hinc tres globi aurei & sex globi aurei sunt numeri homogenei inter se; sed tres aurei & sex argentei sunt inter se heterogenei.*

DEFINITIO 18.

37. *Numerus integer* est, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO 19.

38. *Numerus fractus* est, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Dicitur is etiam *Fractio*, itemque *Minutia*.

DEFINITIO 20.

39. *Numerus rationalis* est, qui unitati commensurabilis. Vocatur etiam *effabilis*.

DEFINITIO 21.

40. *Numerus rationalis integer* est, cujus pars aliquota est unitas.

(a) Part. 3. p. 159.

DEFINITIO 22.

41. *Numerus rationalis fractus* est, qui unitatis parti aliquotæ, aut aliquot partibus aliquotis æqualis est.

DEFINITIO 23.

42. *Numerus rationalis mixtus* est, qui constat ex integro & fracto, seu ex unitate & fracto.

DEFINITIO 24.

43. *Numerus irrationalis sive surdus* est, qui unitati incommensurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometricus*.

HYPOTHESIS 4.

44. *Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, nisi quod denariorum numerus una exprimatur.*

COROLLARIUM.

45. Decem ergo nominibus opus est ad decem numeros rationales primos indigitandos, & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur & ita porro.

SCHOLION.

46. *Lex numerandi, quam in hypothesi tradimus, ubivis (quantum constat) gentium recepta, & cum a prima ætate eidem adsueverimus, indispensabilis necessitatis videtur. Enimvero non modo* Erhardus Weigelius *in Arithmetica Tetractyco ostendit, fieri quoque posse, ut in numerando non ultra quaternarium progrediamur; sed &* Illustris Leibnitius (a) *Arithmeticam binariam excogitavit, nonnisi duabus notis* 1 & 0 *utentem ac numerorum proprietatibus investigandis aptam: cujus aliquod specimen dedit* Cl. Dangicourt *circa progressiones arithmeticas* (b). *Nimirum quoniam Arithmetica Dyadica duabus tantum notis utitur, leges progressionum numerorum dyadice expressorum facillime omnium deteguntur. Et* Carolus XII, *Rex Sueciæ, calculum sexagenarium excogitavit, referente* Emanuele Suedenborgio (c), *novis characteribus & numeris novisque denominationibus adinventis. Arithmetica autem decadica, qua vulgo utimur, denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur, quamdiu in computo nondum satis versati.*

DEFINITIO 25.

47. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, sunt: *unum*, *duo*, *tria*, *quatuor*, *quinque*, *sex*, *septem*, *octo*, *novem*, *decem*. Iidem numeri generali *Unitatum* nomine insigniri solent, nec opus est ut definiantur. Dicuntur etiam *Digiti*. Ex decem unitatibus componitur una *Decas*. Duæ decades dicuntur *Viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadraginta*; quinque *Quinquaginta*; sex *Sexaginta*; septem *Septuaginta*; octo *Octoginta*; novem *Nonaginta*. Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis millionum *Billio*; ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius ejusque quævis multipla dicentur *Articuli*.

SCHOLION.

48. *Vocibus millionum, billionum, trillionum &c. utimur ad confusionem in numeris magnis evitandam, quorum distinctis notionibus formandis inserviunt.*

HYPOTHESIS 5.

49. *Notæ numericæ constituantur novem sequentes:* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *Ut vero non solum unitates, sed & decades, centenarios, millenarios &c. indigitare possimus, valor ipsis tribuatur localis, ita ut solitariæ vel in loco dextimo positæ unitates sive digitos, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra* 0, *quæ scilicet sit* Nullitatis *nota*.

COROLLARIUM 1.

50. Numerorum igitur partes hoc ordine se invicem excipiunt:

Unitates }
Decades } Simplices.
Centenarii }

Uni-

(a) Histoire de l' Academie Royale des Sciences An. 1703. p. m. 175. & seqq.

(b) In Miscellaneis Berolinens. p. 336. & seqq.

(c) Observat. miscellan. part. 4. p. 1. & seqq.

Unitates, Decades, Centenarii } Millenariorum.
Unitates, Decades, Centenarii } Millionum.
Unitates, Decades, Centenarii } Millenariorum Millionum.
Unitates, Decades, Centenarii } Billionum.
Unitates, Decades, Centenarii } Millenariorum Billionum.
Unitates, Decades, Centenarii } Trillionum.
Unitates, Decades, Centenarii } Millenariorum Trillionum &c.

SCHOLION 1.

51. *Characterum Arithmeticorum electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt: ut inter alios docent* Georgius Henischius *in libello de numeratione multiplici, vetere & recenti, atque* Guil. Beveregius *in Arithmeticæ chronologicæ libro primo integro. Non tamen omnes æque commodi. Seligendi adeo sunt, per quos numerus quantumvis magnus facillime exprimi & computus optime absolvi potest. Quod autem notæ nunc usitatæ reliquis præstent, has cum illis conferentes experiuntur. Dicuntur subinde cyphræ, quamvis usitatius sit, ut hoc nomen soli notæ nullitatis imponatur: quem morem nos sequimur. Ab Arabibus inventæ vulgo feruntur. Sed docuit celeberrimus* Wallisius (*a*), *quod* Allepadi *Arabs in Commentario ad* Tograi *poema* Lamiat 'ol Ajam *dictum, inventionis gloriam Indis tribuat. Idem refert* (*b*), *quod Saraceni eas in Hispaniam attulerint, & quod ex Hispania in Galliam pervenerint studio* Gerberti, *monachi Floriacensis in Gallia, qui a variis dignitatibus ecclesiasticis tandem ad Pontificatum maximum nomine* Sylvestri II. *circa* A. C. 999. *evectus, ex ipsis ejus epistolis* A. 1636. *Parisiis recusis probat.* Joannes Federicus Weidlerus, *Mathematum apud Wittebergenses Professor clarissimus*, (*c*) *ex MSC.* Boethii *de Geometria, quod in Bibliotheca Academiæ Altorfinæ asservatur, & in quo Noster characteres numerorum arabicis similes expressos vidit, probare nititur, eos jam* Boethio *fuisse cognitos, quem* A. C. 524. *vitam finisse constat.* Wallisius (*d*) *non ignoravit, in* Boethii, Bedæ *aliorumque antiquiorum editionibus figuras istiusmodi comparere; sed id in vetustioribus MSC. contigisse negat. Quamobrem cum* Weidlerus *MCS. cujus auctoritate nititur, seculo quarto non junius existimet; criticorum est statuere, num tanta illius antiquitas admittenda sit.*

SCHOLION 2.

52. *Ex collatione diversarum figurarum numeralium discant velim, qui artem inveniendi cordi habent, quantum momenti in eo situm sit, ut ars characteristica perficiatur.*

COROLLARIUM 2.

53. Quodsi notis numericis substituantur literæ ad arbitrium electæ, iisque idem tribuatur valor, qui illis tribui solet (§. 49); numerum occulte scribere licet.

SCHOLION 3.

54. E. gr. *Denotent literæ infra scriptæ in secunda serie eosdem numeros, quos designant notæ superiores supra scriptæ in prima,*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
p. s. a. c. e. h. o. i. n. g.

erit 3748 = aoci. *Hoc artificio utuntur mercatores ad designanda mercium pretia in schedulis affixis.*

PROBLEMA 1.

55. *Numerum scriptum enuntiare, hoc est, cuilibet characteri valorem competentem assignare.*

RESOLUTIO.

1. Numerus propositus per commata dividatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto.
2. Nota dextima classis tertiæ notetur lineola transversa apici adscribenda; dextima classis quintæ duabus; dextima septimæ tribus, &c.
3. Comma solitarium per millenarios, lineola transversa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero sinistima classis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuntietur (§. 50).

Sic factum est, quod petebatur.

E. gr. Numerus sequens

2''', 125, 473'', 613, 578', 432, 597 ita enuntiatur: Duæ trilliones centum & viginti quinque millia billionum una cum quadringentis septua-

(*a*) Arithmet. Oper. cap. 9. f. 48. Vol. I. Oper. Math.
(*b*) In Tract. de Algebr. c. 4. f. 11. & seqq. Vol. II Oper. Mathem. (*c*) In Dissertatione de characteribus numerorum vulgaribus & eorum ætatibus An. 1727. publice ventilata §. 8 & seqq. p. 17. & seqq.
(*d*) In Tract. de Algebr. loc. cit.

ptuaginta tribus billionibus, sexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis septuaginta octo millionibus, quadringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta septem.

SCHOLION.

56. *Quantum conveniens terminorum usus in rebus distincte concipiendis, seu ex confusione extricandis vires intellectus humani extendat; abunde perspicient oculatiores, si ad præsens problema fuerint satis attenti.*

HYPOTHESIS 6.

57. *Quantitates aut numeros indeterminatos literis Alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

SCHOLION.

58. *Literis majoribus usus est* Vieta (a): *minores introduxit* Hariotus (b), *quem mox imitatus est* Cartesius (c) *& nunc sequuntur plerumque omnes.*

HYPOTHESIS 7.

59. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjecta lineola subscribitur. Eorum inferior, seu* Denominator, *indicat unitatem seu totum in partes divisum; superior vero, seu* Numerator, *numerat partes in casu proposito datas.* E. gr. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita scribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat, lineam esse in tres partes æquales divisam; numerator 2 vero duas istiusmodi partes assignat.

SCHOLION.

60. *Neque vero mirentur tirones, quod in numeris fractis numeratori denominator subscribatur, qualis in integris non occurrit. Additur enim, ut appareat, quamnam partem aliquotam cum unitate communem habeat fractus* (§. 41).

DEFINITIO 26.

61. *Additio* est inventio alicujus numeri ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis junctim sumtis æqualis est. Numeri dati dicuntur *summandi*; quæsitus autem *summa* vel *aggregatum*.

(a) In variis Scriptis Analyticis, quæ inter Opera ejus habentur.

COROLLARIUM.

62. Iterata ergo ejusdem numeri additio est inventio numeri alteri cuidam aliquoties sumto æqualis, & contra.

HYPOTHESIS 8.

63. *Signum additionis est* +, *quod per* plus *efferri solet.* Ita 3 + 4 denotat summam ex 3 atque 4, & pronuntiatur: 3 plus 4.

DEFINITIO 27.

64. *Subtractio* est inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis est. Numerus, qui subducitur, dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo subtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*, a nonnullis *Residuum*.

HYPOTHESIS 9.

65. *Signum subtractionis est* —, *quod per* minus *efferri solet.* E. gr. 7 — 3 denotat differentiam inter 3 & 7, pronuntiatur: 7 minus 3.

DEFINITIO 28.

66. *Multiplicatio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *Efficientes*; quæsitus *Factum*, item *Productum*. In specie factorum alter, qui aliquoties sumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat, quoties ille sumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

67. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties sumto æqualis (§. 66), istiusmodi autem inventio non est nisi iterata additio (§. 62); multiplicatio est iterata ejusdem numeri additio.

HYPOTHESIS 10.

68. *Signum multiplicationis est punctum*

(b) In Artis Analyticæ praxi.
(c) In Geometria.

ctum unicum (.) *inter factores duos medio loco positum*, *quod per* multiplicatum *effertur*. E. gr. 4 . 3 denotat factum ex 4 in 3; item 7 . 5 . 9, factum, cujus factores sunt 7, 5 & 9. *Literæ sine ullo signo junguntur*. E. gr. *a b* denotat factum ex *a* in *b*; *b c d* factum, cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO 29.

69. *Divisio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas, quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet, *Dividendus*; alter, per quem fit divisio, *Divisor*; qui denique indicat, quoties divisor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLION.

70. *In multiplicatione & divisione opus non est, ut numeri dati sint homogenei, quemadmodum in additione & subtractione requirebatur (§. 61. 64). Cum enim in additione ex duobus vel pluribus numeris componatur unus, tanquam ex partibus totum (§. 61. 9); omnes omnino summandi ad eandem unitatem referri (§. 5. 10), consequenter homogenei inter se esse debent (§. 35). Quoniam vero porro liquet, summam, quæ fit ex numeris aggregandis, ad eandem cum ipsis unitatem referri, consequenter iisdem homogeneam esse (§. cit.); in subtractione vero numerus minuendus respondet summæ, subtrahendus & residuus aggregandis seu summandis (§. 61. 64): ulterius patet, in subtractione etiam minuendum, subtrahendum & residuum numeros inter se homogeneos esse debere. In multiplicatione contra multiplicator ad unitatem exprimit rationem, quam habet factum ad multiplicandum, sicut in divisione divisor ad unitatem rationem dividendi ad quotum, adeoque opus non est, ut multiplicator multiplicando & facto, divisor dividendo & quoto sit homogeneus. Quodsi divisor consideretur tanquam pars dividendi; ex dictis constat, divisorem esse dividendo homogeneum: sed tum quotus, qui indicat, quoties pars ista ex suo toto auferri potest, nec dividendo, nec divisori homogeneus. Singula suo loco clarius patebunt.*

HYPOTHESIS 11.

71. *Signum divisionis sunt duo puncta* (:), *quæ per* divisum *efferri solent*. E. gr. 8 : 4 denotat quotum ex divisione 8 per 4 emergentem. Similiter *a* : *b* est quotus ex divisione *a* per *b* prodiens.

DEFINITIO 30.

72. *Numerus par* est, qui bifariam sive per 2 dividi potest, ut 4, 12, 16.

DEFINITIO 31.

73. *Numerus impar* est, qui a pari unitate differt, ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO 32.

74. Numerus A *metiri*, vel juxta alios *numerare* dicitur numerum B, si eum ita dividit, ut quotus numerus sit integer sine fractione, vel si fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO 33.

75. *Numerus primus in se* est, quem sola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.

DEFINITIO 34.

76. *Numerus compositus* est, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO 35.

77. *Mensura numeri* est numerus, qui ipsum metitur. Ita 2 & 4 sunt mensuræ numeri 8. *Mensura maxima numeri* est numerus maximus, qui ipsum metitur. Ita 4 est mensura maxima numeri 8.

DEFINITIO 36.

78. *Mensura communis duorum pluriumve numerorum* est numerus, qui singulos sigillatim metitur. Ita 3 est communis mensura numerorum 12 & 24. *Maxima* dicitur, si fuerit numerus maximus, qui omnes metitur. Ita 12 est communis mensura maxima numerorum 12 & 24, 3 vero numerorum 9 & 12.

DE-

DEFINITIO 37.

79. *Numeri primi inter se* sunt, qui nullam communem mensuram habent, præter unitatem. Ita 12 & 19 sunt numeri primi inter se.

DEFINITIO 38.

80. *Numeri compositi inter se* sunt, qui præter unitatem, communem mensuram aliam habent. Ita 12 & 15 sunt compositi inter se.

AXIOMA 1.

81. *Idem est æquale sibimetipsi.*

SCHOLION.

82. *Hujus axiomatis amplissimus est in Analysi usus.*

AXIOMA 2.

83. *Quantitates homogeneæ aut æquales sunt, aut inæquales* (§. 15).

THEOREMA 1.

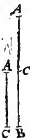
84. *Totum est majus qualibet sua parte.*

DEMONSTRATIO.

Cujus pars alteri toti æqualis est, id ipsum altero majus est (§. 20). Sed quælibet pars totius parti totius, hoc est, sibi ipsi æqualis est (§. 81). Ergo totum qualibet sua parte majus est.

SCHOLION.

85. *En exemplum Analyseos perfectæ! Continetur enim demonstratio syllogismo, cujus altera præmissa est definitio, altera vero propositio identica. Id vero Analyseos perfectæ indicium est* (§. 45 de Meth.). *Ne tirones Logicæ, qui propositiones oblique universales ignorant, nec regulæ Logicorum de tribus syllogismi terminis vim atque efficaciam percipiunt, circa formam argumentandi hæreant, ad lineas demonstrationem applicare libet.* Sit itaque linea AB totum, linea AC ejus pars; demonstrandum erit, lineam AB esse majorem linea AC: id quod fit sequentem in modum. Cujus lineæ pars alteri lineæ toti æqualis est, illa linea altera major est (§. 20). Sed lineæ AB pars (nempe AC) alteri lineæ AC toti (nempe sibimetipsi) æqualis est. Ergo linea AB linea AC major (nempe totum AB parte AC majus) est. Q. e. d.



THEOREMA 2.

86. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Cum idem sit æquale sibimetipsi (§. 81); quod idem est cum partibus totius simul sumtis, id iisdem æquale est. Sed totum idem est cum omnibus partibus suis simul sumtis (§. 9). Ergo iisdem æquale est. *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

87. *Quæ æqualia sunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia, ea sunt æqualia inter se.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A=C$ & $B=C$; dico esse $A=B$. Quoniam enim $B=C$ *per hypoth.* B salva quantitate substitui potest ipsi C (§. 15). Substituatur adeo B ipsi C in casu priore, ubi $A=C$: habebimus $A=B$. *Quod erat primum.*

2. Si jam porro sit $A=B$, & præterea $C=A$, $D=B$; dico esse $C=D$. Quoniam enim $A=B$ & $C=A$ *per hypoth.* erit $B=C$ *per cas.* 1. Quare cum porro sit $D=B$ *per hypoth.* erit quoque $C=D$ *per cas.* 1. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 4.

88. *Si æqualibus* (A & B) *æqualia* (C & D) *addas, aggregata* ($A+C$ & $B+D$) *sunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

$A+C=A+C$ (§. 81). Sed quoniam $C=D$ *per hypoth.* poterit D substitui pro C (§. 15): quo facto, habemus $A+C=A+D$. Porro $B+D=B+D$ (§. 81). Sed $A=B$ *per hypoth.* Ergo A substitui potest pro B (§. 15): quo facto, habemus $B+D=A+D$. Quare $B+D=A+C$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 5.

89. *Quod uno æqualium majus vel minus est, etiam altero æqualium majus vel minus est.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit A=B, & C > A, dico esse C > B. Quoniam enim C > A *per hypoth.* A parti ipsius C æquale est (§.20), quæ dicatur P. Porro cum sit A=B *per hypoth.* erit etiam P=B (§.87). Ergo C > B (§.20). *Quod erat unum.*

2. Sit A=B, & C < A, dico esse C < B. Quia C < A *per hypoth.* parti hujus æquale est (§.20), cujus complementum ad totum dicatur P. Cum adeo sit P+C=A (§. 86) & A=B *per hypoth.* erit quoque P+C=B (§. 87). Est itaque C parti ipsius B æqualis (§. 9), consequenter C < B (§.20). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 6.

90. *Si majori (B) & minori (A) idem (C) vel æqualia addas; aggregatum prius (B+C) majus est, posterius vero (A+C) minus. Quodsi majori (B) majus (C) & minori (A) minus (D) addas; aggregatum prius (B+C) majus est, posterius (A+D) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A < B *per hypoth.* parti hujus æquale est (§. 20). Componitur ergo B ex A & parte alia (§. 9), quæ dicatur P, estque adeo B=P+A (§. 86). Quare cum etiam sit B+C =P+A+C (§. 88); erit A+C pars ipsius P+A+C (§. 9), & hinc P+A +C > A+C (§. 84), consequenter B+C > A+C (§.89). *Quod erat unum.*

Quoniam B > A *per hypoth.* erit B+C > A+C *per demonstrata.* Similiter quia C > D *per hypoth.* erit A+C > A+D *per demonstrata.* Ergo cum A+D sit pars ipsius A+C (§. 20); erit multo magis B+C > A+D (§.84). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 7.

91. *Si æqualia (A & B) ab æqualibus (C & D) subtrahas; quæ relinquuntur (C—A & D—B) æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

C—A=C—A (§. 81). Sed quoniam A=B *per hypoth.* salva quantitate, B pro A substitui potest (§. 15). Quodsi ergo substituatur, habemus C—A=C—B. Similiter D—B=D —B (§. 81). Sed quia C=D *per hypoth.* salva quantitate, C pro D substitui potest (§. 15). Quodsi ergo substituatur, habebimus D—B=C—B. Quamobrem C—A=D—B (§. 87).

THEOREMA 8.

92. *Si a majore (A) & minore (B) idem (C) vel æqualia subtrahas; residuum prius (A—C) majus est, posterius (B—C) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quia B < A, parti hujus æquale est (§. 20). Componitur ergo A ex B & parte alia (§. 9), quæ dicatur P. Itaque A=B+P (§.86), consequenter A—C=P+B—C (§.91). Sed B—C est pars ipsius P+B—C (§. 9), consequenter P+B—C > B—C (§. 84). Ergo & A—C > B—C (§.89). *Q.e.d.*

THEOREMA 9.

93. *Si æqualia (A & B) per æqualia (m & n) multiplices; facta (mA & nB) æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quia A=B *per hypoth.* erit etiam A+A=B+B, seu in genere A+A +A+A

+A+A &c.B+B+B+B &c. (§.88). Jam cum multiplicatio fit iterata ejusdem numeri additio (§.67), si m & n fuerint multiplicatores; erit A+A+A+A &c. = mA (§. 62. 67), & B+B+B+B &c. = nB (*§.§.cit.*). Quare cum in eo casu, ubi A+A+A+A &c. = B+B+B+B &c. fit m = n; erit etiam mA = nB (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

94. *Si æqualia (A & B) per æqualia (C & D) dividas; quoti (A:C & B:D) æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

A:C = A:C (§. 81). Sed quia A = B *per hypoth.* salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15), & sic A:C = B:C. Ob eandem rationem B:D = B:C. Quare A:C = B:D (§. 87). *Q. e. d.*

SCHOLION.

95. *Non dubito fore multos, quibus ridiculum videbitur aut minimum superfluum talia demonstrari, quorum casus singulares in numeris præsertim rationalibus per se evidentes videntur. Ego vero has demonstrationes maximi facio, tum quia prima & secunda (id quod supra §. 85 annotavimus)* Analyseos perfectæ; *tum quia reliquæ* calculi universalis *ideam animo ingenerant, in talium substitutione consistentis, quæ relationes datas non mutant. Illa cavetur, ne laxius in demonstrando versemur (id quod hactenus fecerunt plerique omnes, qui extra Mathesin demonstrationes mathematicæ certitudinis dare conati sunt): hic, si eandem in apricum produceretur, maximum foret intellectus humani subsidium.*

CAPUT II.

De Speciebus Arithmeticæ in Numeris Integris.

PROBLEMA 1.

96. *Numeros quotcunque datos addere.*

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei sub homogeneis, hoc est, ita scribantur, ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c. respondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.
3. Sigillatim addantur unitates & summa earum ipsis subscribatur.
4. Quodsi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum vero summa sub decadibus collocanda.
5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum series continuata, habebitur summa quæsita.

E. gr. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: 4 & 3 sunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur 5 sub unitatibus, & 1 decas connumeretur decadibus datis. Itaque 1 (sc. *decas*) & 6 (*decades*) sunt 7 (*decades*), additis 2, prodeunt 9; additis porro 7, habentur 16 (*decades*). Collocentur 6 sub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc est, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (*centenarii*) 6 &, additis adhuc 5, prodeunt 11 (*centenarii*). Collocetur 1 sub centenariis datis, & 10 centenarii reliqui, hoc est, 1 millenarius addatur 3 *millenariis* datis, summaque 4 sub iis scribatur. Ita prodit summa quæsita 4165.

3578	A
524	B
63	C
4165	

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum, sint partes eorundem (§. 50); idem sunt cum omnibus numeris datis simul sumtis (§. 9). Liquet vero ex opera-

operatione, numerum inventum compositum esse ex omnibus unitatibus, decadibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compositus ergo est ex omnibus numeris datis simul sumtis, consequenter ipsis æqualis (§. 86), adeoque summa eorundem est (§. 61). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

97. *Unitates numerorum singulæ tamdiu per digitos repræsentantur & eorum ope additio absolvitur, donec memoriæ infigatur, quinam numerus prodeat, si unitates quotlibet cuicunque numero addas, e. gr. quod* $3 + 2 = 5$, $9 + 5 = 14$ *&c. Hoc modo talia natura docet.*

COROLLARIUM 1.

98. Quoniam seriei finisteriori tot unitates accedunt, quot decades ex summatione in proxime dexteriore emergunt (§. 96); additio minore tædio absolvetur, si ex qualibet numerorum serie tot decades deleantur, quot ex iis colligi possunt, residuum infra lineam scribatur, & numerus decadum abjectarum seriei proxime finisteriori connumeretur.

E. gr. Si numeri addendi fuerint A, B, C, ita procedendum: cum 7 & 3 sint 10; residuus numerus 5 scribatur infra lineam & 1 connumeretur decadibus. Dic itaque 6 & 4 sunt 10, 2 & 1 sunt 3. Scribe 3 infra lineam & 1 repone in locum centenariorum. Quoniam vero 7 & 2 sunt 9, porro 9 & 1 sunt 10; adde 1 seriei millenariorum & residuum 1 scribe in loco centenariorum. Dic itaque 8 & 2 sunt 10 millenarii seu 1 decas millenariorum, 5 & 1 vero sunt 6. Scribe 6 in loco millenariorum & 1 in loco decadum millenariorum.

8763	A
5247	B
2125	C
16135	

SCHOLION 2.

99. *Modus hic addendi est maxime naturalis (§. 49): nec absimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex serie nimirum speciei minoris toties colligitur valor speciei proxime majoris, quoties fieri potest, & pro unoquoque unitas reponitur in serie proxime majore.*

E. gr. sint expensæ

	thal.	gross.	num.
Januarii	45	16	9
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maii	55	15	6
erit summa	415	5	9

Cum enim 12 nummi conficiant grossum, in serie nummorum additis 6 & 6, itemque 3 & 9 valor grossi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur seriei grossorum. Similiter quoniam thalerus ex 24 grossis constat, in serie grossorum ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco grossorum reponuntur & 3 thaleris connumerantur. Reliqua ut in corollario aut problemate peraguntur.

COROLLARIUM 2.

100. Si omnes numeri dati unitatum instar considerentur, evidens est inter summandum tot novenarios omitti, quot unitates ex summa seriei dexterioris in finisteriorem transferuntur. Sic in exemplo problematis loco *quindecim* sub unitatibus scribimus 5, sub decadibus 1, quorum numerorum instar unitatum consideratorum summa est 6. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadum una rejicitur decas. Similiter si summa unitatum *viginti septem*; sub unitatibus collocamus 7, sub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decadei ex loco monadum in locum decadum rejiciuntur. Hinc solvitur

PROBLEMA 3.

101. *Examinare additionem, hoc est, explorare, utrum numerus inventus sit æqualis omnibus datis simul sumtis, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex serie qualibet dexteriore in proxime finisteriorem rejiciuntur, & operatione absoluta addantur, ut numerus novenariorum inter summandum omissorum innotescat (§. 100).
2. Abjiciatur præterea ex summa inventa novenarius, quoties fieri potest, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter summandum omissorum: quæ summa una cum numero residuo, si quis fuerit, probe notetur.
3. Tandem ex numeris summandis, qui omnes tanquam unitates spectantur, novenarius abjiciatur, quoties fieri potest, & numerus novenariorum abjectorum una cum nu-

mero residuo, si quis fuerit, denuo notetur.

Quodsi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis simul sumtis (§. 91), consequenter additio rite peracta (§. 61). *Q. e. i. & d.*

E. gr. in exemplo problematis inter summandum 3 novenarii omittuntur & ex summa reperta unus adhuc deleri potest: quo facto, relinquuntur 7. Sed si ex numeris summandis 4 novenarii abjiciantur, 7 similiter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLION.

102. *Discrimen inter demonstrationem & examen haud obscurum est. Illa evincit, per regulas præscriptas inveniri debere numerum quæsitum; hoc docet, regulas ad casum singularem rite fuisse applicatas. Unde apparet examinis utilitas, frustra obuitente* Ramo (a), *qui demonstrationem cum examine confundit. Vulgo præcipiunt, ut tam ex summa, quam aggregandis, notis singulis instar digitorum consideratis, abjiciatur novenarius, & ex residui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum examen tum fallere possit, quando error novenarium vel ejus multiplum adæquat; ideo aliquantisper idem immutavi, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia sunt examina, etsi non omnes errores detegant, modo iisdem sese non subducant, qui frequentius admittuntur.*

PROBLEMA 4.

103. *Numerum minorem e majore subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Numerus minor ea lege majori subscribatur, ut homogenei homogeneis respondeant, quemadmodum in additione præcepimus (§. 96).
2. Sub numeris hisce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur sigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & residua singula loco conveniente infra lineam scribantur, nempe residuum unitatum sub unitatibus, decadum sub decadibus &c.
4. Quod si nota major e minore veniat subtrahenda, ex sinisteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quæ (§. 50) hic 10 valebit, ut subtractio fieri queat. Numerus vero unitate mulctatus puncto notetur, ne ipsum mulctatum esse obliviscamur.
5. Si in loco sinisteriore cyphram reperiri contingat, unitas a numero proxime sequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipsum unitate minutum esse constet. Unitas vero illa in locum dexteriorem translata decadis valorem tuebitur (§. 50). Quamobrem ubi plures cyphræ sese insequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, a quo subtractio fieri debet, decade augeatur. Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore subtrahere licet.

E. g. Si ex	9̇8.0.0.4.0.3̇4.5̇9
subtrahas	47438652 63
Differentia est	50565381 96

Demtis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates infra lineam scribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco conveniente ponendæ. Centenarii 2 ex 3 subducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde si 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi 9 decades millenariorum. Subductis jam 5 ex 13, residui fiunt millenarii 8. Demtis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam si 8 ex 3 subtrahere debes, ab 8 sinisterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem subtractio facillime absolvatur.

DE-

(a) In Schol. Mathem. lib. 4. p. 114.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, si unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris subducas *vi operationis*, hoc est, si singulas partes numeri minoris a singulis partibus majoris subtrahas (§. 50). Sed singulæ partes numeri minoris simul sumtæ sunt numero minori, & partes singulæ majoris simul sumtæ sunt majori æquales (§. 86). Ergo idem relinqui debet numerus, si totum numerum minorem e toto majore subtrahas (§. 91). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

104. *Si numeri heterogenei fuerint a se invicem subtrahendi; unitas mutuo petita non 10, sed tot unitates valet, quot unitates speciei minoris constituunt valorem unitatis speciei majoris.*

E. gr.	45. thal.	16. gr.	6 num.
	27	23	9
	17 thal.	16 gr.	9 num.

Nimirum cum 9 nummi ex 6 subtrahi nequeant, ex 16 grossis unus convertitur in 12 nummos, ut loco 6 habeantur 18. Subductis adeo 9 nummis ex 18, relinquuntur 9. Similiter cum 23 grossi ex residuis 15 auferri nequeant; ex 45 thaleris unus ablatus in 24 grossos convertitur: unde si subtrahantur 23, residuus est 1 grossus, 15 addendus, ut residui loco ponantur 16 grossi. Denique 27 thaleri a 44 ablati relinquunt 17.

SCHOLION 2.

105. *Quodsi numerus major e minore subtrahi jubeatur, evidens est id fieri non posse. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur signo —. E. gr. Si quis 8 thaleros solvere debet, atque 3 nonnisi possidet: tribus solutis 5 adhuc debet, qui per —5 indigitantur.*

PROBLEMA 5.

106. *Examinare subtractionem.*

RESOLUTIO.

Residuo addatur subtrahendus (§. 96). Quodsi enim summa fuerit æqualis minuendo; subtractio rite peracta (§. 64).

E. gr.	9800403459	Minuendus.
	4743865263	Subtrahendus.
	5056538196	Differentia.
	9800403459	

ALITER:

Quoniam in subtractione residuum cum subtrahendo æquatur minuendo (§. 64). Si minuendus sumatur pro aggregato, residuum cum subtrahendo pro aggregandis (§. 61); examen per novenarium succedet ut in additione (§. 101).

PROBLEMA 6.

107. *Examinare additionem per subtractionem.*

1. Describantur in continua serie multipla septenarii centenario inferiora, nempe 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, continua septenarii additione invenienda. Est enim 7+7=14, 14+7=21 &c.
2. In exemplo ad examinandum proposito, veluti

   566
   8259
   526
   2687
   ——
   3425
   10946

   sumantur in aggregato binæ notæ sinistimæ 10 & cum multiplis septenarii conferantur.
3. Multiplum proxime inferius, aut ipse septenarius, veluti in nostro casu, ab istis notis subtrahatur & residuum 3 iisdem superscribatur.
4. Juncta huic residuo 3 nota proxime sequente 9, numerus inde resultans 39 conferatur ut ante cum septenarii multiplis &, proxime minori

nori 35 inde ſubducto, reſiduum 4 ſupraſcribatur.

5. Hæc operatio continuetur, donec reſiduum ultimum 5 ſuper nota dextima obtineatur.
6. Singulæ aggregandorum ſeries 2687 & 8259 eodem modo tractentur.
7. Reſidua ſuper notis dextimis 6 & 6 addantur & a ſumma 12 ſeptenarius vel ejus multiplum proxime inferius abjiciatur.

Quodſi reſiduum fuerit idem cum reſiduo ſuper nota dextima aggregati, velut in noſtro exemplo 5; operatio rite peracta.

DEMONSTRATIO.

Ad operationem attento manifeſtum eſt, tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla ſeptupli, e.gr. in noſtro caſu millenariorum, centenariorum, decadum, unitatum. Jam cum aggregatum ſit aggregandis æquale (§. 61), omnia quoque iſta multipla junctim ſumta utrobique æqualia eſſe debent (§. 86. 87). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; reſidua omnino æqualia ſint neceſſe eſt (§. 91). Quare ſi contingat, inæqualia reſidua fieri; id indicio erit, ſi examen rite inſtitutum, errorem in operatione admiſſum fuiſſe. *Q. e. d.*

ALITER.

1. Colligantur ſigillatim in unam ſummam ſingulæ ſeries verticales, ex quibus conſtant numeri ſummandi, initio facto a ſiniſtra & progrediendo verſus dextram, & quidem deſcendendo (§. 96).
2. Summæ partiales ſubtrahantur a notis ſummæ, quæ ſingulis ſeriebus reſpondent (§. 103).

Quodſi in loco dextimo, qui eſt unitatum, relinquatur cyphra, additio rite peracta.

E. gr. Sit exemplum additionis

```
 ABCD
 3579
 8462
 5376
------
17417
 1210
```

Collectis in unam ſummam notis in ſerie A, 16 ſubducatur ex 17 & reſidua 1 ſcribatur ſub 7. Similiter ſumma notarum in ſerie B 12 auferatur ex 14, reſiduo 2 ſub 4 ſcripto. Summa notarum in ſerie C 20 tollatur ex 21 & reſidua 1 ponatur ſub 1. Denique ſi ſumma ſeriei D 17 ex 17 ſubtrahatur, relinquitur 0: quod indicio eſt, numerum 17417 eſſe ſummam quæſitam.

DEMONSTRATIO.

Ex operatione patet, a millenariis ſummæ ſubtrahi omnes millenarios ſummandorum, & a centenariis, decadibus, unitatibus ſummæ omnes centenarios, decades, unitates ſummandorum. Quodſi ergo operatione abſoluta nihil relinquitur, ſumma tot præciſe millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri ſummandi ſimul ſumti continent, atque adeo ſumma numeris ſummandis ſimul ſumtis æqualis eſt (§. 87), conſequenter additio rite peracta (§. 61).

SCHOLION.

108. *Examen primum adhuc procedere, ſi loco ſeptenarii numerus alius ſummatur, ipſa demonſtratio inſinuat. Solent etiam examinis loco additionem iterare, ſed diverſa ratione, ita ut una vice aſcendendo, altera vero deſcendendo ſummatio perficiatur, facto tamen in utraque operatione initio a dextera & progrediendo verſus ſiniſtram.*

PROBLEMA 7.

109. *Abacum Pythagoricum, hoc eſt, Tabulam conſtruere, in qua facta ex ſingulis digitis in ſingulos repræſentantur.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus singula in novem partes æquales dividantur & per lineas ipsis parallelas in areolas quadratas area ejus resolvatur.
2. In serie horizontali summa & laterali sinistima scribantur novem notæ numericæ, seu singuli digiti.
3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 scribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur sub 4. Addantur 2 & 6; aggregatum 8 ponatur sub 6, & ita porro.
4. Quod si hæc additio per reliquos digitos eadem lege continuetur, Abacus Pythagoricus construetur. *Q. e. f.*

ABACUS PYTHAGORICUS.								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLION.

110. *Abacum Pythagoricum memoriæ mandare tenetur multiplicationem ac divisionem expedite absoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non est, ad manus esse debet, quoties multiplicas aut dividis.*

PROBLEMA 8.

111. ***Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.***

RESOLUTIO.

1. Multiplicator scribatur sub multiplicando, ut in additione (§. 96).
2. Ducatur sub iis linea recta.
3. Infra hanc ex abaco Pythagorico scribantur singula producta ex singulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris, similiter ex illis in reliquas hujus notas, ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime sinisteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. scribere incipiamus.
4. Producta partialia addantur (§. 96). Dico aggregatum esse factum quæsitum.

E. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore sub multiplicando scripto, duc 5 in 6, cumque factum vi abaci Pythagorici sit 30, scribe 0 sub 5 & 3 decades annumera facto ex 5 in 7, quod est 35. Additis itaque 3 ad 35, prodeunt 38. Pone 8 juxta 0 versus sinistram & facto ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (scilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annumera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur summa 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & summam 19 in loco conveniente repone. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quod si eadem ratione quæratur factum ex multiplicando in sinistram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

```
  38476
     35
 ------
 192380
 115428
 ------
1346660
```

DEMONSTRATIO.

Vi operationis & abaci Pythagorici primus numerus intra lineas scriptus singulas multiplicandi notas, hoc est, singulas ejusdem partes (§. 50), adeoque multiplicandum ipsum (§. 9), toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus secundus intra lineas scriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota secunda multi-

multiplicantis unitatem &c. Sed cum numeri intra lineas ſcripti adduntur, ſumma iiſdem æqualis eſt(§.61), adeoque multiplicandum toties continet, quoties ſingulæ multiplicatoris notæ, hoc eſt, partes (§.50), conſequenter totus multiplicator(§.9) unitatem continet. Eſt igitur factum ex multiplicando in multiplicantem(§.66). *Q.e.d.*

SCHOLION.

112. *Si factoribus* cyphræ *adhæreant, producto invento eædem adjunguntur, ut ex ſequentibus exemplis manifeſtum.*

3578	4760
30	2000
107340	9520000

PROBLEMA 9.

113. ***Lamellas Neperianas parare, quarum ope multiplicationem ac diviſionem facilius abſolvere licet, quam per Abacum Pythagoricum.***

RESOLUTIO.

1. Ex orichalco, ligno, aut charta compacta parentur lamellæ oblongæ in novem quadratula diviſæ, quæ per diagonales denuo in duo triangula ſingula reſolvantur.
2. In illis quadratulis ea lege ſcribatur tabula Pythagorica, ut notæ ſolitariæ aut dextræ triangulum dextrum, notæ autem ſiniſtræ ſiniſtrum cedat. *Sic factum eſt, quod petebatur.*

SCHOLION.

114. *Has lamellas ſub initium ſeculi ſuperioris invenit* Joannes Neperus, *Baro Merchiſtonii, Scotus, & peculiari libello deſcripſit, cui* Rhabdologiæ *nomen impoſuit.*

PROBLEMA 10.

115. ***Multiplicare numerum datum per datum alium lamellarum Neperianarum ope.***

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.
2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.
3. In hac quære dextimam multiplicatoris notam, &
4. Ipſi reſpondentes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exſcribe, ut in unam ſummam colligantur numeri in eodem rhombo obvii.
5. Eodem modo exſcribe numeros reliquis multiplicatoris notis reſpondentes & decenter infra factores (§.111) ſcribe.
6. Tandem, ut ante (§.111), facta hæc partialia in unam ſummam collige. *Sic f. e. q. p.*

E. gr. Sit multiplicandus 5978, multiplicator 937; ex triangulo dextimo, quod dextimæ multiplicatoris notæ 7 reſpondet, exſcribe 6 & pone infra lineam. Mox in rhombo verſus ſiniſtram proxime ſequente 9 & 5 adde & ſummæ 14 notam dextram ſcribe juxta 6, ſed 1 connumera 3 & 4 in rhombo ulteriore obviis. Aggregatum 8 junge jam inventis 46. Similiter in rhombo ultimo adde 6 & 5. Summæ 11 notam dextram 1 pone, ut ante, infra lineam; ſiniſtram vero itidem 1 adde notæ 3 in ſiniſtro triangulo deprehenſæ. Summam 4 ſi 1846 a ſiniſtris jungas; habebis factum ex 7 in 5978. Eodem modo

5978
937
41846
17934
53802
5601386

modo reperies facta ex 5978 in reliquas multiplicatoris notas 3 & 9.

PROBLEMA II.

116. *Numerum quemlibet per alium quemcunque sine abaci Pythagorici subsidio multiplicare.*

RESOLUTIO.

Omne artificium huc redit, ut ex simplo, duplo & decuplo per additionem, subtractionem & mediationem singula multipla inveniantur. Nimirum numerus quilibet sibimetipsi additus producit sui *duplum*.. Addatur huic simplum, summa est numeri dati *triplum*. Duplum addatur sibimetipsi, aggregatum est numeri dati *quadruplum*. Medietur decuplum, hoc est, ipse numerus datus cyphra auctus (§.112), prodibit *quintuplum*. Quintuplo addatur simplum vel duplum, habebitur *sextuplum* vel *septuplum*. Ex decuplo subtrahatur duplum vel simplum, residuum erit *octuplum* vel *noncuplum*. Sine abaci itaque Pythagorici subsidio multiplicaturo familiaris sit sequens a *Jobo Ludolffo*, in Academia Erfordiensi nuper Mathematum Professore, in Arithmeticam primum introducta

NOMENCLATURA.

1. Simplum.	1. *Simplum.*
2. Duplum.	1 + 1 *Simplum & simplum.*
3. Triplum.	2 + 1 *Duplum & simplum.*
4. Quadruplum.	2 + 2 *Dupli duplum.*
5. Quintuplum.	$\frac{10}{2}$ *Decupli dimidium.*
6. Sextuplum.	$\frac{10}{2}$ + 1 *Decupli dimidium & simplum.*
7. Septuplum.	$\frac{10}{2}$ + 2 *Decupli dimidium & duplum.*
8. Octuplum.	10 — 2 *Decuplum sine duplo.*
9. Noncuplum.	10 — 1 *Decuplum sine simplo.*

E. gr. 3894.

Simplum	Duplum	Triplum
3894	3894 3894	3894 7788
	7788	11682
Quadruplum	Quintuplum	Sextuplum
7788 7788	38940	3894 19470
15576	19470	23364
Septuplum	Octuplum	Noncuplum
7788 19470	389.4.0 7788	389.4.0 3894
27258	31152	35046

Si multiplicator ex pluribus notis constet, infra lineam scribatur multiplicandi duplum & decupli dimidium, ut beneficio *Nomenclaturæ* exinde multipla ejus erui possint, quæ desiderantur. Subducta igitur altera linea scribantur more consueto (§.111) multiplicandi multipla.

37896 A	
(6874)	
75792 B	
189480 C	
151584 D	
265272 E	
303168 F	
227376 G	
260497104	

E. gr. Sit multiplicans 6874, multiplicandus A 37896. Infra lineam scribatur B ipsius A duplum & porro C decupli ipsius A dimidium. Reperies ergo 1°. D ipsius A quadruplum sumendo duplum ipsius B; 2°. E septuplum ipsius A addendo B & C; 3°. F octuplum ipsius A, vel addendo C, B & A, vel B subducendo a decuplo ipsius A, hoc est ex A cyphra aucto; 4°. denique G sextuplum ipsius A, addendo C & A.

Si multiplicator ex pluribus notis constet, sæpius ex productis jam inventis per additionem vel subtractionem inveniri possunt, quæ adhuc desiderantur, nec tum *Nomenclaturæ* pro-

propositæ ſtricte inhærendum, ita ut non opus ſit infra lineam demum ſcribi duplum multiplicandi & decupli ejuſdem dimidium.

E. gr. ſit multiplicans 743. Factum facillime invenietur, ſi multiplicando ſubſcribatur 1°. duplum, 2°. dupli duplum, 3°. ſumma ex ſimplo, duplo & dupli duplo, & tria hæc multipla multiplicando addantur.

```
743) 895765482
     ---------
    1791530964
    3583061928
    6270158374
   ------------
   665553753126
```

Similiter ſi multiplicans fuerit 789, ſub multiplicando ſcribitur decuplum ſine ſimplo, quod eſt noncuplum. Ex eo ſi denuo auferatur ſimplum, relinquetur octuplum. Quodſi & ab hoc ſimplum ſubducas, reſiduum erit ſeptuplum.

```
789) 8 9.5 7.6.5.4 8 2
     -----------------
     8.0.6.1 8 8 9.3.3 8
    7.1.6 6.1.2 3 8.5 6
    6 2 7 0 3 5 8 3 7 4
   ---------------------
   7 0 6 7 5 8 9 6 5 2 9 8
```

P R O B L E M A 12.

117. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

R E S O L U T I O.

Caſus I. Si diviſor unica fuerit nota.

1. Scribatur is ſub nota dividendi ſiniſtima, aut, ſi ea minor fuerit, ſub proxime ſequente, ac ope *abaci Pythagorici* inveſtigetur, quoties in nota vel notis ſupraſcriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram verſus poſt lunulam loco quoti.
2. Quotus ducatur in diviſorem & productum ex nota vel notis ſupraſcriptis dividendi ſubtrahatur, & his deletis, ſi quod fuerit reſiduum, ſupraſcribatur.
3. Diviſor ad notam ſubſequentem verſus dexteram promoveatur, & ope *abaci Pythagorici* denuo inveſtigetur, quoties is in notis ſupraſcriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.
4. Quodſi hæc operatio per ſingulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 3. Ponantur 3 ſub 7 & per *abacum Pythagoricum* innoteſcit, 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 poſt lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3, hoc eſt, 6 ſubtrahatur ex 7 lineola tranſverſa delendis, reſidua unitas ſupraſcribatur. Promoveatur diviſor 3 ſub 8, cumque vi *abaci Pythagorici* 3 in 18 ſexies contineatur, ſcribantur 6 loco quoti & factum 18 ex 3 in 6 ex 18 ſubducatur: quo in caſu nihil relinquitur. Quodſi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618 & binarius 2 remanet: id quod indicio eſt, numerum propoſitum in tres partes æquales exacte dividi non poſſe.

```
1  12
7856 ( 2618 2/3
3333
```

D E M O N S T R A T I O.

Ex ipſa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties diviſor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc eſt, in ſingulis ejus partibus (§. 50), adeoque in toto dividendo (§. 9) contineatur, conſequenter unitatem toties continet, quoties dividendus diviſorem. Eſt igitur quotus (§. 69). *Q. e. d.*

Caſus II. Si diviſor ex notis pluribus conſtet.

1. Siniſtima ejus nota ſcribatur ſub nota ſiniſtima dividendi, & reliquæ dexteriores ſub proxime ſequentibus verſus dexteram.
2. Ope *abaci Pythagorici* inveſtigetur, quoties prima diviſoris nota in prima dividendi contineatur.
3. Numerus inventus ducatur in diviſorem integrum & diſpiciatur, utrum factum ex numeris ſupraſcriptis ſubtrahi poſſit, nec ne.
4. Si ſubtractio fieri queat, ſcribatur is loco quoti poſt lunulam & ſubtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus ſubtractio fit, lineola tranſverſa deleantur, & qui reſidui fuerint, ſupraſcribantur. Quodſi vero

vero subtractio non succedat; loco quoti sumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum ex eo in divisorem ad notas dividendi quam proxime accedat & ex iis auferri queat.

5. Divisor loco uno versus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.

6. Hæc operatio continuetur, donec divisor ulterius promoveri nequeat. *Sic f. e. q. p.*

E. gr. Sit dividendus 7856, divisor 32. Scribantur 32 sub 78 & inquiratur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in eo contineantur, ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 subtrahi potest, 2 scribantur post lunulam &, subtractione peracta residuisque 14 suprascriptis, divisor loco uno promoveatur.

7856 ($245\frac{16}{32}$

Quo facto investigetur, quoties 3 in 14 contineantur & factum ex 4 in 32, hoc est 128, subducatur ex 145, residuo 17 suprascripto & 4 in loco quoti post lunulam repositis. Promoveatur divisor denuo loco uno & quæratur, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in divisorem 32, nempe 160 subtrahatur ex 176, residuo 16 ut ante suprascripto. Dico numerum inventum $245\frac{16}{32}$ esse quotum quæsitum.

Si divisor ex pluribus præsertim constet notis, præstat multipla quoti subtrahenda sub notis dividendi, ex quibus subtractio fieri debet, immediate scribi, & sub subtrahendo residuum, cui continuandæ divisionis gratia jungitur nota dividendi sequens, donec nulla superfuerit, adeoque divisio absoluta.

E. gr. Sit dividendus 385797, divisor 8672, quem tibi sub loco quoti notabis. Jam cum 8 in 38 quater contineatur, scribe divisoris 8672 quadruplum sub notis dividendi 38579, & residuum 3891 sub eodem, juncta eidem nota sequente 7, ut divisio continuari possit. Quoniam itaque divisor in notis 38917 denuo quater continetur, quadruplum divisoris ut ante sub iisdem ponitur & ex ipsis aufertur. Erit $44\frac{4229}{8672}$ quotus.

385797 (44 / 8672
34688
38917
34688
4229

DEMONSTRATIO:

Eadem fere est demonstratio, quæ in casu primo, hoc unice notato, quod, cum ex *abaco Pythagorico* constare nequeat, quoties divisor integer in notis dividendi suprascriptis contineatur, interea supponatur, toties illum in his contineri, quoties sinistima divisoris nota continetur in sinistima aut duabus sinistimis dividendi notis. Licet enim hæc suppositio subinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox instituitur, cum factum ex divisore in quotum, juxta eam inventum, cum dividendo comparatur, & pseudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

SCHOLION:

118. *Equidem hæc methodus tædiosa videtur, quod raro verus quotus prima statim vice per eam eliciatur. Enimvero experientia comprobatur, examen, quod instituendum, cogitationum celeritati parere in exercitatis.*

PROBLEMA 13.

119. *Divisionem per lamellas Neperianas absolvere.*

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita dispone, ut in fronte referant divisorem.
2. Eis ad sinistram junge lamellam unitatum.
3. Sub divisore descende, donec occurrant notæ dividendi, in quibus quoties contineatur, disquiritur, aut numerus ipsis pro-

proxime minor ex dividendo subtrahendus.

4. Numerus in lamella unitatum respondens scribatur loco quoti.

5. Quodsi eadem ratione partes quoti reliquas investiges, divisio tota absolvetur.

E. gr. Sit dividendus 5601386, divisor 5978. Quoniam quæritur, quoties in 56013 contineantur 5978; sub divisore descendendo in infima serie reperitur numerus 53802 quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc subtrahitur & in lamella unitatum respondens 9 loco quoti scribitur. Residuo 2211 jungitur nota dividendi sequens 8, cumque ut ante per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipsi in lamella unitatum respondens 3 scribatur loco quoti, & subtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

```
56.01386(937
53802..
-----------
 2.2.1.18.
 17934.
----------
  41846
  41846
----------
  00000
```

PROBLEMA 14.

120. *Sine abaci Pythagorici subsidio numerum datum dividere per alium datum.*

RESOLUTIO.

1. Dividendo ad dexteram more consueto jungatur lunula, & infra locum quoti ducatur linea recta.

2. Infra hanc lineam scribatur divisor, ejus duplum & decupli dimidium sive quintuplum: quibus numeris a dextris 1, 2 & 5 adscribi oportet. Inde nimirum quodcunque divisoris multiplum (§. 116) elicitur.

3. Tot dividendi notæ, quot divisor habuerit, comparentur cum hujus multiplis modo inventis: ita enim quotus innotescet.

4. Is more solito post lunulam scribatur, ipsi vero respondens multiplum divisoris sub notis dividendi, quas modo diximus, atque ex his subducatur.

5. Residuo adjungatur nota dividendi proxime sequens: reliqua ut ante peragantur.

Quodsi hæc operatio continuetur, sine *abaci Pythagorici* subsidio quotus eruetur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 385724615, divisor 175. Scribantur numeri dati cum divisoris multiplis, ut hic factum esse appareret. Cum multiplis divisoris compara 385, & quoniam illius duplum 350 quam proxime convenit, scribe 2 loco quoti & 350 subduc ex 385. Residuo 35 junge notam dividendi proxime sequentem 7 & 357 denuo compara cum divisoris multiplis. Quoniam vero denuo duplum 350 quam proxime accedit, idem ex 357 subtrahe & quoti loco rursus scribe 2. Residuo 7 junge notam subsequentem 2. Quia dividendus 72 est divisore 175 minor, quotus erit 0. Junge numero 72 notam dividendi 4, & cum 724 inter duplum 350 atque quintuplum 875 cadant, ipsisque dupli duplum, hoc est quadruplum divisoris 700 quam proxime conveniat, quotus erit hoc in casu 4. Quodsi hac ratione operationem continuare libuerit, reperietur quotus integer 2204140 & residuum erit 115.

```
385724615 (2204140
350          ----------
---             175 | 1
 357            350 | 2
 350            875 | 5
 ----
   724
  .700
  ----
    2.46
    175
    ----
     711
     700
     ----
     115
```

SCHOLION.

121. *Hac dividendi methodus & meditandi difficultatem & errandi facilitatem tollit, cui obnoxia est altera in problemate duodecimo exposita. Quamvis igitur eam serio commendem, nolim tamen ut abacus Pythagoricus prorsus rejiciatur, quoniam subinde casus occurrunt, in quibus eodem minus commode caremus. Fractionum reductio ad minores terminos inter alia assertum nostrum confirmabit.*

PROBLEMA 15.

122. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum

factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, si multiplicatio rite fuerit peracta.

```
38476)1346660(35
      115428
      ------
      192380
      192380
      ------
      000000
```

E. gr. Si multiplicandus 38476, multiplicator 35; factum est 1346660 (§. 111). Si vero 1346660 per 38476 dividas, quotus est 35.

ALITER:

1. Abjiciatur ex multiplicando 857 novenarius, quoties fieri potest.
2. Residuum 2 ducatur in multiplicatorem 4, si novenario minor fuerit, & ex facto, ubi novenarium superaverit, abjiciatur itidem novenarius, quoties fieri potest, noteturque residuum.
3. Ex facto 3428 exterminetur etiam novenarius, quoties datur.

Quodsi residuum 8 idem fuerit cum facto anteriore, aut ejus residuo; operatio rite peracta.

4. Si multiplicator fuerit novenario major, residuum in multiplicando ducatur non in ipsum multiplicatorem, sed in id, quod abjectis novenariis relinquitur.

```
  857
   65
-----
 4285
5142
-----
55705
```

E. gr. Si multiplicandus 857, multiplicator 65; factum erit 55705. Abjectis novenariis, in facto relinquitur 4, in multiplicando 2, in multiplicatore itidem 2: quorum residuorum factum cum sit 4, id indicio est multiplicationem rite fuisse peractam.

DEMONSTRATIO.

Cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§. 67), & factum quidem summæ, multiplicandus toties iteratus, quot multiplicator unitates habet, numeris aggregandis respondeat (§. 61. 66); ex facto & multiplicando iterato abjiciendus est novenarius, quoties fieri potest (§. 101). Quoniam itaque novenario ex multiplicando abjecto, quoties datur, residuum toties relinquitur, quot multiplicator unitates habet; evidens est, istud in multiplicatorem duci, atque ex facto novenarium denuo exterminari debere, quoties licet, ut habeatur residuum numeris aggregandis respondens. *Quod erat unum.*

Quoniam vero perinde est, sive residuum in multiplicatorem, sive multiplicator in residuum ducatur, quemadmodum inferius (§. 207) independenter ab his demonstrabitur; per primum patet, etiam ex multiplicatore, si novenario major fuerit, novenarium toties exterminari debere, quoties fieri potest, & residuum hoc ducendum esse in residuum ex multiplicando, ut habeatur residuum numeris aggregandis respondens. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

123. *Demonstratio majorem evidentiam nanciscitur, ubi ad exemplum applicatur: id quod etiam de quacunque alia intelligendum.*

PROBLEMA 16.

124. *Examinare divisionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in divisorem, aut divisor in quotum.
2. Facto addatur, si quod a divisione fuerit residuum.

Quodsi hac ratione prodeat dividendus, divisio legitime peracta (§. 212).

```
 245
  32
----
 490
735
----
7840
  16
----
7856
```

E. gr. Si 7856 dividas per 32, quotus est 245, residuum 16. Duc 245 in 32 & facto 7840 adde 16; habebis dividendum 7856. Constat igitur divisionem legitime fuisse peractam.

Aliter.

Cum vi examinis prioris dividendus sit factum ex divisore in quotum; examen quoque instituetur, abjiciendo ex dividendo, itidemque ex divisore & quoto novenarium, quoties datur, atque residuum in divisore multiplicando per residuum in quoto, & facto, quod inde emergit, addendo residuum ex divisione (§. 122).

E. gr. In exemplo antecedente exterminato in dividendo 7856 novenario, relinquitur 8. Idem si tentetur in divisore 32 & quoto 245; ibi 5, hic 2 residuum erit. Quodsi ulterius facto 10 ex 5 in 2 addatur residuum ex divisione 16, & ex aggregato 26 tentetur more communi abjectio novenarii; habebitur ut in dividendo residuum 8.

Scholion Generale.

125. *Superest ut videamus, juxta quasnam regulas intellectus in hactenus expositis operationibus arithmeticis dirigatur. Meditaturi regulas duplicis generis offendemus, quarum aliæ imaginationem, aliæ intellectum purum dirigunt. Priores in numerorum scriptione, linearum ac lunulæ ductu, notarum in divisione a subtractione peracta deletione &c. continentur. Scriptio numerorum varias suppeditat regulas, quibus vires imaginationis extenduntur. Numeros enim quosvis, quantumvis magnos & una varios, menti præsentes exhibet, quamdiu libuerit, qui alias disparent, cum vix eam subierint: quo ipso cogitationes a meditationibus alienæ arcentur, domesticæ autem quantolibet temporis intervallo in nota qualibet numerorum datorum defiguntur. Hinc discimus*

1. Intellectum uti debere in meditando subsidiis imaginationis, objecto meditationis convenientibus, ex ejus adeo indole in dato quolibet casu particulari derivandis.
2. Quæ intellectus meditatur, ea, quantum fieri potest, imaginationi præsentia sistenda esse: quod observasse in tironibus quoque instituendis plurimum prodest, cum ad disciplinas animum appellentes operationibus intellectus puri parum sint adsueti, operationes vero imaginationis a primis (quod Græci ajunt) unguiculis familiarissimæ ipsis existant.

Ipsa vero hæc numerorum scriptio præstat, ut intellectus tum singula sigillatim meditari, tum singula cum singulis, prout commodum visum fuerit, conferre possit. Vide inprimis cor. 1. probl. 2 (§. 98), probl. 4 (§. 103), probl. 11 (§. 116), & probl. 14 (§. 120). Utrumque difficultates partim ex rerum meditandarum serie nimis longa enasci solitas, partim ordini, quo cogitationes promoventur, parum convenienti debitas tollit. Unde liquet

3. Ad minuendam in meditando difficultatem singula distincte imaginationi repræsentanda esse, ita ut objectum meditationis repræsentetur secundum omnes relationes datas, & tota totius repræsentatio ex partialibus singularum relationum componatur. Hanc regulam in *Arte characteristica* perficienda magni momenti esse, inferius in Analysi patebit. Eadem secunda juncta tironum institutioni egregia suppeditat adjumenta. Inservit etiam confusæ cognitioni eorum, quæ sigillatim distincte cognita fuerunt: cujus usum demonstrationes Geometricæ inferius concipiendæ loquentur.

Linearum & lunulæ ductus, notarum deletio, puncti in notis unitate mulctatis adjectum impediunt, ne eadem pro diversis, aut diversa pro iisdem habentes in errorem incidamus: quo ipso docemur

4. Quæ sunt eadem in intellectu, ut eadem repræsentari debere imaginationi; quæ vero diversa sunt in intellectu, ut diversa quoque repræsentanda esse. Sunt eadem in intellectu, quæ sub notione communi continentur. Hæc vero regula errori potissimum discavet.

Progrediendum nunc ad alterum regularum genus, quibus intellectus purus juvatur. Numeri dati distinguuntur in varias classes, nempe in unitates, decades, centenarios &c. & in hisce classibus singuli numeri singulis characteribus discernuntur. Satisfit igitur huic regulæ generali:

1. Quæstio proposita in tot partes resolvenda, quot res diversæ naturæ in eadem involvuntur.

Additio & subtractio in singulis numerorum classibus sigillatim peragitur: nec minus in multiplicatione ac divisione facta & quotl particularia quæruntur, ut inde componatur numerus quæsitus. Discimus adeo

2. Singula, quæ in quæstione proposita involvuntur, esse sigillatim expendenda, &, quæ inde deducta sunt, inter se conferenda.

In operationibus arithmeticis vel ad notiones numerorum respicimus, vel eorum proprietates, e. gr. ex abaco Pythagorico in memoriam nobis revocamus. Unde patet,

3. Dum singula in se considerantur, vel notiones eorundem evolvendas, vel proprietates & relationes ad alia alio tempore cognitas in memoriam revocandas esse.

Si divisor ex pluribus notis constet, ad facilitandum laborem assumitur, integrum divisorem in omnibus dividendi notis suprascriptis toties contineri, quoties nota divisoris prima in nota dividendi continetur. Sed cum hypothesis fallere queat, utrum quotus inventus sit verus nec ne, examinatur. In his vero continetur regula generalis hujusmodi:

4. Si datorum numerus de re eadem sit ingens, e. gr. si in Astronomia multa admodum phænomena motus siderum dentur, qualis esse debeat

rei

rei natura, e. gr. structura systematis mundani, ut quibusdam phænomenis satisfiat, primo investigandum; dein ulterius disquirendum, utrum phænomenis quoque reliquis satisfiat nec ne. Ita si contingat, nos in hypothesin falsam incidere; eam facilius emendare, quam ex simultanea omnium consideratione prima statim vice veram elicere, licebit. Hæc regula in scientia naturali multum habet usum non minus in inveniendo, quam in aliorum hypothesibus dijudicandis.

Licet abunde constet per demonstrationes, regularum, quibus utimur, ope numerum quæsitum inveniri; examina tamen non negliguntur, quibus convincimur nos in regularum applicatione non aberrasse. Docemur ergo

5. Consultum esse, ut dispiciamus, an veritates a priori deductæ experientiæ respondeant.

Plura non addimus, cum hæc speciminis tantum loco in medium proferantur.

CAPUT III.

De Ratione ac Proportione Quantitatum.

DEFINITIO 39.

126. *Ratio* est ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, sine tertio homogeneo assumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini rationis*, & in specie *antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *consequens* vero, ad quem alter refertur.

SCHOLION 1.

127. Euclides *rationem definit per* habitudinem magnitudinum ejusdem generis secundum quantitatem. *Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ sunt constantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis est sinus recti ad sinum complementi in Trigonometria. Completam reddidit vir summus* Leibnitius. *Equidem &* Hobbesius *definitionis Euclideæ correctionem tentavit* (a); *sed infeliciter. Cum enim rationem definiat per* magnitudinis ad magnitudinem relationem; *definitio ejus non modo id vitii habet, quod Euclidea, quod scilicet relationis speciem non determinet; verum etiam in eo peccat, quod speciem magnitudinum non exprimat, quæ rationem inter se habere possunt.*

SCHOLION 2.

128. *Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commensurabilia, sed etiam ad incommensurabilia, hoc est, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.*

COROLLARIUM 1.

129. Cum in fractionibus relatio numeratoris ad denominatorem sine tertio homogeneo assumto intelligatur (§. 59); erit ea ratio.

COROLLARIUM 2.

130. Si duæ quantitates inter se comparantur sine tertia homogenea assumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 83). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM 3.

131. Si termini rationis fuerint inæquales, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 21); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 20). Ratio itaque determinat, quoties minus in majore continetur, vel quoties majus minus contineat, hoc est, quantæ majoris parti minus æquetur: id quod divisio prodit (§. 69).

COROLLARIUM 4.

132. Ceterum quia ratio per se intelligibilis (§. 126), iis discernendis inservire potest, quæ compræsentia non sunt (§. 27).

DEFINITIO 40.

133. *Ratio majoris inæqualitatis* est, quam habet majus ad minus, e. gr. 6 ad 3. *Ratio* vero *minoris inæqualitatis* est, quam habet minus ad majus, e. gr. 3 ad 6.

DEFINITIO 41.

134. *Ratio rationalis* dicitur, quæ est ut unitas vel numerus rationalis ad nume-

(a) In Tractatu de principiis & ratiocinatione Geometrarum cap. 11. p. 22.

numerum rationalem, e. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

SCHOLION.

135. *Sint duæ quantitates A & B, sitque A < B. Si A ex B toties subtrahas, quoties fieri poterit, e. gr. quinquies, relinquetur vel nihil, vel aliquid. In priori ergo casu A erit ad B ut 1 ad 5, hoc est, A in B quinquies continetur, seu* $A = \frac{1}{5}B$. *Ratio ergo est rationalis. In casu posteriori aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex A, e. gr. ter, itidemque ex B, e. gr. septies subducta nihil relinquit; aut nulla dabitur istiusmodi pars. Si prius: erit A ad B ut 3 ad 7, seu* $A = \frac{3}{7}B$, *adeoque ratio denuo rationalis. Si posterius: ratio ipsius A ad B numeris exprimi nequit rationalibus, hoc est, dici nequit, quanta pars ipsius B sit A. Suo autem loco ostendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri possit, nec minus demonstrabitur, dari quantitates, quæ rationem irrationalem habent. Hinc simul lumen affunditur definitioni rationis, dum ostendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum sine tertio homogeneo assumto ratio intelligi possit. Nimirum aut minus majoris, aut pars, quæ utrique inest, utriusque mensura constituitur, vel, quod perinde est, minus aut prædicta pars pro unitate assumitur, & in casu priore majus, in posteriore majus & minus per numeros exprimuntur: quos in ratione irrationali irrationales esse suo loco constabit.*

DEFINITIO 42.

136. *Exponentem rationis* dico Quotum, qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit. E. gr. rationis 3 ad 2 exponens est $1\frac{1}{2}$; sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Denominator*, nec non *Nomen rationis*.

SCHOLION.

137. *In Geometria demonstrabitur, quod exponens rationis datæ exprimi possit linea, licet in numeris vel rationalibus, vel irrationalibus eundem exhibere non valeamus.*

COROLLARIUM 1.

138. Si consequens est unitas, antecedens ipse est exponens rationis, e. g. rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM 2.

139. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, seu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM 3.

140. Exponens rationis est ad unitatem ut antecedens ad consequentem (§. 69).

COROLLARIUM 4.

141. Rationes per exponentes discernuntur (§. 131. 136), atque adeo, si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commode exprimitur per A:B (§. 71).

DEFINITIO 43.

142. Si terminus minor est pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*; *ratio* vero minoris inæqualitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo *dupla*, si exponens 2; *tripla*, si 3 &c. in altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si $\frac{1}{3}$ &c. E. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim senarius binarium ter; contra 2 ad 6 est in ratione subtripla, continet enim binarius tertiam senarii partem.

DEFINITIO 44.

143. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *superparticularis*, *ratio* minoris inæqualitatis *subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo vocatur *sesquialtera*, si exponens $1\frac{1}{2}$; *sesquitertia*, si $1\frac{1}{3}$ &c. in altero *subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subsesquitertia*, si $\frac{3}{4}$ &c. E. gr. 3 ad 2 est in ratione sesquialtera; 2 ad 3 in subsesquialtera.

DEFINITIO 45.

144. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partes ipsius aliquot aliquotas; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *superpartiens*; *ratio* minoris inæqualitatis *subsuperpartiens*. Speciatim in casu priore dicitur *superbipartiens tertias*, si exponens $1\frac{2}{3}$; *supertripartiens quartas*, si $1\frac{3}{4}$; *superquadripartiens septimas*, si $1\frac{4}{7}$ &c. in posteriore *subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{5}$; *subsupertripartiens quartas*, si $\frac{4}{7}$;

si $\frac{4}{7}$; *subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{11}$ &c. E. gr. 5 ad 3 est ratio superbipartiens tertias; sed 3 ad 5 ratio subsuperbipartiens tertias.

DEFINITIO 46.

145. Si terminus major minorem aliquoties continet & insuper partem ipsius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex superparticularis*; ratio minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo dicitur *dupla sesquialtera*, si exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla sesquiquarta*, si $3\frac{1}{4}$ &c. in altero *subdupla subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{5}$; *subtripla subsesquiquarta*, si $\frac{4}{13}$ &c. E. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam sesquiquintam; 4 ad 9 rationem subduplam subsesquiquartam.

DEFINITIO 47.

146. Denique si terminus major minorem aliquoties continet ac insuper aliquot partes ipsius aliquotas; *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *multiplex superpartiens*; ratio minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperpartiens*. Speciatim in casu primo vocatur *dupla superbipartiens tertias*, si exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla superquadripartiens septimas*, si $3\frac{4}{7}$ &c. in altero *subdupla subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{8}$; *subtripla subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{25}$ &c. E. gr. ratio 25 ad 7 est tripla superquadripartiens septimas; 3 ad 8 subdupla subsuperbipartiens tertias.

SCHOLION 1.

147. *En genera & species rationum rationalium, quarum quidem nomina apud recentiores varius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, e. gr. pro dupla 2:1, pro sesquialtera 3:2), non tamen ab eo ignorari possunt, qui scripta Mathematicorum evolvit. Ceterum jam* Clavius *annotavit* (a) *exponentes rationes majoris inæqualitatis & re, & nomine; rationes vero minoris inæqualitatis re tantum, non autem nomine denominare. Facile vero in his nomen invenies, si denominatorem exponentis dividas per numeratorem. E. gr. si exponens fuerit $\frac{5}{8}$; erit 8 : 5 = $1\frac{3}{5}$. Unde innotescit, rationem vocari subsupertripartientem quintas. De nominibus rationum irrationalium nemo hactenus cogitavit.*

SCHOLION 2.

148. *Nomina rationum rationalium facile memoriæ mandaturus, idemque perspecturus, speciebus recensitis plures non dari, considerare debet, quotum ex divisione termini majoris per minorem emergentem, seu exponentem rationum majoris inæqualitatis, vel esse 1°. numerum integrum, vel mixtum, hunc vero vel 2°. ex unitate & fractione, cujus numerator est unitas, vel 3°. ex unitate & fractione, cujus numerator est numerus, vel 4°. ex numero & fractione, cujus numerator est unitas, vel denique 5°. ex numero & fractione, cujus numerator numerus est, constare. Habemus ergo in casu primo* rationes multiplices & submultiplices, *in secundo* superparticulares & subsuperparticulares, *in tertio* superpartientes & subsuperpartientes, *in quarto* multiplices superparticulares & submultiplices subsuperparticulares, *in quinto denique* multiplices superpartientes & submultiplices subsuperpartientes. *Rationes minoris inæqualitatis per proprios quoque exponentes determinari possunt. Aut enim exponens 1°. est fractio, cujus numerator unitas; aut fractio, cujus numerator unitate major, tumque vel simplum numeratoris, vel ejus multiplum denominatore minus. Si simplum numeratoris denominatore minus, ejus differentia a denominatore vel 2°. unitas est, vel 3°. unitate major. Similiter si multiplum numeratoris denominatore minus, differentia vel 4°. unitas est, vel 5°. unitate major. In casu primo* ratio *est* submultiplex; *in secundo* subsuperparticularis; *in tertio* subsuperpartiens; *in quarto* submultiplex subsuperparticularis; *in quinto* submultiplex subsuperpartiens.

DEFINITIO 48.

149. *Rationes cædem* sunt, quarum antecedentes ad suos consequentes eodem modo referuntur, hoc est, quarum antecedentes per suos consequentes divisi dant exponentes æquales.

SCHOLION 1.

150. *Per hanc definitionem agnosci posse etiam identitatem rationum irrationalium patet ex schol. def. 42* (§. 137).

COROLLARIUM 1.

151. Quoties ergo antecedens unius rationis suum cou cquentem, vel quantam consequen-

tis

(a) In Comment. ad Elem. V, Euclidis f. 179. Tom. 1. Opee.

tis partem continet; toties antecedens alterius suum consequentem, vel tantam consequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in consequente suo continetur, toties antecedens alterius continetur in suo consequente (§. 131).

COROLLARIUM 2.

152. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit A : B = C : D, seu in exemplo singulari 8 : 4 = 30 : 15. Et hoc modo identitatem rationum in posterum designabimus (§. 141).

SCHOLION 2.

153. *Alii signis aliis utuntur. Communiter A . B :: C . D scribere solent. Sed secundum leges Artis characteristicæ signa scientifica non scientificis præferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimuntur, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.*

COROLLARIUM 3.

154. Cum rationes non discernantur nisi per exponentes (§. 141), in rationibus autem iisdem exponentes iidem sint (§. 149); rationes eædem sunt etiam similes (§. 24), & contra.

DEFINITIO 49.

155. Rationum duarum identitas vel similitudo dicitur *Proportio*. Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales*. E. gr. Si A : B = C : D, dicuntur A, B, C & D, seu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

DEFINITIO 50.

156. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem cum antecedente secundæ, ut si 3 : 6 = 6 : 12; *discreta* vero, si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ, ut si 3 : 6 = 4 : 8. In proportione continua *terminus*, qui consequentis primæ & antecedentis secundæ vicem tuetur, *medius proportionalis* appellatur. Ita numerus 6 est medius proportionalis inter 3 & 12.

SCHOLION.

157. Gregorius a S. Vincentio (a) *considerat quoque rationes, quas habent rationum exponentes, &* Proportionalitatem *vocat proportionem, quæ inter exponentes quatuor rationum intercedit, ut modos argumentandi in Geometria etiam a rationibus dissimilibus desumere liceat. Sed nos hac doctrina non utemur.*

DEFINITIO 51.

158. Rationum diversarum A : B & F : G *major* dicitur A : B, si fuerit A : B > F : G; contra *minor* F : G, si F : G < A : B. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo designabimus. E. gr. 6 ad 3 majorem habet rationem, quam 5 ad 4, nam 6 : 3 (= 2) > 5 : 4 (= $1\frac{1}{4}$); sed 3 ad 6 minorem habet, quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6}$ seu $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO 52.

159. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem consequentibus. Ita 6 ad 96 est in ratione composita 2 ad 8, & 3 ad 12. In specie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur, multiplicata nempe uniuscujusque rationum similium. Ita 48 : 3 seu 16 : 1 est ratio duplicata ipsarum 4 : 1, & 12 : 3. Unde simul intelligitur, quænam *ratio* dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* &c. & in genere *submultiplicata*. Nempe 4 : 1 est ratio subduplicata ipsius 16 : 1, vel 48 : 3.

THEOREMA 11.

160. *Quæ sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, commensurabilia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota est unitas (§. 40); fractus vero cum unitate partem aliquotam communem

(a) Quadraturæ Circuli lib. 8. f. 865.

munem habet (§. 41). Quæ igitur sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem; eorum unum vel est pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commensurabilia sunt (§.31). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

161. Cum in divisione sit ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. 69); si numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas est ad quotum ut numerus rationalis ad numerum rationalem, atque hinc quotus commensurabilis unitati (§.160), adeoque numerus rationalis (§.39).

COROLLARIUM 2.

162. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numero rationali per rationalem diviso (§.134.136); rationis rationalis exponens est numerus rationalis (§. 161).

THEOREMA 12.

163. *Commensurabilia sunt inter se vel ut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommensurabilia non item.*

DEMONSTRATIO.

Commensurabilium aut unum est pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§.31). Quod si adeo in casu priore quantitas minor, in posteriore pars aliquota communis pro unitate assumatur; respondebit in priore quantitati majori, in posteriore utrique numerus rationalis integer (§. 40). Ergo in casu priore quantitates sunt inter se ut unitas, in posteriore ut numerus rationalis integer ad numerum rationalem integrum. *Quod erat primum.*

Incommensurabilium nulla datur pars aliquota communis (§.31). Nulla ergo datur unitas, cui commensurabilia existant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commensurabilis existat (§.39); ipsa non sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

164. Commensurabilium ratio est rationalis & incommensurabilium irrationalis (§. 534).

SCHOLION.

165. *Dari quantitates incommensurabiles, in Geometria demonstrabitur.*

COROLLARIUM 2.

166. Rationis commensurabilium exponens est numerus rationalis (§. 162).

THEOREMA 13.

167. *Rationes A:B & F:G similes eidem tertiæ C:D sunt etiam similes inter se: & similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO.

Rationes similes eidem tertiæ sunt etiam eædem eidem tertiæ (§.154). Quare cum sit A:B = C:D, & F:G = C:D; erit A:B = F:G, consequenter A ad B ut F ad G. *Quod erat unum.*

$6:3=8:4$
$10:5=8:4$
Ergo $6:3=10:5$

Porro A:B = C:D & F:G = H:E, itemque C:D = H:E *per hypoth.* Sed A:B = H:E *per demonstr.* Ergo etiam A:B = F:G *per demonstr. Quod erat alterum.*

THEOREMA 14.

168. *Idem C ad æqualia A & B, & æqualia A & B ad idem C vel etiam ad æqualia C & D eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

A = B *per hypoth.* Ergo C:A = C:B (§. 71. 94), consequenter C ad A & B eandem rationem habet (§. 152). *Quod erat primum.*

Similiter quia A = B *per hypoth.* erit A:C = B:C (§. 71. 94), consequenter A & B ad C eandem ratio-

nem habent (§. 152). *Quod erat secundum.*

Sit denique A=C & B=D, erit A:B=C:D (§. 71. 94), consequenter ratio utrobique eadem (§. 152). *Quod erat tertium.*

THEOREMA 15.

169. *Si fuerit A:B=C:D, erit etiam* invertendo *B:A=D:C.*

DEMONSTRATIO.

Sit quotus ex divisione ipsius A per B emergens E, & quotus ex divisione ipsius C per D emergens G; erit B ad A ut unitas ad E, & D ad C ut eadem unitas ad G (§. 69), consequenter B:A=1:E, & D:C=1:G (§. 152). Sed A:B=C:D *per hypoth.* seu E=G (§. 15). Ergo unitas eadem ad E & G eandem rationem habet (§. 168), consequenter B:A=D:C (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA 16.

170. *Partes similes* P *&* p *eandem rationem habent ad tota* T *&* t*: si tota ad partes eandem rationem habent, partes sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Habeat enim, si fieri potest, P ad T aliam rationem quam *p* ad *t*; partes *P* & *p* per diversitatem rationis ad tota a se invicem distingui poterunt (§. 132). Erunt adeo dissimiles (§. 24). Quod cum sit absurdum, utpote contra hypothesin; erit P ad T ut *p* ad *t*. *Quod erat primum.*

Si t:p=T:P *per hypoth.* erit *p:t*=P:T (§. 169). Ergo *per demonstrata* P & *p* sunt partes similes. *Quod erat secundum.*

Si P & p sunt partes similes totorum T & t, erit P:T=*p:t per num.* 1, adeoque T:P=*t:p* (§. 169), hoc est, tota ad partes similes eandem rationem habent. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 17.

171. *Partes similes* P *&* p *sunt inter se ut tota* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Cum totum sit idem cum partibus suis simul sumtis (§. 9); quoties sumitur totum, toties etiam sumitur pars ejus quantalibet, e. gr. quarta, vigesima, millesima, millionesima, aut quæ rationem aliam quamcunque ad totum habet. Quare si ponamus totum minus *t* toties sumi, donec toti T æquale fiat; quoties ipsum sumitur, toties etiam sumenda ejus pars *p*, donec parti ipsius T simili, quæ est P, æqualis fiat. Toties itaque P continet *p*, quoties T ipsum *t*. Sunt ergo partes similes ut tota (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

172. *Notandum est, numerum, qui indicat quoties sumatur totum minus, ut majori æquale fiat, non semper esse rationalem; sed irrationalem quoque esse posse: quo in casu tota ad se invicem rationem irrationalem habent.* E. gr. *In Geometria demonstrabimus latus quadrati, ut diagonali æquale fiat, toties sumi debere, quoties unitas continetur in radice ex binario. Evidens vero est, si latus quadrati sit divisum in duas partes, quarum una est pars quarta totius, altera continet tres quartas; partem quoque quartam toties sumi, quoties unitas continetur in radice ex binario, donec parti quartæ diagonalis æqualis fiat.*

THEOREMA 18.

173. *Si* A:B=C:D; *erit etiam* alternando *seu* permutando A:C=B:D.

DEMONSTRATIO.

I. Si antecedentes A & C consequentibus B & D fuerint minores; horum partes (§. 20), eæque similes (§. 170)

(§. 170) haberi possunt. Sunt igitur ut tota, hoc est, antecedentes A & C eam inter se rationem habent, quam consequentes B & D (§. 171).

II. Si antecedentes A & C consequentibus B & D majores; tum quia A : B = C : D *per hypoth.* erit B : A = D : C (§. 169), consequenter B : D = A : C *per cas.* 1. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

174. Ergo in divisione unitas ad divisorem ut quotus ad dividendum (§. 69).

COROLLARIUM 2.

175. Si fuerit A : B = C : D, & B = D; erit etiam A = C. Est enim A : C = B : D (§. 173). Sed B = D *per hypoth.* Ergo A = C (§. 149).

COROLLARIUM 3.

176. Si fuerit B : A = D : C, & B = D; erit etiam A = C. Cum enim sit A : B = C : D (§. 169); erit etiam A = C (§. 175).

THEOREMA 19.

177. *Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia sunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem, ea itidem æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

A : B = D : B *per hypoth.* Ergo A : D = B : B (§. 173). Sed B = B (§. 81). Quare A = D (§. 149). Et idem eodem modo ostenditur, si A : B = D : C, & B = C. *Quod erat unum.*

Similiter C : A = C : B *per hypoth.* Ergo C : C = A : B (§. 173). Sed C = C (§. 81). Quare A = B (§. 149). Et idem eodem modo patet, si C : A = D : B, & C = D. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 20.

178. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplices; facta D & E sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

6	12
3	3
18	36

6 : 12 = 18 : 36

Cum sit 1 : C = A : D & 1 : C = B : E (§. 66); erit A : D = B : E (§. 167), consequenter A : B = D : E (§. 173). *Q. e. d.*

SCHOLION.

179. *Cum C sit eadem quantitas in utroque casu per hypoth. unitas quoque in utroque eadem est (§. 13), consequenter 1 : C eadem Ratio.*

COROLLARIUM.

180. Ergo si A > B, etiam AC > BC (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius est majus altero.

THEOREMA 21.

181. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas; quoti F & G sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

3) 24 : 12 / 8 : 4

8 : 4 = 24 : 12

Cum sit 1 : C = F : A & 1 : C = G : B (§. 174); erit F : A = G : B (§. 167), consequenter F : G = A : B (§. 173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

182. Si A > B, etiam F > G (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior posteriore major est.

THEOREMA 22.

183. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per idem E dividas; in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D; in posteriore antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

3 : 6 = 12 : 24

3	3
1 : 6 =	4 : 24

Quoniam A : B = C : D *per hypoth.* erit A : C = B : D (§. 173). Sed A : E = F, & C : E = G *per hypoth.* Ergo F : G = A : C (§. 181),

(§.181) =B:D(§.167), consequenter F:B=G:D(§.173). *Quod erat unum.*

Similiter quoniam A:B=C:D *per hypoth.* erit A:C=B:D(§.173). Sed B:E=H, & D:E=K *per hypoth.* Ergo B:D=H:K(§.181), consequenter A:C=H:K(§.167), & hinc tandem A:H=C:K(§. 173). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 23.

184. *Si rationum similium A:B & C:D antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices; in casu priore facta AE & CE ad consequentes B & D, in posteriore antecedentes A & C ad facta BE & DE eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

2:6=3:9
6 6
12:6=18:9

Quia A:B=C:D *per hypoth.* A:C=B:D (§.173). Sed EA:EC =A:C(§. 178). Ergo EA:EC=B:D(§.167), consequenter EA:B=EC:D(§.173). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, esse A:BE =C:DE. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 24.

185. *Si rationum similium A:B & C:D antecedentes per idem E & consequentes per idem F multiplices, aut dividas; in casu priore facta, in posteriore quoti eandem inter se rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

3:6=12:24
2 3 2 3
6:18=24:72

A:B=C:D *per hypoth.* Ergo EA:B= EC:D(§.184), consequenter EA:FB= EC:FD(§.cit.). *Quod erat unum.*

3:6=12:24
3 2 3 2
1:3= 4:12

Sit A:E=G, B:F =H, C:E=K, & D:F=L. Quoniam A:B=C:D *per hypoth.* erit G:B=K:D(§. 183). Ergo & G:H=K:L (§. cit.): *Quod erat alterum.*

THEOREMA 25.

186. *Pars antecedentis in ratione majore ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens minoris ad consequentem suum. Et majus antecedente rationis minoris ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris ad suum consequentem.*

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet, quam C ad D; erit A:B > C:D (§.158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut minus quam A, hoc est, pars ipsius (§.20), per B dividatur (§. 182): quæ pars si dicatur F; erit F:B=C:D, hoc est, in majore ratione antecedentis pars eandem rationem habet ad consequentem, quam minoris antecedens ad suum (§.152). *Quod erat unum.*

Similiter si A ad B minorem habet rationem, quam C ad D; erit A:B < C:D(§.158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut majus quam A, cujus adeo pars est A (§. 20), per B dividatur (§. 182): quod si dicatur F; erit F:B=C:D, hoc est, in ratione minore majus antecedente rationem eandem habet ad consequentem, quam majoris antecedens ad suum consequentem (§.152). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 26.

187. *Si fuerint quotcunque rationes simi-*

similes $A:B$, $C:D$, $E:F$, $G:H$ &c. summa omnium antecedentium $A+C+E+G$ &c. est ad summam omnium consequentium $B+D+F+H$ &c. ut antecedens unius rationis A ad suum consequentem B.

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. esse $A=\frac{1}{2}B$, $C=\frac{1}{2}D$, $E=\frac{1}{2}F$, $G=\frac{1}{2}H$; erit $A+C+E+G=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}H$ (§.88), hoc est, summa omnium antecedentium est subdupla summæ omnium consequentium, consequenter ut antecedens unius rationis ad suum consequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, si alia quæcunque ratio antecedentium ad consequentes ponatur, vel etiam antecedentes sint consequentibus majores; patet propositum. *Q.e.d.*

THEOREMA 27.

188. *Si fuerit ut totum $A+C$ ad totum $B+D$, ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum $A+C$ ad totum $B+D$, vel ut ablatum C ad ablatum D.*

DEMONSTRATIO.

24 : 12
6 : 3
18 : 9

Aut $A:B=C:D$, aut $A:B>C:D$, aut denique $A:B<C:D$ (§.21). Ponamus $A:B>C:D$. Ergo pars ipsius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D (§. 186), hoc est, $F:B=C:D$ (§.152), consequenter $F+C:B+D=C:D$ (§.187). Quare cum etiam sit $A+C:B+D=C:D$ *per hypoth.* erit $F+C=A+C$ (§.177), adeoque $F=A$ (§.91). Sed F est pars ipsius A *per demonstrata*. Pars igitur toti æqualis: quod cum sit absurdum (§.84), ut sit $A:B>C:D$, fieri nequit.

Sit jam $A:B<C:D$. Ergo majus ipso A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D (§. 186), hoc est, $G:B=C:D$ (§.152), consequenter $G+C:B+D=C:D$ (§.187). Quare cum etiam sit $A+C:B+D=C:D$ *per hypoth.* erit $G+C=A+C$ (§.177), adeoque $G=A$ (§.91). Sed A est pars ipsius G *per demonstrata*. Ergo pars toti æqualis: quod cum sit absurdum (§.84), ut sit $A:B<C:D$, fieri nequit. Quoniam itaque nec $A:B>C:D$, nec $A:B<C:D$ *per demonstrata*; erit utique $A:B=C:D$, consequenter etiam $A:B=A+C:B+D$ (§.187). *Q.e.d.*

THEOREMA 28.

189. *In rationibus similibus $A:B$ & $C:D$ differentia antecedentium $A-C$ est ad differentiam consequentium $B-D$, ut antecedens rationis utriuslibet ad suum consequentem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§.173). Ponamus $A>C$ & $B>D$; erunt A & B tota, C & D eorum partes (§.9.20). Quamobrem cum sit $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A-C:B-D=A:B$ vel $=C:D$ (§. 188). *Q.e.d.*

THEOREMA 29.

190. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* componendo *ut summa antecedentis & consequentis primæ rationis ad antecedentem vel consequentem primæ, ita summa antecedentis & consequentis secundæ ad antecedentem vel consequentem secundæ.*

DE-

DEMONSTRATIO.

$4:2=10:5$	Si $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§.173). Sed $A+B:C+D=A:C=B:D$ (§.187). Er-
$6:4=15:10$	
vel $6:2=15:5$	

go $A+B:A=C+D:C$, item $A+B:B=C+D:D$ (§.173). *Q. e. d.*

THEOREMA 30.

191. *Si fuerit* $A:B=a:b$ *&* $A:C=a:c$ *&c. erit* $A:A+B+C=a:a+b+c$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A:B=a:b$ & $A:C=a:c$ *per hypoth.* erit $A:a=B:b=C:c$ (§. 173. 167). Quare $A:a=A+B+C:a+b+c$ (§. 187), & hinc $A:A+B+C=a:a+b+c$ (§. 173). *Q. e. d.*

THEOREMA 31.

192. *Si fuerint proportiones quotcunque similes* $A:B=C:D$, $E:F=G:H$, $I:K=L:M$ *&c. erit summa omnium antecedentium primarum rationum* $A+E+I$ *&c. ad summam omnium consequentium* $B+F+K$ *&c. ut summa omnium antecedentium secundarum rationum* $C+G+L$ *&c. ad summam omnium consequentium* $D+H+M$ *&c.*

DEMONSTRATIO.

Cum $A:B$, $E:F$, $I:K$ &c. itemque $C:D$, $G:H$, $L:M$ &c. sint rationes similes *per hypoth.* erit $A+E+I$ &c.$:B+F+K$ &c. $=A:B$, & $C+G+L$ &c.$:D+H+M$ &c. $=C:D$ (§. 187). Est vero $A:B=C:D$ *per hypoth.* Ergo $A+E+I$ &c.$:B+F+K$ &c. $=C+G+L$ &c.$:D+H+M$ &c. (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA 32.

193. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* dividendo *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus consequentem, ita differentia terminorum secundæ ad ejus consequentem, itemque* convertendo *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus antecedentem, ita differentia terminorum secundæ ad ejus antecedentem.*

DEMONSTRATIO.

$6:4=15:10$	Si fuerit $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§. 173), consequenter $A-B:C-D=B:D=A:C$ (§.
$2:4=5:10$	
$2:6=5:15$	

189). Ergo $A-B:B=C-D:D$, & $A-B:A=C-D:C$ (§. 173). *Q. e. d.*

THEOREMA 33.

194. *Si fuerit* ordinate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ D ad consequentem suum E; & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita consequens secundæ E ad aliud quidpiam F:* erit ex æquo *antecedens primæ A ad C ut antecedens secundæ D ad F.*

DEMONSTRATIO.

$4:2=6:3$	Quoniam $A:B=D:E$ & $B:C=E:F$ *per hypoth.* erit $A:D=B:E$ & $B:E=C:F$ (§. 173), consequenter $A:D=$
$2:8=3:12$	
$4:8=6:12$	

$C:F$ (§. 167). Quare $A:C=D:F$ (§. 173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

195. Quodsi fuerit $A:B=D:E$ & $C:B=F:E$; cum etiam sit $B:C=E:F$ (§. 169), erit $A:C=D:F$ (§. 194).

COROLLARIUM 2.

196. Similiter si fuerit $A:B=C:D$ & $A:F=C:G$; cum etiam sit $B:A=D:C$ (§. 169), erit $B:F=D:G$ (§. 194).

CO-

COROLLARIUM 3.

197. Si denique fuerit $A:B=C:D$ & $F:A=G:C$; cum etiam sit $A:F=C:G$ (§. 169), erit $B:F=D:G$ (§. 196).

THEOREMA 34.

198. *Si fuerit* perturbate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ E ad suum consequentem F; & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita aliud quidpiam D ad antecedentem secundæ E: erit etiam* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut D ad consequentem secundæ F.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{l} 8:4=12:6 \\ \underline{4:16=3:12} \\ 8:16=3:6 \end{array}$$

Quoniam $A:B=E:F$ *per hypoth.* si ponatur $B:C=F:G$, erit $A:C=E:G$ (§. 194). Est vero etiam $B:C=D:E$ *per hypoth.* Ergo $D:E=F:G$ (§. 167), & $D:F=E:G$ (§. 173), consequenter $A:C=D:F$ (§. 167). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

199. Quodsi fuerit $A:B=E:F$ & $C:B=E:D$; cum etiam sit $B:C=D:E$ (§. 169), erit $A:C=D:F$ (§. 198).

COROLLARIUM 2.

200. Similiter si fuerit $B:A=F:E$ & $B:C=D:E$; cum etiam sit $A:B=E:F$ (§. 169), erit $A:C=D:F$ (§. 198).

COROLLARIUM 3.

201. Si porro fuerit $B:A=F:E$ & $C:B=E:D$; cum etiam sit $B:C=D:E$ (§. 169), erit $A:C=D:F$ (§. 200).

COROLLARIUM 4.

202. Si idem C vel æqualia per majus A & minus B dividas, quotus prior F erit minor posteriore G. Est enim $A:C=1:F$ & $B:C=1:G$ (§. 69), adeoque $C:B=G:1$ (§. 169). Ergo $A:B=G:F$ (§. 198). Sed $A>B$, *per hypoth.* Ergo $G>F$ (§. 149).

THEOREMA 35.

203. *Majus A ad idem C majorem rationem habet, quam minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A>B$ *per hypoth.* erit $A:C>B:C$ (§. 182), hoc est, A ad C majorem rationem habet, quam B ad C (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA 36.

204. *Quod ad idem majorem habet rationem quam alterum, id altero majus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat A ad C rationem majorem quam B ad idem C *per hypoth.* Ergo pars ipsius A eandem ad C rationem habet quam B ad idem C (§. 186), adeoque ipsi B æqualis est (§. 177). Quare $A>B$ (§. 20). *Q. e. d.*

THEOREMA 37.

205. *Idem C ad majus A minorem habet rationem, quam ad minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A>B$ *per hypoth.* erit $C:A<C:B$ (§. 202). Ergo C ad A minorem habet rationem quam ad B (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA 38.

206. *Ad quod idem majorem rationem habet quam ad alterum, id altero minus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat C ad A rationem majorem, quam ad B *per hypoth.* Ergo pars ipsius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B (§. 186), hoc est, $D:A=C:B$ (§. 152), & hinc $D:C=A:B$ (§. 173). Sed $D<C$ (§. 20). Ergo $A<B$ (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA 39.

207. *Duæ quantitates se mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sint duo factores A & B; erit 1 : A = B : AB, & 1 : B = A : BA (§. 69). Est vero etiam 1 : A = B : BA (§. 173), adeoque ob unitatem eandem *per hypoth.* B : AB = B : BA (§. 167). Ergo AB = BA (§. 177).

4 2
2 4
8 = 8

COROLLARIUM

208. Sint tres factores A, B & C. Quoniam AB = BA (§. 207); erit CAB = CBA (§. 93), adeoque & ABC = BAC (§. 207). Similiter quia CB = BC (§. 207); erit ACB = ABC (§. 93), adeoque & CBA = BCA (§. 207). Et quia AC = CA (§. 207); erit BAC = BCA (§. 93), adeoque ACB = CAB (§. 207). Quare CAB = CBA = BCA = BAC = ABC = ACB (§. 87, hoc est, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in se invicem ducantur.

SCHOLION.

209. *Idem eodem modo ostenditur, si plures fuerint factores: sed demonstratio prolixior evadit, si plures tribus fuerint termini.*

THEOREMA 40.

210. *Si factum per multiplicandum dividitur, quotus est multiplicans: si per multiplicantem, quotus est multiplicandus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§. 66). Est etiam multiplicandus ad factum (si hoc per illud dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. 69). Ergo quotus aequalis est multiplicanti (§. 177). *Quod erat unum.*

Quoniam unitas est ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§. 66); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§. 173). Sed si factum per multiplicantem dividis; multiplicans est ad factum ut unitas ad quotum (§. 69). Ergo quotus est aequalis multiplicando (§. 177). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

211. Omnia igitur facta sunt numeri compositi (§. 76).

THEOREMA 41.

212. *Si quotus per divisorem multiplicatur, aut contra; factum est dividendus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad divisorem ita quotus ad dividendum (§. 174). Sed si quotus per divisorem multiplicatur; erit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad factum (§. 66). Ergo factum aequale est dividendo (§. 177). *Quod erat unum.*

Idem vero cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur (§. 207); erit quoque in hoc casu factum aequale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 42.

213. *Sint quatuor quaecunque quantitates proportionales A : B = C : D, sint totidem aliae inter se quoque proportionales E : F = G : H, si posteriores singulas in singulas priores ducas; facta inter se proportionalia sunt, nempe EA : FB = GC : HD.*

DEMONSTRATIO.

Cum sit *per hypothesin*

A : B = C : D & E : F = G : H
E F E F C D C D;

erit EA : FB = EC : FD & CE : DF = CG : DH (§. 185). Sed EC = CE & FD = DF (§. 207). Ergo EA : FB = CG : DH (§. 167) = GC : HD (§. 207). *Q. e. d.*

THEOREMA 43.

214. *Rationis compositae exponens est aequalis facto, quod producunt exponentes simplicium.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Si rationis primæ A : B exponens $= m$, secundæ C : D exponens sit $= n$; erit $m : 1 = A : B$, & $n : 1 = C : D$ (§. 140). Ergo $mn : 1 = AC : BD$ (§. 213), consequenter mn est exponens rationis AC : BD (§. 140), hoc est, compositæ ex A : B & C : D (§. 159). *Q. e. d.*

SCHOLION.

215. *Sint rationes 8 : 4, & 24 : 6. Illius exponens est 2, hujus 4. Rationem compositam datarum habent 192 & 24. Sed 192 : 24 = 8, quod est factum ex 2 in 4. Ceterum eadem demonstratio locum habet, si plures fuerint rationes.*

THEOREMA 44.

216. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D &c. prima A ad tertiam C est in ratione duplicata; ad quartam D in ratione triplicata &c. primæ A ad secundam B.*

DEMONSTRATIO.

1. Quoniam A : B = B : C *per hypoth.* AB ad BC habet rationem duplicatam ipsius A ad B (§. 159). Sed AB : BC = A : C (§. 181). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat unum.*

2. Quoniam A : B = B : C = C : D *per hypoth.* ABC est ad BCD in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 159). Sed ABC : BCD = A : D (§. 178). Ergo etiam A ad D est in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat secundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonstrari possit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad sextum quintuplicatam &c. primi ad secundum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 45.

217. *Si fuerit quæcunque quantitatum A, B, C, D, E, F &c. series; ratio primæ A ad ultimam F componitur ex rationibus quantitatum extremis interjacentium A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c.*

DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes consequentes in se invicem multiplices; facta ABCDE & BCDEF sunt in ratione composita rationum A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c. (§. 159). Sed ABCDE : BCDEF = A : F (§. 178). Ergo etiam A ad F est in ratione composita omnium modo recensitarum (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA 46.

218. *Rationes compositæ ex rationibus, quarum singulæ singulis æquales sunt, inter se æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

6:3 = 4:2
3:1 = 12:4
5:1 = 20:4

90:3 = 960:32 = 30

Sit A : B = C : D, E : F = G : H, I : K = L : M *per hypoth.* erit AE : BF = CG : DH (§. 213), adeoque & AEI : BFK = CGL : DHM (§. *cit.*). Ratio vero AEI : BFK componitur ex rationibus A : B, E : F & I : K; ratio CGL : DHM ex rationibus C : D, G : H, L : M (§. 159). Ergo constat propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA 47.

219. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales A, B, C & D; æquemultiplices primæ atque tertiæ A & C, itemque secundæ ac quartæ B & D, juxta quamlibet multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una*

æquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatæ.

DEMONSTRATIO.

Denotentur æquemultiplices ipsarum A & C per mA & mC, itemque æquemultiplices ipsarum B & D per nB & nD. Cum sit A : B = C : D *per hypoth.* erit etiam mA : nB = mC : nD (§. 185), consequenter mA : mC = nB : nD (§. 173). Quamobrem si mA = mC, erit nB = nD; si mA > mC, etiam nB > nD; si mA < mC, etiam nB < nD (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

220. *Hac proprietate proportionalium utitur* Euclides (a) *in iis definiendis ac inde ceteras demonstrat.*

CAPUT IV.

De Speciebus Arithmeticæ in Numeris Fractis.

THEOREMA 48.

221. *Si numerator est æqualis denominatori, fractio $\frac{4}{4}$ æquivalet integro; si minor, fractio $\frac{3}{4}$ minor est integro; si major, fractio $\frac{5}{4}$ integro seu unitate major est.*

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem seu integrum in partes æquales (e. gr. in nostro casu in 4) divisum, & numerator numerat partes istiusmodi in casu aliquo datas (§. 59). Quodsi ergo numerator denominatori æqualis *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 86). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor *per hypoth.* aliquot saltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis, consequenter eodem minor (§. 20). *Quod erat secundum.*

Si denique numerator major est denominatore *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales sunt (§. 86). Ergo integrum parti fractionis æquale est, consequenter ipsa integro major (§. 20). *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

222. Fractiones *integro æquales vel eodem majores dicuntur vulgo* spuriæ, *quia proprie loquendo fractiones non sunt nisi quæ integro minores* (§. 38).

PROBLEMA 17.

223. *Invenire, quot integra fractio, quæ integro major ($\frac{8}{4}$), contineat.*

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: dico, quotum 2 indicare, quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. 69). Sed denominator idem est cum integro (§. 59). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA 18.

224. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RE-

(a) Elem. V. def. 5.

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
2. Factum scribatur loco numeratoris. Ita reperies $3=\frac{24}{8}$, $5=\frac{30}{6}$, $7=\frac{28}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Est nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 66. 169). Sed unitas & denominator datus sunt idem integrum (§. 59). Ergo fractio & numerus integer æquales sunt (§. 177). *Q. e. d.*

THEOREMA 49.

225. *Fractiones homogeneæ æquales sunt, quarum numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent; major est, cujus numerator habet rationem majorem; minor vero, cujus numerator habet minorem.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter se sint homogeneæ *ex hypoth.* ad eandem unitatem referuntur (§. 35), adeoque ipsarum denominatores idem totum referunt (§. 59). Quare si numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent; fractiones æquales sunt (§. 177): cujus vero fractionis numerator ad denominatorem suum rationem majorem habet, ea major est; cujus numerator minorem habet, ea minor est (§. 204). *Q. e. d.*

E. gr. $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{5}{30}=\frac{25}{150}=\frac{1}{6}$. Sed $\frac{7}{24} < \frac{2}{6}$.

SCHOLION.

226. *Intelligitur adeo identitas fractionum, si numerator unius toties contineatur in denominatore suo, quoties numerator alterius in suo continetur. Fractio minor esse intelligitur, si numerator ipsius pluries continetur in suo denominatore, quam numerator alterius in denominatore suo: id quod divisio denominatoris per numeratorem prodit.*

COROLLARIUM.

227. Quodsi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis $(\frac{4}{6})$ per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in casu priore facta $(\frac{8}{12})$, in posteriore quoti $(\frac{2}{3})$ constituunt fractionem datæ $(\frac{4}{6})$ æquivalentem (§. 178. 181).

PROBLEMA 19.

228. *Invenire communem mensuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Divisor primæ divisionis seu numerus datus minor denuo dividatur per residuum primæ divisionis.
3. Similiter divisor secundæ divisionis dividatur per residuum secundæ & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico, divisorem ultimum esse communem mensuram maximam numerorum datorum.

E. gr. Sint numeri dati 168 & 240, reperietur eorum communis mensura maxima 24 hunc in modum:

```
 7
 1 8 2            2 4          1
 2 4 0 (1       1 6 8 (2     7 2 (3
 1 6 8            7 2          7 2
```

Similiter communis mensura maxima numerorum 95 & 47 reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Divisor ultimus 24 metitur divisorem antecedentis (in nostro quidem casu secundæ) divisionis 72 (*per hypoth.* & §. 74). Ergo & metitur dividendum antecedentis (hoc est, in nostro casu secundæ) divisionis 168, quippe ex dividendo ultimæ divisionis 72, aliquoties (hic quidem bis) sumto & ejus divisore 24 compositum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & residuum primæ divisionis 72, adeoque & numerum alterum dato-

 rum

rum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in nostro casu semel) sumto & residuo primæ divisionis 72 compositum. Est itaque communis numerorum datorum mensura (§. 78).

Esse vero communem mensuram maximam ordine retrogrado per indirectum demonstratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem esse mensuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat residuum primæ seu divisorem secundæ divisionis 72, adeoque & residuum secundæ divisionis seu divisorem tertiæ, hoc est, in nostro casu inventam communem mensuram 24. Sed numerus is eadem major est *ex hypoth.* Ergo communem mensuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24. Quod cum sit absurdum (§. 74), major communis mensura non datur. Est igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

S C H O L I O N 1.

229. *Qui demonstrationem uno quasi obtutu comprehendere cupiunt; illos hæc numerorum datorum resolutio juvabit.*

I. 72 = 3 . 24 per divisionem tertiam.

II. 168 = 2 . 72 + 24 per divis. sec. = 2 . 3 . 24 + 24 per num. I. = 7 . 24.

III. 240 = 1 . 168 + 72 per divis. prim. = 7 . 24 + 3 . 24 per num. I. & II. = 10 . 24.

S C H O L I O N 2.

240	96	48
168	72	24
.72	24	24
96	48	0

230. *In lineis communis mensura maxima invenitur per mutuam earundem a se invicem subtractionem. In numeris autem compendii gratia divisio subtractioni substituitur: ut exemplum ostendit.*

P R O B L E M A 20.

231. *Fractionem datam ad minores terminos reducere, hoc est, invenire fractionem datæ* ($\frac{20}{48}$) *æquivalentem, sed minoribus numeris expressam.*

R E S O L U T I O.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48 per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quæsitam $\frac{5}{12}$ (§. 227).

C O R O L L A R I U M 1.

232. Si ergo divisio fit per communem mensuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 228); fractio ad terminos minimos reducitur.

C O R O L L A R I U M 2.

233. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ sola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

S C H O L I O N.

234. *Molestius accidit inexercitatis communem mensuram maximam quærere, quam iteratæ per mensuras minores sponte animadversas divisione fractiones reducere.*

P R O B L E M A 21.

235. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere, hoc est, invenire fractiones, quæ datis æquales sunt & communi denominatore gaudent.*

R E S O L U T I O.

Casus I. Si fractiones duæ dentur, quælibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

E. gr. 5)$\frac{2}{3}$, 3)$\frac{4}{5}$ = $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$.

Casus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuscujusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

E. gr. 24)$\frac{2}{3}$, 12)$\frac{1}{6}$, 18)$\frac{1}{4}$ = $\frac{48}{72}$, $\frac{12}{72}$, $\frac{18}{72}$.

D E M O N S T R A T I O.

Fractiones communem habere denominatorem, patet per §. §. 93. 207. 208. Quod vero æquivaleant primum propositis, manifestum est per §. 227. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

P R O B L E M A 22.

236. *Fractiones addere.*

R E S O L U T I O.

1. Si fractiones datæ diversos denomina-

mina-

minatores habuerint, reducantur ad eundem (§.235).

2. Addantur numeratores (§. 96) & ſummæ ſubſcribatur denominator communis.

E. gr. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}$ (§. 235) $=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$ (§. 223). $\frac{2}{3}+\frac{4}{6}+\frac{1}{4}=\frac{48}{72}+\frac{48}{72}+\frac{18}{72}$ (§. 235) $=\frac{114}{72}=1\frac{42}{72}$ (§. 223) $=1\frac{7}{12}$ (§. 231).

D E M O N S T R A T I O.

Cum denominatores ſint nomina unitatum, ex quibus numeratores componuntur (§. 59); numeratores tantum adduntur. Quoniam vero addi nequeunt, niſi fuerint homogenei (§. 61); ad eandem denominationem ſunt reducendi (§. 35). *Q. e. d.*

P R O B L E M A 23.

237. *Fractionem datam ex alia data ſubtrahere.*

R E S O L U T I O.

1. Si fractiones datæ diverſos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 235).

2. Numerator unius ex numeratore alterius ſubducatur (§.103) & reſiduo denominator communis ſubſcribatur.

E.gr. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (§. 231) & $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{8}{10}-\frac{5}{10}$ (§.235) $=\frac{3}{10}$.

T H E O R E M A 50.

238. *Fractio æquatur numeratori per denominatorem diviſo, hoc eſt,* $\frac{3}{4}=3:4$.

D E M O N S T R A T I O.

Eſt enim fractio $\frac{3}{4}$ ad unitatem ſeu integrum ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§. 38. 59). Quare cum ſit ut antecedens ad conſequentem ita exponens rationis ad unitatem (§. 140), ſi antecedens ſumatur numerator 3, conſequens denominator 4; erit fractio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 177). Æquatur ergo fractio numeratori per denominatorem diviſo (§. 136). *Q. e. d.*

P R O B L E M A 24.

239. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

R E S O L U T I O.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius; facta conſtituunt fractionem quæſitam.

E. gr. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (§. 231).

D E M O N S T R A T I O.

Sit $\frac{A}{B}$ $(\frac{2}{3})$ $=A:B$ (§. 238) $=F$, & $\frac{C}{D}$ $(\frac{1}{2})$ $=C:D$ (§. *cit.*) $=G$; erit $B:A=1:F$, & $D:C=1:G$ (§. 69). Ergo $BD:AC=1:FG$ (§. 213), hoc eſt, $AC:BD$ $(\frac{2\cdot1}{3\cdot2})$ $=FG:1$ (§. 169) $=FG$ $(\frac{2}{6})$. *Q. e. d.*

S C H O L I O N 1.

240. *Non mirum, quod factum factoribus minus; cum revera diviſio ſit, quæ multiplicatio vocatur. E. gr. $\frac{2}{3}$ multiplicare per $\frac{1}{2}$ idem eſt ac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

S C H O L I O N 2.

241. *Hinc fractionum multiplicatio ſequente modo facilius demonſtratur.* Si fractio $\frac{4}{5}$ multiplicanda per $\frac{2}{3}$, duæ partes tertiæ quatuor quintarum inveniendæ. Data igitur fractio $\frac{4}{5}$ inſtar totius conſiderata, dividenda eſt in tot partes æquales, quot multiplicatoris denominator 3 habet unitates, ſcilicet in noſtro caſu in tres, & pars iſta multiplicanda per numeratorem multiplicatoris, nempe hic per 2 (§. 59).

S C H O L I O N 3.

242. *Vix autem opus eſt ut annotemus, ſi fractio per numerum integrum multiplicanda, ducendum eſſe ſolum numeratorem in integrum numerum datum. E. gr. factum ex $\frac{3}{7}$ in 2 eſt $\frac{6}{7}$.*

P R O B L E M A 25.

243. *Fractionem $\frac{4}{5}$ per aliam fractionem $\frac{2}{3}$ dividere.*

R E S O L U T I O.

1. Diviſor invertatur. E. gr. loco $\frac{2}{3}$ ſcribe $\frac{3}{2}$.

2. Diviſor inverſus ducatur in dividendum (§. 239): quod prodit $\frac{12}{10}$ ſeu $1\frac{1}{5}$ (§. 223) eſt quotus quæſitus.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam divisor ad dividendum ut unitas ad quotum (§.69); erit etiam dividendus ad divisorem ut quotus ad unitatem (§.169). Quod si fractiones ad eandem denominationem reducantur (§.235), cum eædem sint æquales quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem (§.238); erit numerator fractionis dividendæ ad numeratorem dividentis ut fractio dividenda ad fractionem dividentem (§.181), consequenter in hoc casu numerator dividendæ ad numeratorem dividentis ut quotus ad unitatem (§.167). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ sunt & numerator dividendæ per numeratorem dividentis dividi debet, ut habeatur quotus ex divisione fractionis dividendæ per fractionem dividentem emergens (§.177). Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur, numerator primæ enascitur ex numeratore ipsius dato in denominatorem secundæ, numerator vero secundæ ex ipsius numeratore dato in denominatorem primæ ducto (§.235). Obtinemus adeo numeros, ex quorum divisione quotus quæsitus emergit, si divisor inversus juxta §. 239 in fractionem dividendam ducatur. *Q.e.d.*

SCHOLION.

244. *Neque vero mirum est, quod quoti numeri integri esse possint. Una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere potest. Apparet adeo, cum fractiones sint rationes (§. 141), eas dividere idem esse ac rationum rationes investigare.*

PROBLEMA 26.

245. *Integrum 3 per fractionem $\frac{4}{7}$ dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur, ut in problemate præcedente (§. 243). E. gr. loco $\frac{4}{7}$ scribe $\frac{7}{4}$.
2. Numerus integer datus 3 ducatur in Numeratorem 7 divisoris inversi.
3. Facto subscribatur ejusdem denominator 4: quod prodit $\frac{21}{4}$ sive $5\frac{1}{4}$ est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum demonstratione problematis præcedentis (§. 243).

CAPUT V.

De Potentiis Numerorum, Genesi præsertim ac Analysi Numerorum Quadratorum & Cubicorum.

DEFINITIO 53.

246. Si numerus quicunque 2 in se ipsum ducatur, factum 4 *Numerus quadratus*; ipse autem hujus intuitu *Radix quadrata* appellatur.

COROLLARIUM.

247. Cum sit ut unitas ad radicem quadratam, ita radix ad ipsum quadratum (§. 66. 246); erit radix media proportionalis inter unitatem & quadratum (§. 156).

DEFINITIO 54.

248. Si numerus quadratus 4 porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur *Numerus cubicus* seu

Cubus,

Cubus, & radix 2 ejus intuitu *Radix cubica*.

COROLLARIUM.

249. Cum sit ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum (§. 66. 246), & ut unitas ad radicem, ita quadratum ad cubum (§.66. 248); erit etiam radix ad quadratum ut quadratum ad cubum (§. 167), hoc est, unitas, radix, quadratum & cubus in continua proportione progrediuntur (§. 156) & radix cubica est primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter unitatem & cubum.

DEFINITIO 55.

250. Cum istiusmodi multiplicatio in infinitum continuari possit; facta inde genita generali *potestatum*, *potentiarum*, *dignitatum* nomine appellari solent. *Vieta* eadem *Magnitudines scalares* vocat.

DEFINITIO 56.

251. *Exponens dignitatis* est numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens quadrati est 2, cubi 3 (§.246.248).

DEFINITIO 57.

252. Hodie tantum non omnes dignitates optime distinguunt per exponentes, ita ut radix dicatur *dignitas prima*, quadratum *secunda*, cubus *tertia* &c. Qui Arabes sequuntur, singulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diversa tamen ab iis, quibus cum *Diophanto* (a) *utuntur Vieta* (b) & *Oughtredus* (c). Nomina Arabum sunt: *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, seu *Biquadratum*, *Surdesolidum*, *Quadratum Cubi*, *Surdesolidum secundum*, *Quadratiquadrati quadratum*, *Cubus cubi*, *Quadratum Surdesolidi*, *Surdesolidum tertium* &c. Nomina Diophanti sunt: *Latus* seu *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, *Quadratocubus*, *Cubocubus*, *Quadratoquadratocubus*, *Quadratocubocubus*, *Cubocubocubus &c.*

SCHOLION.

253. *Multi quadratum vocant* Zensum. *Hinc composita*: Zensizensus, Zensicubus, Zensizenzensus, Zensurdesolidus &c.

HYPOTHESIS 12.

254. *Qui Arabum denominationibus usi, potentiarum signis sequentibus utuntur*: 1. R, 2. ʒ, 3. C, 4. ʒʒ, 5. ß, 6. ʒC, 7. Bß, 8. ʒʒʒ, 9. CC, 10. ʒß, 11. Cß &c. *Multo commodius* Cartesius (d) *monito* Kepleri (e) *obsecutus radici superius a dextris jungit exponentem*, e.gr. *si* a *fuerit radix*; *erunt potentiæ ipsam sequentes* a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 &c. *vel*, *si* $a = 2$; $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$, &c. *ita ut sit* $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ &c.

DEFINITIO 58.

255. *Quantitatem ad dignitatem desideratam evebere* idem est ac invenire factum ex ipsa aliquoties in se ducta emergens. E. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam idem est ac invenire factum 8, cujus factores 2, 2, 2.

DEFINITIO 59.

256. *Ex dignitate data radicem extrahere*, *vel latus educere*, idem est ac invenire numerum, e. gr. 2, qui aliquoties in se ipsum ductus datam potentiam (e. gr. tertiam) 8 producit.

SCHOLION.

257. *Cum dignitates superiores nonnisi in Analysi usum habeant; in præsenti genesin & analysin quadratorum & cuborum tantum tradimus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium digitorum numeros quadratos & cubicos nosse debet, quos sequens tabula exhibet.*

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubici	1	8	27	64	125	216	343	512	729

DEFI-

(a) In libris Arithmeticorum.
(b) In Isagoge in Artem Analyt. cap. 3. f. m. 3.
(c) In Clave Mathem. cap. 12. p. m. 34.
(d) In Geometria. (e) Harmonices mundi lib. 1. f. 35. 36.

DEFINITIO 60.

258. *Radix* tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis ſuperioris cujuſcunque dicitur ***binomia***, ſi ex duabus; ***trinomia***, ſi ex tribus; ***multinomia*** ſive ***polynomia***, ſi ex pluribus, quam duabus partibus conſtat.

THEOREMA 51.

259. *Potentiæ ejuſdem gradus ſunt in ratione tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem, hoc eſt, quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam, quadratoquadrata quadruplicatam &c. rationem ſuarum radicum.*

DEMONSTRATIO.

Potentiæ oriuntur, ſi radices A & B aliquoties in ſeipſas ducas (§. 250). Quare cum eadem radix A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio quadratorum componitur ex duabus, cuborum ex tribus, quadratoquadratorum ex quatuor, & reliquarum potentiarum ex tot rationibus ſimilibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam, quadratoquadrata quadruplicatam, & ceteræ potentiæ rationem tantuplicatam ſuarum radicum, quot unitates habet exponens earundem (§. 159).

THEOREMA 52.

260. *Quantitatum proportionalium potentiæ eædem ſunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Habent enim potentiæ eædem rationem multiplicatam ipſarum A : B, B : C, C : D, D : E &c. vel A : B, C : D, E : F &c. (§. 259). Sed hæ rationes omnes inter ſe eædem ſunt *per hypoth.* Ergo potentiæ iſtæ v. gr. A^3, B^3, C^3, D^3, E^3, &c. conſtituunt rationes compoſitas ex rationibus, quarum ſingulæ ſingulis æquales ſunt (§. 250), conſequenter eaſdem (§. 218), atque adeo proportionales ſunt (§. 155). *Q. e. d.*

THEOREMA 53.

261. *Numerus quadratus radicis binomiæ componitur ex quadrato partis primæ, ex facto dupli primæ in alteram & ex quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus quadratus, ſi radix in ſeipſam ducitur (§. 246). Utraque vero pars radicis ſigillatim ducitur in utramque ſimul (§. 111). Quare productum componi debet 1°. ex facto partis primæ in ſeipſam, hoc eſt, ex quadrato partis primæ (§. 246): 2°. ex facto partis primæ in ſecundam & ex facto ſecundæ in primam, hoc eſt, ex duplo facto primæ in ſecundam, ſeu ex facto dupli primæ in ſecundam (§. 207. 208): 3°. ex facto partis ſecundæ in ſeipſam, hoc eſt, ex quadrato partis ſecundæ (§. 246). *Q. e. d.*

SCHOLION.

262. *Demonſtratio ocularis, ſi in quocunque exemplo ſingulari multiplicatio non actu peragitur, ſed tantum indicatur; quo in caſu exempli univerſalis vices tuetur: id nimirum non infelicius, quam figuræ in Geometria, repræſentans, quod ſingularia in univerſum omnia commune habent. E. gr. ſit radix binomia* 34 *aut* 30 + 4; *erit*

30 + 4	*Radix binomia.*
30 + 4	
16	*Quadratum partis II.*
120	*Facta ex I. in II.*
120	
900	*Quadratum partis I.*
1156	*Quadratum totius.*

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonſtrationibus concipiendis, quam in propoſitionibus inveniendis.

CO-

COROLLARIUM 1.

263. Cum pars dextra sive secunda inter unitates, sinistra sive prima inter decades locum obtineat (§. 50); quadratum illius in loco dextimo, factum ex unius duplo in alteram in secundo, quadratum denique primæ in tertio a dextimo terminari debet (§. 49).

SCHOLION 2.

264. *Scilicet quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo facto ex parte una in alteram cyphra una, quadrato autem partis sinistræ duæ adjunguntur, ut numeri solitarie positi justum locum nanciscantur* (§. 49).

COROLLARIUM 2.

265. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures sinistimæ habeantur pro una, & extemplo patebit, quadratum numeri cujuscunque componi ex quadratis singularum partium & factis ex duplo partis cujuslibet in omnes ipsa sinisteriores: ut adeo theorema unum compositioni omnium numerorum quadratorum sufficiat.

SCHOLION 3.

266. *Sit radix* 346 *: sumatur* 340 *pro parte una &* 6 *pro altera; erit* (§. 261)

```
  340+6
  340+6
 ------
     36     Quadratum partis III.
   2040 }   Facta ex parte III. in I. & II. simul.
   2040 }
   1600     Quadratum partis II.
  12000 }   Facta ex I. in II.
  12000 }
  90000     Quadratum partis I.
 ------
 119716     Quadratum totius.
```

COROLLARIUM 3.

267. Quonam in loco singula producta terminentur, ex corollario primo & ejus scholio intelligitur (§. 263. 264). Habenda nimirum est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur, ut justum nanciscantur locum (§. 49).

SCHOLION 4.

268. *Extractio radicis quadratæ, alias tædii plena, facillima evadit, ubi quadratis per theorema præsens componendis operam prius impenderis.*

PROBLEMA 27.

269. ***Ex numero quocunque dato radicem quadratam extrahere.***

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Numerus propositus distinguatur in classes, binas notas classi unicuique assignando, initio a dextra facto. Tot enim erunt partes radicis, quot classes habentur (§. 265. 267). Notandum vero, quod classi sinistimæ interdum nonnisi nota unica relinquatur.
2. Jam cum in classe sinistima reperiatur quadratum notæ sinistimæ radicis (§. *cit.*); in Tabula radicum (§. 257) quæratur numerus quadratus ei, qui classem sinistimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipso subtrahatur; radix vero ejus post lunulam scribatur.
3. Quoti inventi duplum ponatur sub nota sinistima classis subsequentis & inde porro sinistrorsum, si ex notis pluribus constiterit. Investigetur novus quotus *per abacum Pythagoricum* (§. 109), inventusque post lunulam scribatur: est enim pars secunda radicis (§. 261. 210).
4. Idem quotus ponatur sub nota dextima illius classis & factum ex numero subscripto integro in divisorem (§. 263) subducatur, ut in divisione moris est.
5. Quodsi operatio juxta regulam tertiam & quartam in reliquis classibus iteretur; prodibit radix quæsita (§. 265. 267).

```
E. gr.  11|56(34          11|97|16(346
         9|::              9|::|::
        --|--             ----|--
         2|56              2|97|::
           64                64|::
          256               256|::
        -----             ----|--
            0                41|16
                              6|86
                             41|16
                          ---------
                                 0
```

PROBLEMA 28.

270. *Radicem quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator est numerus quadratus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit (§. 239), quadratum autem ex ductu ejusdem numeri in seipsum enascitur (§. 246); radicem quadratam extracturus eam sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita radix quadrata ex $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$, ex $\frac{49}{144}$ vero $\frac{7}{12}$.

COROLLARIUM 1.

271. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, si per hunc multiplicentur & facto tanquam numeratori denominator datus subscribatur (§. 224); si numerus datus, qui quadratus non est, ad fractionem reducatur, cujus denominator est quadratus & ex fractione extrahatur radix (§. 270): quæ prodit, fractio radicem prope veram exhibet in istiusmodi partibus, quas denominatoris quadrati radix indicat.

SCHOLION 1.

272. *E. gr. Si ex 2 extrahenda radix prope vera, quæ non deficiat in partibus sextis; duc 2 in 36, ut prodeat fractio $\frac{72}{36}$, cujus radix $\frac{8}{6}$ sive $1\frac{2}{6}$ exhibet radicem a vera magnitudine parte sexta non differentem, seu cujus defectus minor est quam $\frac{1}{6}$.*

COROLLARIUM 2.

273. Quoniam numerum per articulum primarium, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus eidem non nisi cyphras 0, 00, 000 &c. unitati adhærentes adjungere teneris (§. 112); radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans numero, qui quadratus non est, 2, 4, 6 &c. cyphras junge dextrorsum & operationem continua: ita enim prodibit radix prope vera in partibus decimis, centesimis, millesimis &c.

SCHOLION 2.

274. E. gr. *Sit extrahenda radix quadrata ex 345; prodibit $\frac{1857}{100}$.*

```
3 | 45 ( 18 57/100
1 | ::
-----------
2 | 45
 (2.8)
 224 |
-----|
  2.1. | 0.0
  (3   | 6.5)
 1 8   2 5
-------------
   2 7.5. | 0.0
   (3 7   | 0 7)
   2 5 9  | 4 9
-------------
     1 5  5 1
```

SCHOLION 3.

275. *Si tabulis numerorum quadratorum pro radicibus ab 1 usque ad 1000 utaris; in iis evolvi potest numerus quadratus proxime minor eo, qui tres classes sinisteriores occupat. Ita sine ullo labore habentur tres notæ priores, e. gr. in nostro casu 294. Plures notæ una inveniuntur, si tabulæ longius extendantur.*

```
8 | 69 | 7.5      (294 9/10
8 | 64 | 3 6
--------------
   5 3 9 | 0.0
  (5 8   | 8 0)
   5 3 0 | 0 1
--------------
     8 9 9
```

THEOREMA 54.

276. *Numerus cubicus radicis binomiæ componitur ex numeris cubicis duarum partium, ex facto tripli quadrati partis primæ in secundam & ex facto tripli quadrati partis secundæ in primam.*

DEMONSTRATIO.

Numerus cubicus prodit, si quadratum per radicem multiplicetur (§. 248). Sed quadratum radicis binomiæ componitur ex quadratis partium & facto duplo ex parte una in alteram (§. 261). Quare cubus componitur ex cubo partis primæ, ex triplo

plo facto quadrati partis primæ in secundam, ex triplo facto quadrati partis secundæ in primam, hoc est, ex facto tripli quadrati partis primæ in secundam, & facto tripli quadrati partis secundæ in primam (§. 207) atque ex cubo partis secundæ (§. 246. 248). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

277. *Demonstrationem ocularem denuo sistis exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit e. gr. radix 34 seu 30+4, erit*

30+4	*Radix*
16	*Quadrat. part. II.*
120 120	*Facta ex I. in II.*
900	*Quadrat. part. I.*
64	*Cubus part. II.*
480 480	*Facta ex quadrat. II. in I.*
3600	*Factum ex quadrat. I. in II.*
480	*Factum ex quadrat. II. in I.*
3600 3600	*Facta ex quadrat. I. in II.*
27000	*Cubus part. I.*
39304	*Cubus totius.*

COROLLARIUM 1.

278. Cum pars dextra inter unitates, sinistra inter decades locum obtineat (§. 50); numerus cubicus dextræ in loco dextimo, factum ex triplo quadrato ejus in sinistram in secundo, factum ex triplo quadrato sinistræ in dexteram in tertio, cubus denique partis sinistræ in quarto loco terminatur (§. 49).

COROLLARIUM 2.

279. Si radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ finitimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; exemplo patet, quod cubus quicunque componatur ex cubis singularum partium radicis & ex factis tripli quadrati quarumlibet sinisteriorum in proxime dexteriorem, itemque ex factis tripli quadrati cujuslibet dexterioris in omnes sinisteriores.

SCHOLION 2.

280. *Sit radix 346. Sume 340 pro parte una radicis, erit 6 pars altera, consequenter (§. 276)*

346	
346	
90000	*Quadrat. part. I.*
12000 12000	*Facta ex I. in II.*
1600	*Quadrat. part. II.*
115600	*Quadrat. I. & II. simul.*
2040 2040	*Facta ex III. in I. & II. simul.*
36	*Quadrat. part. III.*
27000000	*Cubus part. I.*
3600000 3600000	*Facta ex quadr. I. in II.*
480000	*Fact. ex quadr. II. in I.*
3600000	*Fact. ex quad. I. in II.*
480000 480000	*Facta ex quadr. II. in I.*
64000	*Cubus part. II.*
693600 693600	*Facta ex quadr. I. & II. simul in III.*
12240	*Fact. ex quadr. III. in I. & II. simul.*
693600	*Fact. ex quadr. I. & II. simul in III.*
12240 12240	*Facta ex quadr. III. in I. & II. simul.*
216	*Cubus part. III.*
41421736	*Cubus totius.*

Notandum scilicet, sectionem numeri in duas partes arbitrariam esse, cumque theorema generaliter de radice utcunque in duas partes divisa loquatur, idem quoque ad quamlibet sectionem applicari posse. E. gr. numerus 346 non modo stante theoremate in 340 & 6, vel in 300 & 46, verum etiam in 195 & 151, in 89 & 257, & in duas quascunque alias partes dividi potest: id quod etiam tentanti palam fit. Ceterum idem valere in numeris quadratis, imo in genere in potentiis quibuscunque, me tacente intelligitur.

COROLLARIUM 3.

281. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex corollario primo (§. 278) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur. *Vide exemplum in schol. præc.* (§. 280).

PROBLEMA 29.

282. *Ex numero dato radicem cubicam extrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Numerus datus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto. Etenim ex tot notis radix componitur, quot classes emergunt (§. 278. 281). Notandum

vero, non repugnare, ut classi finistimæ una vel duæ notæ cedant.

2. In Tabula radicum (§. 257) quæratur numerus cubicus eo proxime minor numero, qui in classe finistima continetur, nisi ipse in eadem inveniatur, atque ab hoc subtrahatur; ejus vero radix post lunulam scribatur: est enim pars prima radicis (§. 278).

3. Quoti inventi quadratum triplum (§. 278. 281) scribatur sub nota finistima classis subsequentis & inde porro finistrorsum si ex pluribus notis constiterit: quo facto quæratur quotus, qui erit pars secunda radicis (§. *cit.* & §. 210).

4. Divisor ducatur in novum quotum & productum sub eo deleto scribatur, sub nota vero media classis ejusdem terminetur factum ex triplo quadrato novi quoti in præcedentem; sub dextima denique cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam summam collecta ex notis numeri cubici suprascriptis subtrahantur (§. *cit.*).

5. Quodsi operatio per reliquas classes juxta regulam tertiam & quartam continuetur; prodibit radix quæsita (§. 279).

E. gr.

	4 4	437	928 (362
	2 7		
	2 0	4 3 7	
Divisor	(2	7) . .	
Fact. ex D. in Q.	2 6	2 . .	
Fac. ex 3 □N. Q. in. pr.	3	2 4 .	
Cubus N. Q.		2 1 6	
Summa factorum	2 8	8 5 6	
		4 8 2	9 2 8
Divisor		(3 8 8	8) . .
Fact. ex Div. in Q. N.		7 7 7	6 . .
Fact. ex 3 □N. Q. in pr.		4	3 2 .
Cubus N.Q.			8
Summa factorum		4 8 2	9 2 8
		000	000

PROBLEMA 30.

283. *Radicem cubicam ex fractione extrahere, cujus numerator & denominator cubus est.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Eodem, quo supra (§. 270), modo patet, radicem sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ est $\frac{3}{7}$; ex $\frac{64}{729}$ vero $\frac{4}{9}$.

COROLLARIUM 1.

284. Hinc porro eodem, quo supra (§. 271), modo consequitur, radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, si numerus, qui cubus non est, per hujus denominatoris cubum multiplicetur, & radici cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus subjiciatur.

SCHOLION 1.

285. E. gr. *Si ex* 12 *extrahenda radix cubica prope vera, defectu minore quam* $\frac{1}{8}$; *ducatur* 12 *in* 512 *cubum ipsius* 8 *& ex facto* 6144 *extrahatur radix cubica* 18, *erit* $\frac{18}{8}$ *seu* $2\frac{2}{8}$ *radix prope vera, cujus defectus est minor quam* $\frac{1}{8}$.

COROLLARIUM 2.

286. Imo inde ulterius eodem, quo supra (§. 273), modo fluit, radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, si 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non cubo dextrorsum pro decimis, centesimis, millesimis &c. partibus jungantur & operatio (§. 282) continuetur.

SCHOLION 2.

287. E. gr. *Sit extrahenda radix cubica ex* 3; *eam reperies* $1\frac{44}{100}$.

3	($1\frac{44}{100}$
1	
2.	0.0.0
	3 . .
1	2 . .
	4 8 .
	6 4
1	7 4 4
2 5 6.	0.0.0
8 8	8 . .
2 3 5	2 . .
6	7 2 .
	6 4
2 4 1	9 8 4
1 4	0 1 6

SCHO-

SCHOLION 3.

288. *Si tabulis numerorum cubicorum utaris, idem operæ compendium facere licet, quod supra (§. 275) in extrahenda radice quadrata commendavimus.*

PROBLEMA 31.

289. *Examinare extractionem radicis quadratæ ac cubicæ.*

RESOLUTIO.

I. Radix quadrata inventa ducatur in seipsam, & facto residuum, si quod fuerit, addatur. Quodsi numerus prodeat, ex quo radix extracta; erit numerus inventus radix quadrata dati vel exacta, vel (si talem non habeat) prope vera (§. 246).

```
   18.57
   18.57
--------
   12999
   9285
 14856
 1857
--------
 3448449
    1551
--------
 3450000
```

E. gr. Radicem quadratam prope veram ex 345 supra (§. 274) reperimus $18\frac{57}{100}$. Duc radicem 18.57 in seipsam & facto 3448449 adde residuum 1551: prodibit numerus 345, ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus: ut in extractione ad inveniendas centesimas factum fuerat.

II. Radix cubica inventa ducatur in seipsam, & factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur, si quod fuerit, residuum. Quodsi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§. 248).

```
    1.44
    1.44
--------
     576
    576
   144
--------
   20736
     144
--------
   82944
  82944
  20736
--------
 2985984
   14016
--------
 3000000
```

E. gr. Superius (§. 287) ex 3 extracta radix est $1\frac{44}{100}$. Duc hanc radicem 1.44 in seipsam & factum 20736 denuo in 1.44. Producto alteri 2985984 adde, quod supra residuum erat, 14016. Aggregatum est radix 3 sex cyphris aucta, ut in operatione factum fuerat.

THEOREMA 55.

290. *Exponens rationis quadratorum est quadratum, cuborum cubus & in genere potentiarum cujuscunque gradus potentia ejusdem gradus exponentis radicum.*

DEMONSTRATIO.

Quadrata enim habent rationem duplicatam, cubi triplicatam & in genere potentiæ cujuscunque gradus rationem multiplicatam suarum radicum (§. 259). Quare cum exponens rationis compositæ sit æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium (§. 214), exponens vero rationum simplicium, ex quibus componuntur duplicatæ, triplicatæ & in genere multiplicatæ quæcunque, idem sit (§. 159. 154. 149); exponens rationis duplicatæ erit quadratum (§. 246), triplicatæ cubus (§. 248) & in genere multiplicatæ cujuscunque potentia ejusdem gradus exponentis radicum (§. 250). Patet adeo propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA 56.

291. *Si ex divisione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum & in genere potentiæ cujuscunque per aliam similem, numerus integer prodit; etiam ex divisione radicis per radicem integer prodire debet.*

DEMONSTRATIO.

Quotus ex divisione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum & in genere potentiæ cujuscunque per aliam similem emergens est exponens rationis quadratorum, cuborum, vel in genere potentiarum similium se mutuo dividentium (§. 136), adeoque quadratum, cubus & in genere potentia exponentis rationis radicum (§. 290).

Quare

Quare cum idem sit numerus rationalis integer *per hypoth.* erit idem numerus rationalis integer quadratus, cubus vel potentia alterius gradus: cujus quoniam radix itidem rationalis integer esse debet (§. 250); etiam exponens radicum numerus rationalis integer erit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Quare si radix radicem non metitur, nec quadratum quadratum, nec cubus cubum, nec potentia quæcunque aliam similem metitur (§. 74), consequenter fractio integro major ex istiusmodi quadratis, cubis vel potentiis quibuscunque similibus composita ad numerum integrum irreducibilis (§. 223).

THEOREMA 57.

293. ***Si numeri integri non datur radix in integris, nec dabitur per fractos.***

DEMONSTRATIO.

Ponamus dari numerum fractum, qui sit radix. Ex ejus itaque iterata multiplicatione per seipsum produci debet numerus datus (§. 250). Sed quotiescunque fractum per seipsum multiplicas, productum semper est fractus (§. 239) isque in præsente casu ad integrum irreducibilis (§. 292). Quare cum numerus datus sit integer *ex hypoth.* fractus ejus radix esse nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

294. Jam cum numeri primi in se ex nullo alio numero in se aliquoties ducto oriantur (§. 75); ex numeris primis in se nulla perfecta radix extrahi potest in integris (§. 256), adeoque nec per fractos dari potest (§. 293).

HYPOTHESIS 13.

295. ***Interdum utile est, extractionem radicis tantum indicari, præsertim si perfecta haberi nequit. Est autem signum radicale sequens*** √, ***cui in vertice jungitur exponens dignitatis, si altioris gradus, quam quadrata.*** E. gr. $\sqrt{2}$ denotat radicem ex 2; $\sqrt[3]{5}$ denotat radicem cubicam ex 5.

SCHOLION.

296. *In Geometria & Analysi demonstrabitur, tales radices, quæ actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam; consequenter numeros (§. 10) eosque irrationales, cum ex hypothesi rationales non sint. Dicuntur vulgo numeri* surdi; *quamvis olim hujus vocis significatus strictior fuerit (a). Et olim, & nunc interdum* radicales *nuncupari sueverunt.*

CAPUT VI.

De Regulis Proportionum.

THEOREMA 58.

297. ***SI fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur facto mediarum.***

DEMONSTRATIO.

6 : 3	=	8 : 4
4		3
24	=	24

A : B = C : D (*per hypoth.* & §. 152). Ergo AD : BC = CD : DC (§. 185). Sed CD = DC (§. 207). Igitur AD = BC (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA 59.

298. ***Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum est æquale mediæ quadrato.***

DEMONSTRATIO.

6 : 12	=	12 : 24
12		6
144	=	144

Quoniam enim A : B = B : C (*per hypoth.* & §. 156. 152); erit AC = BB (§. 297). Sed BB est quadratum ipsius

(a) Vide Stifelius in Arithm. integra lib. 2. c. 12. p. 134.

ipsius B (§. 246). Ergo factum extremarum AC æquatur quadrato mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 60.

299. *Si quantitas AD producta ex duabus aliis se mutuo multiplicantibus A & D, fuerit æqualis alteri BC ex duabus aliis B & C eodem modo productæ; erit $A:B=C:D$.*

DEMONSTRATIO.

6	8	AC:AD = C:D (§. 178).
4	3	Sed AD = BC *per hypoth.*
24 = 24		Ergo AC : BC = C:D (§. 168), consequenter A : B
4:8 = 3:6		= C : D (§. 181). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

300. Si ergo in serie quatuor quantitatum factum ex secunda in tertiam æquale sit facto ex prima in quartam; erunt quantitates illæ proportionales.

PROBLEMA 32.

301. *Inter duos numeros, e. gr. 8 & 72, medium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8 (§. 111).
2. Ex facto 576 extrahatur radix quadrata 24 (§. 269): quæ erit numerus quæsitus (§. 298).

PROBLEMA 33.

302. *Datis tribus numeris, e. gr. 3, 12 & 5, quartum; aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium 5, aut in altero casu secundus in seipsum.
2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 est quartus, in altero casu tertius quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Si enim terminum secundum per tertium, aut in altero casu secundum per seipsum multiplicas; factum ex primo in quartum, in casu altero ex primo in tertium prodit (§. 297. 298). Quodsi ergo hoc per primum dividis; quotus est terminus quartus, in casu altero tertius (§. 210). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

303. Data quælibet fractio converti potest in aliam æqualem datæ denominationis. Etenim si *per probl. præs.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem desideratæ quæratur numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæsitæ (§. 225). E. gr. sit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam cujus denominator 24, reperietur ea $\frac{16}{24}$.

3 —— 2 —— 24	
2	
48	
x8(16	
xx	

COROLLARIUM 2.

304. Quodsi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore assumitur; valor fractionis datæ in mensura vulgari reperitur. E. gr. Cum apud nos thalerus in 24 grossos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 grossos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM 3.

305. Si vero denominator assumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3}=\frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$; $\frac{1}{7}=\frac{142857}{1000000}$ fere.

SCHOLION 1.

306. *In fractionibus decimalibus denominator omitti solet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate constat. Ejus vero loco punctum (.) numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut e. gr. duæ cyphræ præponantur, si fractio a millesimis incipiat. Ita loco* $\frac{23}{100}$ *scribimus* 0.23; *loco* $5\frac{47}{10000}$ *scribimus* 5.0047. *Est vero harum fractionum non exiguus in Mathesi usus, quas primus in condendis Tabulis sinuum adhibuit* Joannes Regiomontanus.

SCHOLION 2.

307. *Resolutio hujus problematis vulgo* Regula trium *appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Usus ejus amplissimus tam in vita communi, quam in scientiis. Hinc* Regula aurea *vocatur. Facile autem apparet, hac regula nullibi esse utendum, nisi ubi de numerorum datorum proportione constiterit.* E. gr. *Sit vas ingens aqua repletum per exiguum in fundo foramen effluxura, si aperiatur. Ponamus, in-*

tra

tra 2 minuta prima effluere 3 congios. Inveniri debet, quanto tempore 100 congii effluant. Tres in hoc casu dantur numeri; quartus inveniendus. Enimvero vel ipsa experientia docet, aquam sub initium celerius, postea tardius effluere, consequenter quantitatem aquæ effluentis non esse tempori proportionalem. Quamobrem hæc quæstio per regulam trium solvi nequit.

SCHOLION 3.

308. *Quæ in commercium veniunt, pretiis suis proportionalia sunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium solvit. Dato igitur pretio quantitatis cujusdam determinatæ mercis, per regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuscunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio respondens. E. gr. pretium 3 librarum sunt 4 thaleri, quantum est pretium 17 librarum? Cum sit, ut 3 libræ ad 17 libras, ita illarum pretium (quod est 4 thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:*

3 L. —— 17 L. —— 4 Th.
4
———
68

2
68 ($22\frac{2}{3}$ th.
33

Item: 3 libræ veneunt 4 thaleris, quot $22\frac{2}{3}$ thaleris? Cum sint ut 4 thaleri ad $22\frac{2}{3}$, ita 3 libræ ad quæsitas; harum numerus ita innotescit:

4 th. —— $22\frac{2}{3}$ Th. —— 3 L.
3
———
68

2
68 (17 L.
44

Hinc simul patet, quomodo regula trium examinetur, hoc est, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

SCHOLION 4.

309. *Similiter merces operariorum est tempori proportionalis, quo labore defunguntur; etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, si æqualibus articulis æqualia pensa absolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, si pensa æqualia singuli absolvunt. E. gr. intra 2 horas 6 libri folia perleguntur: Quanto horarum spatio 360 perlegi poterunt?*

6 F. —— 360 F. —— 2 H.
2
———
720

1
720 (120 H.
666

SCHOLION 5.

310. *Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipsis respondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in grossos, grossi in nummos, libræ in semuncias, horæ in minuta &c. convertuntur. E. gr. 3 libræ & 4 semunciæ veneunt 2 thaleris & 4 grossis, quanti libræ 2? Calculus talis est:*

3. L. 4 S. —— 2 L. —— 2 Th. 4. gr.
32 —— 32 —— 24
———
100 S. —— 64 S. —— 52 gr.
52
———
128
320
———
3328

33 28
11 00 ($33\frac{28}{100}$ seu $33\frac{7}{25}$ gr.

Quodsi nosse cupias, quot nummis conveniant $\frac{7}{25}$ grossi; ita reperies (§. 304):

25 —— 7 —— 12
7
———
84

19
84 ($3\frac{9}{25}$ num.
25

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ unius nummi eodem modo reperiri: sed cum tanti non sit, ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.

SCHOLION 6.

311. *In scriptis Arithmeticorum* Regula trium inversa *occurrit, qua terminus datorum primus duci jubetur in secundum & factum dividi per tertium, contraria nimirum ratione, qua in* Regula trium directa *usi sumus (§. 302. 307), quia scilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non est, si numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. E. gr. 125 milites operi exstruendo 6 menses impendunt: quantus requiritur militum numerus, ut intra 2 absolvatur? Evidens est, quod sit, ut spatium 2 mensium ad spatium 6 mensium, ita numerus militum, qui opus intra sex menses absolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem exstruunt. Quo minore enim temporis intervallo exstruitur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:*

2 M. —— 6 M. —— 125 Mil.
6
———
750

11
750 (375 Mil.
222

SCHOLION 7.

312. *Interdum gemina regulæ trium applicatione opus est, antequam numerus quæsitus innotescat. Ea vulgo pro peculiari regula venditatur & ab aliis* Regula de quinque, *ab aliis* Regula composita *appellatur. E. gr. 300 thaleri dant intra 2 annos usuram 36 thalerorum, quantam dabunt 20000 thaleri intra 12 annos? Hic per regulam trium primum invenitur, quanta sit usura a 20000 expectanda intra 2 annos. Dein per eandem investigatur, quanta eadem intra 12 annos existat.*

300 Th. —— 20000 Th. —— 36 Uf.
36
———
720000

1
7200 00 (2400 Uf.
3333 00

2. A.

1 A.—— 12 A.—— 2400 Us.

	12
	4800
	24
28800 (14400 Us.	28800

SCHOLION 8.

313. *Exemplis istiusmodi regula trium semel applicata satisfacere potest. Cum enim in nostro casu bis 300 thaleri eandem dent usuram intra 1 annum, quam 300 intra 2, & duodecies 20000 tantam intra 1 annum, quantam 20000 intra 12; omissis temporis circumstantiis ita inferatur: bis 300, id est 600 thaleri dant usuram (intra annum scilicet) 36, quantam dabunt duodecies 20000, id est 240000 thaleri (itidem intra annum)?*

600 Th.—— 240000 Th.—— 36 Us.

36	
1440000	
72	
8640000	8640000 / 600 (14400

Posterior hæc methodus priori præfertur, quod in illa ad fractionum tædia sæpe prolabimur.

SCHOLION 9.

314. *Dantur & alii casus, in quibus iteratæ regulæ trium applicationi supersedere non licet. Ita, si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur, quot sunt socii. Est enim ut summa collatorum ad lucrum vel damnum commune; ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. E. gr. Lucrum commune trium personarum est 2000 thalerorum, collatum primi 1000, secundi 500, tertii 300: inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi:*

Collatum primi	1000 Th.
secundi	500
tertii	300
Summa collatorum	1800 Th.

1800 Th.—— 1000 Th.—— 2000 Th.

2 000

2000000

2000000 / 1800 ($1111\frac{2}{18}$ Lucrum primi.

1800 Th.—— 500 Th.—— 2000 Th.

2 000

1000000

1000000 / 1800 ($555\frac{10}{18}$ Lucrum secundi.

1800 Th.—— 300 Th.—— 2000 Th.

2 000

600000

600000 / 1800 ($333\frac{6}{18}$ Lucrum tertii.

EXAMEN.

$1111\frac{2}{18}$	Lucrum primi
$555\frac{10}{18}$	secundi
$333\frac{6}{18}$	tertii
2000 Th.	Lucrum commune.

SCHOLION 10.

315. *Non desunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum in Medicina aut artibus aliis ex data ratione, quam pondera miscibilium inter se habent, inveniuntur pondera miscibilium requisita, ut mixtum integrum sit ponderis dati. E. gr. Tria simplicia compositionem alicujus medicamenti ingrediuntur, dosis unius est 4, alterius 5, tertii 2 unciarum: inveniri debent doses singulorum requisitæ, ut pondus compositi sit 8 librarum. En calculi typum:*

Pondus	primi simplicis	4 Unc.
	secundi simplicis	5
	tertii simplicis	2
	Summa	11 Unc.

11 Unc.—— 8 L.—— 4 Unc.

16

128 Unc.

4

512

512 / 11 ($46\frac{6}{11}$ pond. simp. primi.

11 Unc.—— 128 Unc.—— 5 Unc.

5

640

640 / 11 ($58\frac{2}{11}$ Pond. simp. secund.

11 Unc.—— 128 Unc.—— 2 Unc.

2

256

256 / 11 ($23\frac{3}{11}$ Pond. simp. tertii.

EXAMEN.

Pondus simplicis primi	$46\frac{6}{11}$ Unc.
secundi	$58\frac{2}{11}$
tertii	$23\frac{3}{11}$
Pondus mixti	128 Unc. = 8 lib.

SCHOLION 11.

316. *Subinde compendiis locus datur, quæ* practicæ Italicæ *nomen ferunt. Ex iis utillissima commemoramus. Nimirum quoniam per regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis* (§. 302); *primus & secundus* (§. 181) *vel etiam primus & tertius* (§. 183) *per eundem, si fieri potest, numerum exacte dividantur & quoti in ipsorum loca surrogentur: ceu ex subsequente apparet exemplo.*

Pretium 3 Libr. *est* 9 Thal. *quantum* 7 libr.
3) 1 3 3

Fac. 21 Thal.

Pretium 14 Libr. *est* 26 Thal. *quantum* 7 libr.
7) 2 2)— 1

Fac. 13 Thal.

SCHOLION 12.

317. *Si numerus primus vel tertius fuerit* 1 *& alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus; absque reductione in* schol. 5 (§. 310) *præscripta calculus initur, ut sequens exemplum docet.*

Pretium 1 Lib. *est* 3 th. 8 gr. 6 num. *quantum* 5 Lib.
5

16 th. 18 gr. 6 num.

Manifestum scilicet est, bis 6 nummos conficere grossum unum, adeoque quinquies 6 grossos 2, & nummos 6. Similiter ter 8 grossi thalerum 1, & insuper bis 8 grossos 16 efficiunt. Quod si ergo thalerus iste 15 reliquis, & 2 priores grossi 16 reliquis addantur; prodibit pretium quæsitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLION 13.

318. *Si terminus primus vel secundus fuerit* 1, *& in priore casu secundus aut tertius, in posteriore primus in factores resolvi potest; integram sæpe operationem sine scriptionis subsidio mens absolvit: id quod exempla, quæ sequuntur, docent.*

Pretium 1 Libr. *est* 24 th. *quantum* 20 libr.
4 4
6

80
6

Fac. 480 th.

Pretium 12 libr. *est* 18 th. *quantum* 1 libr.
3 2
4 ~~18~~ (~~6~~ ($1\frac{1}{2}$ th.
~~3~~ ~~4~~

Potest etiam numerus datus resolvi partim in factores, partim in partes componentes. E. gr. 1 libra constat 9 grossis, quodnam est pretium 35 librarum?

Quoniam 1 *libra constat* 9 *grossis*
constabunt 3 *lib.* 1 *thal.* 3 *gr.*

30 *lib.* 11 *thal.* 6 *gr.*
5 *lib.* 1 *thal.* 21 *gr.*

35 *lib.* 13 *thal.* 3 *gr.*

Hic nempe numerus 35, *per quem multiplicatio fieri debet, resolvitur in partes* 30 *&* 5, *pars vero altera* 30 *in factores* 3 *&* 10.

SCHOLION 14.

319. *Si numerorum datorum unus fuerit* 1, *multa compendia similia multiplicatio & divisio sine abaci Pythagorici subsidio peragenda* (§. 116. 120), *suppeditat. E. gr. pretium* 9 *librarum est* 20 *thalerorum, quantum est pretium unius? Statim hic apparet, haberi pretium desideratum, si parti decimæ illius, id est* 2 *thaleris, addatur pars nona hujus decimæ, id est* $\frac{2}{9}$ *unius thaleri, ut adeo inveniatur* $2\frac{2}{9}$ *thal. Item: pretium* 5 *librarum est* 54 *thalerorum, quantum erit pretium* 1 *libræ? R. Quoniam pretium quæsitum est quinta pars dati, duplum partis decimæ pretii dati* $10\frac{4}{5}$ *thal. erit quæsitum. Item: pretium* 1 *libræ est* 18 *grossorum, quantum erit librarum* 19? *R. Quoniam* 19 = 20 − 1, *a duplo pretii dati cyphra aucti* 360 *subducatur simplum* 18; *residuum erit pretium* 342 *grossorum quæsitum.*

SCHOLION 15.

320. *Si duo termini ejusdem denominationis unitate differant, singulari quodam compendio utimur, quod ex subjunctis exemplis manifestum. E. gr. pretium* 5 *librarum est* 30 *thalerorum, quantum erit* 4 *librarum? R. Quoniam pretium* 4 *librarum una parte quinta deficere debet a pretio* 5 *librarum; pretium datum* 30 *dividatur per* 5 *& quotus* 6 *ab eodem subtrahatur, relinquitur quæsitum* 24. *Item: pretium* 8 *librarum est* 24 *thalerorum, quantum erit librarum* 9? *R. Quia pretium* 9 *librarum una parte octava excedit pretium* 8 *librarum, pretium datum* 24 *dividatur per* 8 *& quotus* 3 *eidem addatur, summa* 27 *erit quæsitum.*

SCHOLION 16.

321. *Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur. E. gr.*

Pretium 100 libr. *est* 30 th. 4 gr. *quantum* 50 libr.
50) 2 2) 1

Fac. 15 th. 2 gr.

Item: Pretium 60 libr. *est* 80 th. *quantum* 2520 libr.
60) 1 6 42

480 6
7 7

Fac. 3360 thal.

CAPUT

CAPUT VII.

De Quantitatibus Æquidifferentibus.

Definitio 61.

322. Si in ferie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & fecundæ, quæ fecundæ ac tertiæ; eas *continue æquidifferentes* voco. Si vero in ferie quatuor eadem fuerit differentia primæ & fecundæ, quæ tertiæ ac quartæ; *difcretim æquidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 & 10 funt numeri difcretim æquidifferentes: 3, 6 & 9 numeri continue æquidifferentes.

Scholion.

323. *Dicuntur hæ quantitates vulgo* Arithmetice proportionales, *& vere proportionales, de quibus ante* (§. 155. 156), Geometrice proportionales *appellari folent, ut ab illis diftinguantur: fed minus proprie, nec ad mentem veterum.*

Corollarium 1.

324. Si termini femper crefcunt; in continue æquidifferentibus terminus fecundus eft aggregatum ex primo & differentia; tertius fumma ex fecundo & differentia: fi decrefcunt; primus eft aggregatum ex fecundo & differentia; fecundus aggregatum ex tertio & differentia (§. 106).

Corollarium 2.

325. Similiter in difcretim æquidifferentibus fi termini crefcunt; fecundus eft aggregatum ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia: fi vero decrefcunt; primus eft aggregatum ex fecundo & differentia; tertius ex quarto & differentia (§. 106).

Theorema 61.

326. *Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes, fumma primæ & tertiæ eft mediæ dupla.*

Demonstratio.

4	7	10
	7	4
14	=	14

Si enim termini crefcunt; fecundus componitur ex primo & differentia, tertius ex fecundo & differentia (§. 324), adeoque ex primo & differentia dupla. Quare fi tertio addatur primus; fumma primi & tertii conftabit ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo fecundi dupla. *Q. e. d.*

Eodem modo demonftratio procedit, fi termini decrefcunt.

Scholion.

327. *Si terminus primus fit* I, *fecundus* II, *tertius* III, *differentia* D; *demonftratio ocularis erit iftiusmodi:*

$$\mathrm{II} = \mathrm{I} + D$$
$$\mathrm{III} = \mathrm{II} + D$$

Ergo $\mathrm{III} = \mathrm{I} + 2D$

Hinc $\mathrm{III} + \mathrm{I} = 2\,\mathrm{I} + 2D = 2\,\mathrm{II}$.

Theorema 62.

328. *Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes, aggregatum primæ & quartæ æquale eft aggregato fecundæ & tertiæ.*

Demonstratio.

3 — 5	=	8 — 10	
8		3	
13	=	13	

Si termini crefcunt; fecundus componitur ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia (§. 325). Quare fi primus quarto addatur; aggregatum ex primo, tertio & differentia conftat. Si vero fecundum tertio addas; aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter fe æqualia (§. 88). *Q. e. d.*

Eodem modo demonftratio procedit, fi confequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLION.

329. *Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonstratio singularis erit istiusmodi:*

II = I + D   IV = III + D
III   III   I   I

II + III = III + I + D   IV + I = I + III + D

PROBLEMA 34.

330. *Inter duos numeros datos, e. gr. 9 & 13, medium æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22 dividatur bifariam sive per 2. Quotus 11 erit numerus quæsitus (§. 326).

PROBLEMA 35.

331. *Datis tribus numeris, e. gr. 8, 5 & 9, quartum æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Numerus secundus 5 addatur tertio 9.
2. A summa 14 subtrahatur primus 8. Residuus 6 est quartus quæsitus (328).

CAPUT VIII.

De Logarithmis.

DEFINITIO 62.

332. Series quantitatum juxta eandem rationem crescentium vel decrescentium vocatur *Progressio Geometrica*. E. gr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, vel 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

DEFINITIO 63.

333. Series quantitatum secundum eandem differentiam crescentium vel decrescentium dicitur *Progressio Arithmetica*. E. gr. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, vel 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4.

DEFINITIO 64.

334. Si numeris in ratione Geometrica progredientibus subscribantur totidem alii æquidifferentes; dicuntur hi illorum *Logarithmi*. *Stifelius* in Arithmetica sua (*a*) *exponentes* vocat. E. gr. sint duæ progressiones

Geom. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,
Arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;

erit 0 logarithmus termini primi 1; 5 logarithmus sexti 32; 7 logarithmus octavi 128 &c.

COROLLARIUM 1.

335. Si progressio arithmetica fuerit series numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi designant distantias numerorum proportionalium ab unitate.

COROLLARIUM 2.

336. Cumque in progressione geometrica ab unitate incipiente termini sint dignitates ordine naturali se mutuo excipientes (§. 250. 332), si progressio arithmetica eadem sit, quæ in exemplo allato; logarithmi sunt exponentes dignitatum (§. 251). E. gr. 2 est dignitas prima ejusque exponens 1, 64 dignitas sexta ejusque exponens 6.

THEOREMA 63.

337. *Si Logarithmus unitatis sit 0; erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.*

(a) Lib 3. c. 5. p. 249 b.

DE-

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut unitas ad factorem unum ita factor alter ad factum (§. 66). Quare logarithmus facti eſt æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 334), adeoque differentia inter logarithmum unitatis & ſummam logarithmorum efficientium (§. 331). Sed logarithmus unitatis eſt o *per hypoth.* Ergo ſumma ex logarithmis efficientium eſt logarithmus facti. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

338. Cum factores quadrati ſint inter ſe æquales, hoc eſt, quadratum ſit factum ex radice in ſeipſam (§. 246); logarithmus quadrati eſt duplus logarithmi radicis.

COROLLARIUM 2.

339. Eodem modo patet, logarithmum cubi eſſe triplum (§. 248); biquadrati quadruplum; potentiæ quintæ quintuplum; ſextæ ſextuplum &c. logarithmi radicis (§. 250).

COROLLARIUM 3.

340. Eſt ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus radicis ad logarithmum potentiæ ſeu ipſius dignitatis (§. 251. 255).

COROLLARIUM 4.

341. Quare logarithmus potentiæ prodit, ſi logarithmum radicis multiplices per exponentem ejus (§. 66); adeoque logarithmus radicis habetur, ſi logarithmus dignitatis per ejus exponentem dividatur (§. 210).

SCHOLION.

342. *E. gr.* 3, *ſumma logarithmorum* 1 *&* 2, *eſt logarithmus producti* 8 *ex* 2 *in* 4. *Similiter* 7, *ſumma logarithmorum* 2 *&* 5, *eſt logarithmus producti* 128 *ex* 4 *in* 32. *Porro* 3, *logarithmus radicis quadratæ* 8, *eſt dimidius logarithmi* 6 *quadrati* 64, *&* 2, *logarithmus radicis cubicæ* 4, *eſt ſubtriplus logarithmi* 6 *cubi* 64.

THEOREMA 64.

343. *Si logarithmus unitatis eſt o, erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum diviſoris & dividendi.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut diviſor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 69). Quare logarithmus quoti eſt æquidifferentium quartus ad logarithmos diviſoris & dividendi, atque logarithmum unitatis (§. 334), adeoque differentia inter logarithmum diviſoris & ſummam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 331). Sed logarithmus unitatis eſt o *per hypoth.* Ergo differentia logarithmi diviſoris a logarithmo dividendi eſt logarithmus quoti. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

344. *E. gr.* 2 *differentia inter* 7 *&* 5 *eſt logarithmus quoti* 4 *ex* 128 *per* 32. *Similiter* 5 *differentia inter* 8 *&* 3 *eſt logarithmus quoti* 32 *ex* 256 *per* 8.

SCHOLION 2.

345. *Progreſſiones arithmeticas cum geometricis confert, logarithmorum proprietates hactenus recenſitas recenſet, atque varios eorum uſus monſtrat* Stifelius (a): *qui tamen longe cedunt uſui logarithmorum in Trigonometria a* Juſto Byrgio *primum reperto* (b), *ſed a* Joanne Nepero *ſupra laudato, primum oſtenſo* (c).

PROBLEMA 36.

346. *Numeri cujuſcunque logarithmum invenire, ac Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam 1, 10, 100, 1000, 10000 &c. Progreſſionem Geometricam conſtituunt (§. 332); eorum logarithmi arbitrario aſſumi poſſunt, modo ſint numeri in progreſſione arithmetica progredientes (§. 334). Ut igitur intermediorum logarithmos

(a) In Arithm. lib. 1. cap. 4. p. 35. & ſeqq. & lib. 3. c. 5. p. 249. b. & 50.

(b) Keplerus in Tabulis Rudolphinis c. 3. f. 11.

(c) In Mirifici Logarithmorum Canonis deſcriptione.

mos per fractiones decimales exprimere liceat; assumantur 0.00000000, 1.00000000, 2.00000000, 3.00000000, 4.00000000 &c.

2. Equidem manifestum est (§. 334) numerorum, qui in scala progressionis geometricæ non continentur, logarithmos accuratos haberi non posse; adeo tamen veris propinquos reperire licet, ut, si usum spectes, accuratis æquipolleant. Quod ut appareat, ponamus inveniendum esse logarithmum novenarii seu 9. Inter 1.0000000 & 10.0000000 quæratur medius proportionalis C (§. 301), & inter eorum logarithmos 0.00000000 atque 1.00000000 medius æquidifferens (§. 330), qui erit logarithmus ipsius C (§. 334), hoc est, numeri ternarium superantis $\frac{1622777}{10000000}$, adeoque a novenario multum distantis. Quæratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B & D adhuc alius E, & ita porro alii inter numeros novenario proxime majores & minores, donec tandem reperiatur 9.0000000, hoc est, $9\frac{0000000}{10000000}$ (§. 305): qui cum a novenario ne unica quidem particula millionesima differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habetur. Error enim semper minor esse debet unica millionesima. Quærantur itaque in quolibet casu logarithmi mediorum proportionalium & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus 0.95424251.

3. Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quæras & convenientes logarithmos singulis assignes, invenietur tandem logarithmus numeri 2, & ita porro.



CALCULI

CALCULI TYPUS

	Numeri medii proportionales.	Logarithmi.		Numeri medii proportionales.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.00000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.50000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.00000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.75000000	R	9.0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.50000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95421889
D	5.6234132	0.75000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.93750000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.00000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
I	9.1398170	0.96093750	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
I	9.1398170	0.96093750	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Z	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.95312500	Y	8.9999845	0.95424217
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.95312500	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	b	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.95312500	a	8.9999992	0.95424247
L	9.0173333	0.95507812	b	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	d	8.9999998	0.95424250
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	c	9.0000004	0.95424253
P	8.9996088	0.95422363	e	9.0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	d	8.9999998	0.95424250

4. Enim-

4. Enimvero non opus eſt, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore inveſtigentur: compoſiti enim cum per alios numeros dividi poſſint (§. 76), adeoque & ex aliis ſe mutuo multiplicantibus (§. 212) oriantur, eorum logarithmi *per Theor.* 63 & 64 (§. 337 & *ſeqq.*) inveniuntur. E. gr. ſi logarithmus numeri 9 biſecetur, prodit logarithmus 0.47712125 numeri 3 (§. 338).

Corollarium:

347. Characteriſtica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10 eſt 0, pro numeris a 10 ad 100 eſt 1, pro numeris a 100 ad 1000 eſt 2 &c.

Scholion.

348. *Canonem Logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 uſque ad* 20000 *&* a 90000 *ad* 100000 *primus conſtruxit* Henricus Briggius, *Profeſſor Geometriæ Savilianus in Academia Oxonienſi, ex conſilio tamen primi inventoris* Neperi (*a*) *& methodum conſtruendi una expoſuit in ſua Arithmetica Logarithmica. Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox explevit* Adrianus Vlaccus (*b*). *In libellis vulgaribus habetur tantum Canon Logarithmorum pro numeris ab* 1 *uſque ad* 10000.

Problema 37.

349. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen* 10000000.

Resolutio.

1. Reſecentur quatuor notæ ad ſiniſtram numeri dati & earum ex canone excerpatur logarithmus.
2. Characteriſticæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram reſiduæ (§. 347).
3. Logarithmus inventus ſubtrahatur a proxime ſequente in canone.
4. Inferatur: ut differentia numerorum in canone evolutorum ad differentiam tabularem logarithmorum ipſis reſpondentium; ita notæ reſiduæ numeri dati ad differentiam logarithmicam *per Probl.* 33 (§. 302) inveniendam: quæ ſi
5. Addatur logarithmo *per n.* 1 & 2 invento; ſumma erit logarithmus quæſitus.

E. gr. quæritur logarithmus numeri 92375. Reſeca quatuor notas 9237 & characteriſticam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus reſpondentis 3.9655309 auge unitate. Hinc

e logarith. numeri	9238 = 3.9655780
ſubduc. logarith. numeri	9237 = 3.9655309
relinquitur differ. tabul. - -	471

Inferatur: 10 — 471 — 5

5) 2355 (§. 316):

235

Jam logarithmo	4.9655309
addatur different. inventa	235
Summa eſt logarithmus quæſ.	4.9655544

Scholion.

350. *Differentiæ equidem logarithmorum non ſunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis ſcrupuloſi non ſumus, methodus tradita ſufficit, ſi præſertim notæ reſiduæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in noſtro caſu adeo exactum reperimus, ut accuratior in tabulis majoribus* Briggii *non occurrat.*

Problema 38.

351. *Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.*

Resolutio.

1. Logarithmus numeratoris ſubtrahatur a logarithmo denominatoris.
2. Reſiduo præfigatur ſignum ſubtractionis —.

E. gr. Quærendus eſt logarithmus fractionis $\frac{3}{7}$.

Logarithmus 7	= 0.8450980
Logarithmus 3	= 0.4771213
Logarithmus $\frac{3}{7}$	= −0.3679767

DE-

(*a*) Vide præf. ad Arithmeticam Logarithm.

(*b*) In altera editione Arithmeticæ Logarithmicæ Briggii.

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus, ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 238); logarithmus ejus est differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 343), adeoque si numerator minor denominatore, major logarithmus e minore subtrahendus, quo in casu differentia evadit negativa (§. 105). *Q. e. d.*

SCHOLION.

352. *Logarithmum fractionis propriæ esse negativum, si unitatis sit 0, jam notavit* Stifelius (a), *& mirum non est. Fractio enim minor unitate* (§. 221). *Sed unitatis logarithmus est* 0 (§. 346). *Ergo fractionis logarithmus est nihilo minor.*

COROLLARIUM 1.

353. Cum in fractione spuria $\frac{9}{5}$ numerator sit major denominatore; ejus logarithmus habetur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 238. 343).

Logarithmus	9 = 0.9542425
Logarithmus	5 = 0.6989700
Logarithmus	$\frac{9}{5}$ = 0.2552725

COROLLARIUM 2.

354. Qooniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem spuriam $\frac{23}{7}$ reduci possunt (§. 224); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

Logarithmus	23 = 1.3617278
Logarithmus	7 = 0.8450980
Logarithmus	$3\frac{2}{7}$ = 0.5166298

PROBLEMA 39.

355. *Invenire numerum logarithmo respondentem, qui in tabulis accuratus non occurrit.*

RESOLUTIO.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus, inter 1000 & 10000 cadit, hoc est, si characteristica fuerit 3 (§. 347);

1. Logarithmus proxime minor dato subtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita secunda ad partes centesimas *per probl.* 33 (§. 302) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in tabulis respondet, addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

E. gr. Quæratur numerus respondens Logarithmo 3.7589982

Logarithmus proxime major	3.7590632
minor	3.7589875
Differentia prima	757
Logarithmus datus	3.7589982
proxime minor	3.7589875
Differentia secunda	107

757 — 100 — 107

107	107.00 (14
100	757
10700	313.0
	3028
	102

Cum numerus logarithmo minori conveniens sit 5741; quæsitus erit $5741\frac{14}{100}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc est, si characteristica fuerit 0, 1 vel 2 (§. 347); characteristica mutatur in 3 & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eidem respondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteristicæ unitates accessere (§. 346).

E. gr. Quæratur numerus logarithmo 1.9201662 conveniens. Cum in tabulis proxime minori respondeat numerus 83; logarithmos idem evolvitur sub characteristica 3 post 8300, ubi proxime majori respondet numeros 83.21. Est itaque quæsitus $83\frac{21}{100}$. Quodsi fractionibus his non fueris contentus, per casum primum minores istis inveniri possunt.

PROBLEMA 40.

356. *Invenire numerum convenientem*

(a) In Arithm. Integra lib. 3. c. 5. p. 249 b.

tem logarithmo majori iis, qui in tabulis continentur.

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato ſubtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo tabulæ minor.
2. Quæratur numerus ei reſpondens (§. 355) &
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum eſt numerus quæſitus (§. 346).

E. gr. Quærendus eſt numerus logarithmi 7.7589982. Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui eſt 4.0000000, ut relinquatur 3.7589982, cui reſpondens numerus $5741\frac{11}{100}$ ducatur in 10000, factum 57411100 erit numerus quæſitus.

SCHOLION.

357. *Facile apparet ſubtrahi poſſe logarithmum numeri cujuſcunque in tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo reſiduo reſpondet. Sed operatio tædioſa evadit.*

PROBLEMA 41.

358. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo reſpondentem.*

RESOLUTIO.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus tabulæ ſive numeri 10000, hoc eſt, ille ab hoc ſubtrahatur.
2. Logarithmo reſiduo conveniens numerus quæratur (§. 355).

Dico, hunc eſſe numeratorem fractionis, cujus denominator eſt 10000.

E. gr. Quæratur fractio reſpondens Logarithmo defectivo — 0.3679767. Hic ex 4.0000000 ſubductus relinquit 3.6320233, cui convenit numerus $4285\frac{72}{100}$. Eſt ergo fractio quæſita $\frac{428572}{1000000}$.

DEMONSTRATIO.

Cum fractio ſit quotus ex diviſione numeratoris per denominatorem emergens (§. 238); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. 69). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo reſpondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo reſiduo convenientem (§. 337. 66). Ergo ſi 10000 ſumatur pro denominatore, erit numerus iſte numerator fractionis quæſitæ (§. 305). *Q. e. d.*

PROBLEMA 42.

359. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus ſecundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato ſubtrahatur logarithmus primi.

Reſiduus eſt logarithmus quarti quæſiti (§. 302. 337. 343).

E. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.

Logarithm.	68 = 1.8325089
Logarithm.	3 = 0.4771213
Aggregatum	= 2.3096302
Logarithm.	4 = 0.6020600
Logarithm. quæſ.	1.7075702,

cui in Tabulis reſpondet numerus 51.

SCHOLION.

360. *Problematis hujus uſus præſtantiſſimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæſiti ſunt a* Briggio & Vlacco *Logarithmi, cum* Neperus *tantum canonem unius diverſæ indolis logarithmorum pro ſinibus & tangentibus conſtruxiſſet. Tirones igitur hanc de Logarithmis doctrinam tantiſper ſeponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.*

CAPUT

CAPUT IX.

De Fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO 65.

361. F*Ractio decimalis* est, cujus denominator est *articulus* quidam *primarius* 10, 100, 1000, 10000 &c. (§. 305).

COROLLARIUM 1.

362. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLION 1.

363. E. gr. *Si fuerit fractio decimalis* $\frac{342857}{100000}$, *eadem æquivalet huic seriei:* $\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$, *cujus denominatores* 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 *in ratione decupla progrediuntur.*

COROLLARIUM 2.

364. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5 (§. 346); si fractiones decimales sub forma numerorum integrorum scribantur, veluti in nostro casu loco $\frac{342857}{100000}$ aut $\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$ scribatur 3.42857 (§. 306); loco denominatorum numeratoribus solitarie positis opportune tanquam apices adjiciuntur logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ scribimus $3^{0}.\,4'2''8'''5''''7'''''$.

COROLLARIUM 3.

365. Quoniam apices, qui sunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium, in serie numerorum naturalium progrediuntur; sufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, ceteris omissis, veluti in nostro casu $3.42857'''''$.

COROLLARIUM 4.

366. Cum logarithmus fractionis inveniatur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 351), denominator autem fractionis decimalis sit articulus primarius (§. 361), adeoque ejus logarithmus præter characteristicam nonnisi meris cyphris constet (§. 346): a characteristica logarithmi numeratoris fractionis decimalis nonnisi characteristica logarithmi denominatoris subtrahenda, ut habeatur logarithmus fractionis decimalis.

SCHOLION 2.

367. E. gr. *Si fractio decimalis fuerit* 8.735; *logarithmus numeratoris* 8735 *est* 3.9412629, *denominatoris* 1000 *vero* 3.0000000, *adeoque logarithmus fractionis decimalis datæ* 0.9412629. *Si fractio decimalis fuerit* 0.324; *logarithmus numeratoris* 324 *est* 2.5105456, *denominatoris* 1000 *vero* 3.0000000, *consequenter logarithmus fractionis decimalis* —1.5105456. *Iidem ergo sunt logarithmi fractionum decimalium, qui numerorum integrorum, nisi quod characteristica differant.*

COROLLARIUM 5.

368. Quia characteristica logarithmi denominatoris fractionis decimalis eadem est cum apice ultimæ notæ (§. 364); logarithmus fractionis decimalis prodit, si a logarithmi numeratoris characteristica apex ultimæ notæ subducitur (§. 366).

SCHOLION 3.

369. *E. gr. In fractione decimali* $8.735'''$ *apex ultimæ notæ est* 3; *a logarithmi igitur numeri* 8735, *qui est*, 3.9412629, *characteristica* 3 *subducitur ternarius, ut prodeat logarithmus fractionis decimalis* 0.9412629. *Apex iste tot continet unitates, quot denominator habet cyphras, seu quot a puncto sequuntur notæ: unde patet, si nullus adscriptus fuerit apex, tot unitates a characteristica numeratoris subduci, quot denominator cyphras habet, seu quot notæ punctum sequuntur.*

DEFINITIO 66.

370. *Fractio decimalis exacta est*, quæ veram exhibet rationem partis, quam designat, ad totum.

E. gr. $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum sit 8 : 10 = 4 : 5 (§. 181).

DEFINITIO 67.

371. *Fractio decimalis approximans* est, quæ rationem partis, quam designat, ad totum exhibet prope veram, nempe vel vera minorem, vel majorem, defectu tamen vel excessu infra

 uni-

unitatem notæ ultimæ convenientem existente.

E. gr. $\frac{3}{7} > 0.42857$, sed < 0.42858. Exprimit adeo fractio approximans $\frac{42857}{100000}$ rationem non nisi prope veram defectu scilicet existente minore, quam $\frac{1}{100000}$.

Definitio 68.

372. *Notæ* fractionum decimalium *ejusdem ordinis* dicuntur, quarum iidem sunt denominatores vel apices.

E. gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0.42857 & 0.00473 notæ 8 & 4 ejusdem ordinis sunt, quoniam utrique respondens denominator est 1000 vel apex‴: nam 8 designat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

Problema 43.

373. ***Fractiones decimales addere, vel a se invicem subtrahere.***

Resolutio & Demonstratio.

Quoniam fractiones decimales perinde ac numeri integri constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 364); notis ejusdem ordinis sub se invicem scriptis additio & subtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (§. 98. 103), nisi quod in approximantibus locus ultimus sit incertus (§. 371).

Vide exemplum

I. Additionis.

```
 3.50782'''''      0.0638''''
 0.0003            0.00562'''''
51.247             7.138
---------         ---------
54.75512           7.20742
```

II. Subtractionis.

```
2.78.64''''       0.9.5.436'''''
0.158             0.08512
---------         ---------
2.6284            0.86924
```

Problema 44.

374. ***Fractiones decimales per se invicem multiplicare.***

Resolutio & Demonstratio.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306); multiplicatio peragitur ut in integris (§. 111), hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex facti notarum in se invicem ductarum inveniatur, si earum apices addantur (§. 337).

E. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{42857}{100000}$ per $\frac{47}{10000}$, hoc est, 0.42857''''' per 0.0047''''; multiplicatio peragitur communi more ducendo 42857 primum in 7 & deinde in 4 sive 40. Quoniam vero apex ultimus multiplicandi est 5 & multiplicatoris 4; summa 9 dat apicem ultimum producti: unde apparet a sinistris adjiciendas esse tres cyphras, quarum prima puncto notata designat locum integrorum.

```
   0.42857
    0.0047
----------
   299999
  171428
----------
0.002014279
```

Corollarium 1.

375. Quodsi factor unus fuerit fractio decimalis approximans, cum fieri possit, ut multiplum notæ deficientis, quæ ultimam 6 proxime sequitur, sit novenario major, consequenter multiplum notæ ultimæ 6 inde augeatur (§. 111); in facto numerus locorum, in quibus notæ sunt incertæ, numerum notarum in factore exacto notitate superat, veluti in nostro exemplo notæ tres ultimæ 584 sunt incertæ, adeoque factum sumitur 0.801.

```
2.3576+
   0.34
--------
  94304
 70728
--------
0.801584
```

Corollarium 2.

376. Si uterque factor fuerit approximans, eodem modo intelligitur, loca in facto incerta unitate excedere numerum notarum factoris longioris, veluti in adjecto exemplo, in quo numerus longior constat notis 5, loca incerta sunt numero 6, adeoque nonnisi duæ notæ sinisteriores 11 certæ sunt. In exemplo anteriore si factor 0.34 ponatur quoque approximans, nulla prorsus nota certa est.

```
  18.357
    6.34
--------
   73428
  55071
110142
--------
116.38338
```

CORO-

COROLLARIUM 3.

377. Quodsi nota deficiens, quæ proxime sequitur, ultimæ fuerit æqualis in multiplicando, & multiplicator exactus; tum in multiplicatione apparet, quot unitatibus augeri debeat multiplum notæ dextimæ, ut nulla in facto nota incerta evadat. E. gr. in nostro exemplo, ubi nota deficiens est 6, facto ex 6 in 8 adjiciuntur 4 & alteri ex 6 in 6 adduntur 3.

```
 0.6666
    6.8
-------
 533332
39999
-------
4.53322
```

SCHOLION.

378. *Casus alios brevitatis gratia prætermittimus.*

PROBLEMA 45.

379. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306); divisio peragitur ut in numeris integris (§. 117), hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§. 343) & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit vel dividendum non metiatur.

E. gr. Si 0.002014279 dividatur per 0.0047, quotus est 0.42857 (§. 374. 210). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ divisoris 4 conveniat apex 3 & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 est apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur eidem præfigitur cyphra, cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter si 0.002014279 dividatur per 0.42857, quotus est 0.0047 (§§. cit.). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ divisoris 4 apex 5, differentia 3 est apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis millesimis (§. 364), eidem præfigendæ sunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0.0047.

COROLLARIUM 1.

380. Quodsi divisor fuerit fractio decimalis approximans, adeoque nota ultima vel justo major vel minor (§. 371); factum ex divisore in quotum duabus ultimis notis deficere potest. Quare cum a notis dividendi vel justo plus, vel minus subtrahatur; ubi divisor ad easdem fuerit promotus, notæ quoti incertæ evadent. E. gr. Si dividendus fuerit 21.3456 & divisor 5.82 fractio approximans, nonnisi unica nota quoti 5 certa est.

COROLLARIUM 2.

381. Si dividendus fuerit fractio decimalis approximans, divisor exactus; nonnisi notam quoti ultimam subinde incertam evadere posse patet.

COROLLARIUM 3.

382. Si & divisor, & dividendus fuerint fractiones approximantes; evidens est porro in determinandis locis certis respiciendum esse vel dividendum, vel divisorem, prout divisoris, vel dividendi nota deficiens propior fuerit primæ divisoris notæ. E. gr. Si divisor sit 2.5786, dividendus 3.067, adeoque cyphris augendus, ut divisio fieri possit; evidens est certitudinem expirare in nota tertia divisoris 6, consequenter junctis duabus cyphris divisionem eo usque continuari, ut prodeat quotus certus 1.5.

PROBLEMA 45.

383. *Notas certas in multiplicatione & divisione fractionum decimalium approximantium accuratius determinare.*

RESOLUTIO.

Notæ factorum dextimæ sumantur nunc justo majores, nunc justo minores; in divisione nunc nota dextima in dividendo justo major, in divisore justo minor & contra: quæ in utraque multiplicatione ac divisione eædem proveniunt notæ, eæ sunt accuratæ.

Quodsi ergo in exemplo superiori multiplicationis (§. 376), ubi notæ ultimæ factorum ponuntur justo minores, eorum loco sumantur 18.358 & 6.35; factum, quod obtinetur, 116.57330 convenit cum superiori 116.38338 quoad tres notas sinistimas 116. Eæ igitur solæ certæ sunt. Patet autem certam sic fieri notam tertiam 6, quæ per superiora in dubio

```
  18.358
    6.35
---------
   91790
  55074
 110148
---------
156.57330
```

bio relinquebatur (§. 376). Similiter si in exemplo divisionis superiori (§. 382) nunc 3.068 dividas per 2.5786, nunc 3.067 per 2.5787, quotus utrobique est 1.1: unde patet, nonnisi duas istas notas certas esse, quas superius tales agnovimus.

SCHOLION.

384. *Ipsa praxis loquetur, nos subinde posse esse contentos, quod notas certas agnoscamus, quæ per superiora (§. 376. 382) tales deprehenduntur, ut adeo tædio repetitæ multiplicationis vel divisionis supersedere queamus.*

CAPUT X.

De Fractionibus Sexagesimalibus.

DEFINITIO 69.

385. *Fractiones sexagesimales* sunt, quarum denominatores crescunt in ratione sexagecupla. Dicuntur etiam *Minutiæ physicales*.

SCHOLION.

386. E. gr. *Si integrum sit* 1, *fractiones istiusmodi sunt* $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$ &c.

COROLLARIUM.

387. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1, 60, 3600, 216000, 12960000 &c. sunt 0, 1, 2, 3, 4 &c. (§. 334); si fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum scribendæ, numeratoribus solitarie positis perinde, ac in fractionibus decimalibus, tanquam apices adjiciendi sunt logarithmi. E. gr. $\frac{3}{1} = 3^{\circ}$, $\frac{35}{60} = 35'$, $\frac{46}{3600} = 46''$ &c.

DEFINITIO 70.

388. Pars sexagesima integri dicitur *Minutum* sive *Scrupulum primum*; pars sexagesima minuti primi *Minutum* sive *Scrupulum secundum*; pars sexagesima minuti secundi *Minutum* sive *Scrupulum tertium* & ita porro.

COROLLARIUM.

389. Scrupuli adeo primi apex sive index est 1, secundi 2, tertii 3 & ita porro (§. 387).

SCHOLION.

390. *Hac ratione fractiones reducuntur ad numeros integros, ut integrorum instar tractari queant.*

PROBLEMA 46.

391. *Fractiones sexagesimales addere.*

RESOLUTIO.

Additio eodem prorsus modo peragitur, quo numeri heterogenei in unam summam colliguntur (§. 99).

E. gr.	35°	$46'$	$8''$	$15'''$
	17	20	15	40
		14	18	
	53°	$20'$	$41''$	$55'''$

PROBLEMA 47.

392. *Fractiones sexagesimales a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

Subtrahuntur a se invicem eodem prorsus modo, quo numerorum heterogeneorum subtractio fieri solet (§. 104).

E. gr.	28°.	$15'$.	$4''$.	$20'''$
	17	29	18	45
	10°	$45'$	$45''$	$35'''$

Nimirum unitas mutuo petita a specie majore hic valet 60. Ita $1'' = 60'''$, $1' = 60''$, $1^{\circ} = 60'$ (§. 388).

PROBLEMA 48.

393. *Fractiones sexagesimales per sexagesimales multiplicare.*

RESOLUTIO.

Multiplicatio fractionum sexagesimalium coincidit cum multiplicatione

tione decimalium (§. 374), nisi quod ex specie minore abjiciatur toties sexagenarius, quoties fieri poteſt, & tot ſpeciei proxime majori addantur unitates, quoties ſexagenarius fuit abjectus (§. 388): id quod diviſio per 60 prodit (§. 223).

E. gr. Si multiplicandus $3^{\circ}\,15'\,38''$, multiplicator $2^{\circ}\,18'\,47''$. Duc ſingulas partes multiplicandi primo in 47, ſecundo in 18, tertio in 2: erit factum ex 38 in 47 = 1786 ſcrupulis quartis = $29'''\,46''''$. Scribuntur adeo 46 pro ſpecie minima infra lineam cum ſuo apice, & $29'''$ reſervantur ſpeciei proxime ſequenti annumeranda. Cum igitur factum ex $47''$ in $15' = 705'''$; additis 29 prodibunt $734''' = 12''\,14'''$. Scribuntur adeo 14 infra lineam & $12''$ reſervantur facto proxime ſequenti ex 3° in $47''$ addenda. Eodem modo ubi perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia, quæ in unam ſummam (§. 391) collecta exhibent factum quæſitum $7^{\circ}\,32'\,30''\,38'''\,46''''$ aut, ſi prope verum quæſiveris, $7^{\circ}\,32'\,31''$, cum ſpecies proxime major dimidium illius ſuperet, aut 30 fuerit major. Vide exemplum.

		3°	$15'$	$38''$
		2	18	47
	2	33	14	$46''''$
	58	41	24	
6	31	26		
7°	$32'$	$30''$	$38'''$	$46''''$

SCHOLION.

394. *Ne tædia diviſionis devoranda ſint, conſtructus eſt* Canon hexacontadon, *qui facta in ſpecies reſoluta exhibet, veluti factum ex 38 in 47 = 29.46. Ratio conſtructionis ex operatione in problemate præcepta patet, modo notetur perinde, ac in abaco Pyshagorico (§. 109), factorem unum a latere, alterum in fronte canonis deſcribi.*

PROBLEMA 49.

395. *Fractiones ſexageſimales per ſexageſimales dividere.*

RESOLUTIO.

Diviſio peragitur ut in fractionibus decimalibus (§. 379), niſi quod in multiplicatione quoti per diviſorem tenenda ſint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus (§. 393) &, ubi numerus ſpeciei primæ dividendi fuerit minor numero ſpeciei primæ diviſoris, ſpecies illa reducenda ſit ad ſpeciem proxime minorem & ſequenti addenda, ut diviſioni ſit locus.

E. gr. Si $7^{\circ}\,32'\,30''\,38'''\,46''''$ dividere jubeamur per $2^{\circ}\,18'\,47''$; quære quoties 2 in 7 contineatur, & quoti loco ſcribe 3°. Duc 3° in $2^{\circ}\,18'\,47''$ & factum $6^{\circ}\,56'\,21''$ ſubtrahe ex $7^{\circ}\,32'\,30''$, ut relinquatur $36'\,9''$. Junge reſiduo ſpeciem ſequentem 38 & diviſionem eodem modo continua, donec ea tandem fuerit abſoluta, quemadmodum ex typo exempli liquet:

$2^{\circ}\,18'\,47''$)	7°.	3.2′	3.0″	$38'''$	$46''''$	($3^{\circ}\,15'\,38''$
	6	56	21	::	::	
		36.	9.	38	::	
		34	41	45	::	
		2	27	53	::	
five			87	53	46	
			87	53	46	
				0		

SCHOLION.

396. *Non abſimili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcunque abſolvitur, quarum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, quæ olim in diviſione menſuræ linearum obtinuit.*

FINIS ARITHMETICÆ.

ELE-



ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.



PErexiguus est eorum numerus, qui Geometriæ pretium suum statuunt: notatione enim delusi cum arte agrimensoria eam pessime confundunt, nec ea animo ipsorum obversatur idea, quæ nomen tam augustum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis distinctæ fundamenta jacit Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in scientiis, quam in artibus ejus sit usus. Equidem ob problemata, quorum resolutionem trado, nonnisi ad locorum distantias variorumque objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, corporumque molem dimetiendum conducere videtur; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cum ad reliquas Matheseos partes inferius applicabitur. Non hic repeto, quæ de

vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam superius (*a*) dicta sunt. Ne vero hoc fructu careret Geometriæ studium; a rigore in demonstrando recedendum minime fuit. Hinc definio, quæ vulgo definiri non solent, & passim demonstro, quæ sine probatione ab aliis assumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic ausus; sed sufficit eum probari peritis, & quod majus est, methodum nostram præstare, ne extra Mathesin ratiocinaturi in scopulos incidamus, in quos plerumque omnes hactenus incidisse, supra etiam (*b*) annotavimus. EUCLIDES & ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ solo demonstrarunt omnia: sed cum ingeniosissimus LEIBNITIUS Similitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret, multum ejus in Geometria esse usum, ego vero meditatus amplissimum deprehenderem; similitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo a me facillime demonstrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ nonnisi per ambages demonstrari solent. Nec injucundum arbitror, quod figurarum constructiones inter principia demonstrandi nunc obtineant locum, quæ alias praxi tantum inserviebant. Placuit tamen in nova hac editione mea similitudinis notione uti, cum Leibnitiana clarior sit. Tirones definitionibus evolutis neglecta demonstratione problemata solvant. Hoc labore perfuncti ex theorematum hypothesibus figuras construant & demonstrationes empiricas superaddant, quarum in ipsa pertractatione fit mentio (*c*). Tandem eo ordine elementa relegant, quo conscripta sunt. Qui vero mentis acie pollent, illamque diu possunt habere attentam; difficultates non sentient, etiamsi prima statim vice ad singula animum advertant.

ELE-

(a) In Comment. de Methodo Mathematica §. 52. 53.
(b) Loc. cit. §. 52.
(c) In schol. theor. 7. §. 151.



ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.

CAPUT PRIMUM

De Principiis Geometriæ.

DEFINITIO 1.

1. *Geometria* eſt ſcientia extenſorum, quatenus terminata ſunt, hoc eſt, linearum, ſuperficierum & ſolidorum.

SCHOLION.

2. *Quemadmodum extenſio ex ſimultanea alicujus rei per locum diffuſione oritur; ita in mente repræſentatur, dum multa in uno continuo ſimul percipimus. Hinc notio extenſionis non modo totius ac partium notiones involvit* (§. 9 Arith.); *ſed eadem in rerum aliarum notiones irrepit, quæ ideo per lineas, ſuperficies ac ſolida repræſentari poſſunt. Unde eſt, quod Geometria rebus plurimis applicari poſſit, ejuſque adeo quam latiſſime pateat uſus.*

DEFINITIO 2.

3. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt. Nempe *Congruentia* eſt coincidentia terminorum.

SCHOLION.

4. *Ne definitio negotium faceſſat, vitanda eſt vocis* termini *æquivocatio: id quod in ſequentibus ſatis cavetur. A termini vero definitione conſulto abſtinemus, ne ad demonſtrationes metaphyſicas dilabamur.*

DEFINITIO 3.

5. *Eundem ſitum habere* dicuntur, inter quæ idem extenſum poni poteſt.

DEFINITIO 4.

6. *Punctum* eſt, quod quaqua verſus ſeipſum terminat, ſeu quod non habet terminos alios a ſe diſtinctos.

COROLLARIUM 1.

7. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§. 3).

COROLLARIUM 2.

8. Nec ullas in eo diſtinguere licet partes.

SCHOLION.

9. *Hinc* Euclides: *Punctum eſt, inquit, cujus pars nulla eſt. Nec ſine ratione punctum ut individuum concipiunt Geometræ, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipſa Geometrica ſummo cum ſtudio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus exiſtit.*

DEFINITIO 5.

10. *Linea* deſcribitur, ſi punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur.



COROLLARIUM 1.

11. Termini igitur lineæ ſecundum longitudinem ſunt puncta A & B; ſecundum latitudinem & profunditatem ipſa ſui terminus eſt (§. 6).

COROLLARIUM 2.

12. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 8), linea nec lata, nec profunda esse potest, sed in solam longitudinem extenditur.

SCHOLION 1.

13. *Quid ergo mirum, quod secundum latitudinem & profunditatem non habeat terminos a se distinctos,* vi Cor. 1. (§. 11)?

SCHOLION 2.

14. *Quamvis corpus omne tribus dimensionibus præditum sit, nec una a reliquis actu separari queat; necessarium tamen ac perutile est, ut unam absque reliquis consideremus. Necessitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit, & hinc per abstractionem divellere tenetur, qua nexu indivulso natura conjunxit. Utilitatem hujus abstractionis casus innumeri persuadent, in quibus unam dimensionem neglectis ceteris cognoscere jubemur, e. gr. altitudinem turris sine latitudine ac profunditate ipsius, latitudinem fluminis sine longitudine ac profunditate ejusdem.*

DEFINITIO 6.

15. *Distantia* est linea brevissima inter duo.

SCHOLION.

16. *Ita e. gr. distantia arboris a domo est linea brevissima, quæ ab illa ad hanc duci potest.*

DEFINITIO 7.

17. *Linea recta* AB est, cujus pars quæcunque est toti similis.



COROLLARIUM 1.

18. Lineæ igitur rectæ non differunt nisi quantitate (§. 26 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

19. Cum lineæ describantur, si punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§. 10); motus puncti describentis in omnibus lineæ partibus idem esse debet: secus enim diversitate hujus motus partes a se invicem distinguerentur, adeoque similes non forent (§. 24 *Arith.*) contra definitionem (§. 17). Quoniam itaque motus puncti differre nequit nisi celeritate ac directione, celeritas vero ad descriptionem rectæ nil confert; sola directionis habenda est ratio, consequenter recta describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur.

POSTULATUM 1.

20. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.*

POSTULATUM 2.

21. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci posse.*

DEFINITIO 8.

22. *Linea curva* est, cujus partes toti dissimiles.

DEFINITIO 9.

23. *Metiri* idem est ac quantitatem aliquam pro unitate assumere, ac aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate assumitur, *Mensura* dicitur.

SCHOLION.

24. *Hæc definitio latior praxi respondet: strictius* Euclides *mensuram definit per quantitatem, quæ aliquoties repetita alteri fit æqualis: quam nos in Arithmetica partem aliquotam diximus.*

DEFINITIO 10.

25. Hinc *Mensura linearum* est linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipsa *Decempeda* appellatur. Pes subdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas*, & ita porro.

SCHOLION 1.

26. *Mensuræ longitudo & divisio non eadem est ubivis gentium. Varias differentias præter* Willebrordum Snellium (*a*) *exponunt* Ricciolus (*b*), Malletus (*c*), Cl. Eisenschmidius (*d*) *aliique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repræsentat tabula sequens*

(a) In Eratosthene Batavo lib. 2. cap. 1. usque ad 5. p. 121. & seqq.
(b) In Geogr. Reform. lib. 2. cap. 7. f. 43. & seqq.
(c) Geometrie practique lib. 1. p. 108.
(d) In disquisit. nova de ponderibus & mensuris veterum Rom. Græc. & Hebr. Sect. 3. c. 1. p. 93. & seqq.

quens in particulis istiusmodi, qualium pes regius Parisinus est 1440. *Continet is nempe* 12 *digitos, digitus* 12 *lineolas, lineola* 10 *particulas; adeoque pes integer particulas* 1440.

Pes Regius		Constantinopo-	
Parisinus	1440	litanus	3140
Rhenanus	$1391\frac{1}{10}$	Bononiensis	$1682\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentoratensis	$1282\frac{1}{4}$
Londinensis	1350	Norimbergensis	$1346\frac{1}{4}$
Suecicus	1320	Dantiscanus	$1271\frac{1}{3}$
Danicus	$1403\frac{2}{7}$	Halensis	1320
Venetus	1540		

SCHOLION 2.

27. *Divisionem mensuræ decimalem primus introduxit* Stevinus, *teste ipsius Geometria practica, dubio procul exemplo* Regiomontani. *Indicem autem decempedarum constituit* 0, *pedum* 1, *digitorum* 2, *linearum* 3 *&c. tanquam denominatorum logarithmos* (§. 364 Arith.), *quos circello inclusos numeris adscribit. Sed commodius* Joannes Bayerus *in Logistica decimali & Stereometria logarithmos characteribus Romanis expressos apicibus numerorum adscribit. E. gr. tres perticæ, quinque pedes, septem digiti & octo lineæ ita scribuntur:* $3^{0}\ 5'\ 7''\ 8'''$. *Commodissimum sæpe accidit, si numeri integra sive decempedas designantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis &c. puncto separentur, uti monuimus in Arithmetica* (§. 306). *Ita loco* $3^{0}\ 5'\ 7''\ 8'''$ *scribemus* 3.578. *Admodum* R. P. Franciscus Noel *auctor est* (a), *divisionem decimalem non modo in mensuris, sed & ponderibus Sinicis adhiberi.*

DEFINITIO 11.

28. *Superficies* est magnitudo duabus dimensionibus prædita, seu in longitudinem & latitudinem extensa.

COROLLARIUM.

29. Termini superficiei secundum longitudinem & latitudinem sunt lineæ, secundum profunditatem ipsamet terminus sui existit.

SCHOLION.

30. *Nimirum in longitudine nullum assumi potest punctum, cui non respondeat aliqua linea secundum latitudinem, & contra.*

DEFINITIO 12.

31. Per *Perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO 13.

32. *Figura* est continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

33. *Dicitur tam de superficiebus, quam de solidis. In priori casu perimetri sunt lineæ; in posteriori superficies.*

DEFINITIO 14.

34. *Figura rectilinea* est, cujus perimeter ex lineis rectis; *curvilinea*, cujus perimeter ex curvis; *mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis constat.

DEFINITIO 15.

35. *Latus* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis.

DEFINITIO 16.

36. *Planum* seu *figura plana* est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO 17.

37. *Circulus* est figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C,



quod *Centrum* vocari solet, ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

DEFINITIO 18.

38. *Chorda* AB est recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO 19.

39. *Diameter* AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC sive recta CD ex centro C ad peri-

(a) In Observationibus Mathematico-Physicis in India & China factis c. 7. p. 104 & seqq.

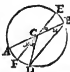
peripheriam ducta dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

40. Radii ergo unius circuli inter se æquales sunt (§. 37).

DEFINITIO 20.

41. *Arcus* est pars quantalibet peripheriæ AFD: *Gradus* vero est pars ejusdem trecentesima sexagesima. Quilibet gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet in 60 *secunda*; secundum unumquodque in 60 *tertia* &c. subdividitur. *Euclides* arcum quoque *peripheriam* vocat.



COROLLARIUM.

42. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus sunt majores gradibus minoris.

SCHOLION.

43. *Scrupula graduum sunt fractiones sexagesimales* (§. 385 Arith.) *& apicibus suis notantur* (§. 387 Arith.). *Gradui tanquam integro seu unitati cessit* 0, *minuto primo* 1, *secundo* 2, *tertio* 3 *&c. consequenter gradus cum suis scrupulis eodem modo scribuntur, quo decempeda cum suis* (§. 27). *E. gr.* 3 *gradus*, 25 *minuta*, 16 *secunda ita scribimus*: 3° 25′ 16″. *Etsi autem Ægyptii veteres, quibus hanc divisionem acceptam ferunt, hoc artificio computum Astronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum tractari possint, nec sine prudenti consilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per* 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 *exacte dividitur, nec minus eum fecerint exponentem rationis, juxta quam scrupula decrescunt, quem* 2, 3, 4, 5 *&* 6 *metiuntur; non tamen sine ratione suaserunt post* Stevinum (*a*) Oughtredus (*b*), Wallisius (*c*) *aliique, ut sepositis fractionibus sexagesimalibus, decimales reciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus est; sexagesimales vero non sine tædio reducuntur. Multiplicatio quoque & divisio decimalium facilior quam sexagesimalium* (§. 374 & seqq. 393 & seqq. Arith.). *Id consilium secuti sunt* Henricus Briggius *in Canone triangulorum artificiali apud* Henricum Gellibrand *in Trigonometria Britannica*, Joannes Nevvton *in Astronomia pariter ac Trigonometria Britannica & Nicolaus Mercator in Institutionibus Astronomicis*. Stevinus (*d*) *contendit, eandem circuli divisionem antiquitus, in seculo sapiente, quod adstruere conatur, obtinuisse*.

(a) In præf. ad Tractat. de Logistica decimali.
(b) Clavis Mathem. cap. 1. p. m. 2.
(c) Algebræ cap 9. f. 19. Vol. II. Oper. Mathem.

DEFINITIO 21.

44. *Circuli concentrici* sunt, qui idem centrum habent: *Eccentrici* vero, qui habent diversa.

DEFINITIO 22.

45. *Segmentum circuli* est pars ipsius AFBA arcu AFB & chorda AB comprehensa. Dicitur *Segmentum majus*, quod semicirculo *majus* est; *minus* vero, quod minus est.

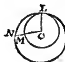


DEFINITIO 23.

46. *Sector circuli* est pars ejus ACD duobus radiis AC & CD atque arcu AD comprehensa.

DEFINITIO 24.





47. Recta HI circulum in L *tangit*, si ipsi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Circulus vero circulum *intus tangit*, si huic occurrens totus intra hunc; *extus vero tangit*, si eidem occurrens totus extra hunc cadit.



(d) In Cosmographia lib. 1. def. 6. f. 109. Operum Gallice editorum.

CORO-

COROLLARIUM 1.

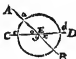
48. Recta CL ex centro C ad contactum L ducta est radius circuli (§. 39).

COROLLARIUM 2.

49. Circuli ergo se extus tangentes in L diversa centra C & c habent, adeoque eccentrici sunt (§. 44).

DEFINITIO 25.

50. Linea AB lineam CD *secat* in E, si eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipsam sitas.

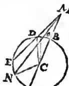


COROLLARIUM 1.

51. Cum etiam CD ipsam AB dirimat in partes AE & EB cis & ultra CD sitas; si AB secet CD in E, etiam vicissim CD secabit AB in eodem puncto E.

COROLLARIUM 2.

52. Si recta MN circulum in o secet, pars ejus oN intra circulum cadit (§. 37).

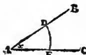


COROLLARIUM 3.

53. Si circulus circulum secet, cum utriusque peripheria in se redeat (§. 37); pars peripheriæ unius circuli intra alterum cadat necesse est.

DEFINITIO 26.

54. *Angulus* est duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineæ AB & AC dicuntur *Crura*; punctum concursus A *Vertex anguli*.



SCHOLION.

55. *Angulus hic vel unica litera A vertici ejus adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis confusionem tribus literis BAC indigitatur, ita ut vertici adscripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo imponis litera minor, veluti x, eidem inscripta. Utimur vero angulis ad linearum situm determinandum.*

DEFINITIO 27.

56. *Angulus insistere* dicitur lineæ, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO 28.

57. *Mensura anguli* BAC est arcus DE ex vertice A radio prorsus arbitrario AE intra crura ejus AC & AB descriptus.

COROLLARIUM.

58. Anguli ergo distinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam: distinguuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam distinguere licet (§. 41 *Geom.* & §. 132 *Arith.*). Et eadem de causa quantitas anguli æstimatur ex ratione arcus istius ad peripheriam.

SCHOLION.

59. *Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE (§. 41).*

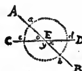
DEFINITIO 29.

60. *Anguli contigui* FGH & HGI sunt, quorum idem est vertex G & crus unum commune GH.



DEFINITIO 30.

61. Rectæ lineæ AE & EB *in directum* sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existunt.



DEFINITIO 31.

62. *Angulus deinceps positus* AEC dicitur, qui oritur, anguli AED latere uno ED in C producto.

COROLLARIUM 1.

63. Habent adeo anguli deinceps positi AEC & AED crus unum AE commune & crus alterum unius CE in directum situm est cruri alteri alterius ED (§. 61).

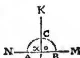
COROLLARIUM 2.

64. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui, sed non contra (§. 60).

DEFI-

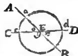
DEFINITIO 32.

65. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est.



DEFINITIO 33.

66. *Angulus obliquus* AEC est, cui deinceps positus AED inæqualis. *Angulus acutus* AEC est obliquus minor recto. *Angulus obtusus* AED est obliquus recto major.

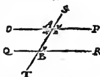


DEFINITIO 34.

67. *Anguli verticales o* & *x* sunt, si crura unius AE & CE in directum jacent cruribus alterius EB & ED.

DEFINITIO 35.

68. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant; *anguli*, quos cum ea efficiunt, *x* & *y* dicuntur *alterni*.

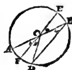


DEFINITIO 36.

69. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B, sed ab eadem plaga occurrant; *anguli*, quos cum ea efficiunt, *u* & *y*, item *z* & *y*, dicuntur *oppositi*; & quidem *u* dicitur *oppositus externus*, *z* vero *oppositus internus* ipsius *y*.

DEFINITIO 37.

70. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in segmento*.

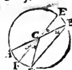


COROLLARIUM.

71. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 38 & 54) atque arcui AD insistit (§. 56).

DEFINITIO 38.

72. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura vero AC & CD in peripheria terminantur.

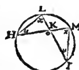


COROLLARIUM.

73. Angulus ad centrum a duobus radiis intercipitur (§. 39), adeoque arcui AD insistit (§. 41. 56), consequenter arcus AD ejus mensura (§. 57).

DEFINITIO 39.

74. *Angulus extra centrum* HKI est, cujus vertex K extra centrum est, crura vero HK & IK in peripheria terminantur.

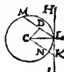


COROLLARIUM.

75. Insistit ergo arcui HI (§. 41. 56).

DEFINITIO 40.

76. *Angulus contactus* HLM est, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit.



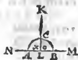
DEFINITIO 41.

77. *Angulus segmenti* MLH vel MLI est, quem chorda ML cum tangente HL vel LI ad contactum L efficit.

DE-

DEFINITIO 42.

78. *Linea* KL *perpendicularis* aut *normalis* est ad alteram LM, si cum ea efficit angulum rectum.

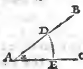


COROLLARIUM.

79. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps positi æquales sunt (§. 65), & contra.

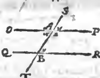
DEFINITIO 43.

80. *Linea* AB est ad alteram AC *obliqua*, si cum ea efficit angulum obliquum.



DEFINITIO 44.

81. *Linea* OP *parallela* est alteri QR, si ubique eandem ab ea distantiam servat.

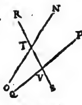


COROLLARIUM.

82. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO 45.

83. *Lineæ convergentes* TO & VQ sunt, quarum distantia continuo fit minor.



DEFINITIO 46.

84. *Lineæ divergentes* TN & VP sunt, quarum distantia continuo fit major.

DEFINITIO 47.

85. *Opponi* dicuntur, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

SCHOLION.

86. Puncta absolute considerata *dicuntur* puncta opponi, *si fuerint termini ejusdem rectæ. Nimirum cum recta sit brevissima linea inter duos terminos* (§. 191), *qualis etiam est perpendicularis inter eas, quæ a puncto ad lineam vel superficiem duci possunt* (§. 224); *perpendicularis vicem in eo casu subit, ubi punctum alterutrum extra lineam vel superficiem sumitur.*

DEFINITIO 48.

87. *Triangulum* est figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO 49.

88. *Triangulum æquilaterum* ABC est, cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera singula inter se æqualia.



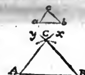
DEFINITIO 50.

89. *Triangulum æquicrurum* sive *Isosceles* DFE est, quod duo latera æqualia habet.



DEFINITIO 51.

90. *Triangulum scalenum* ACB est, cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inter se inæqualia.



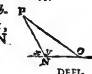
DEFINITIO 52.

91. *Triangulum rectangulum* KML est, cujus angulus unus K rectus est.



DEFINITIO 53.

92. *Triangulum obtusangulum* PNO est, cujus angulus unus N est obtusus.



DEFINITIO 54.

93. *Triangulum acutangulum* ACB est, cujus singuli anguli sunt acuti.

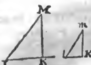


DEFINITIO 55.

94. *Triangulum obliquangulum* est, cujus singuli anguli sunt obliqui.

DEFINITIO 56.

95. *Hypothenusa* ML est latus in triangulo rectangulo angulo recto K oppositum.



DEFINITIO 57.

96. *Catheti* sunt latera trianguli rectanguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO 58.

97. *Figura quadrilatera* est, cujus perimeter ex quatuor lateribus constat. *Rectangula* dicitur, si anguli ejus singuli fuerint recti; *obliquangula*, si obliqui.

DEFINITIO 59.

98. *Quadratum* ABDC est figura quadrilatera, æquilatera, rectangula.



DEFINITIO 60.

99. *Rhombus* EFHG est figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.



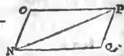
DEFINITIO 61.

100. *Rectangulum* sive *oblongum* MLKI est figura quadrilatera, rectangula, latera opposita ML & IK, item IM & LK æqualia habens.



DEFINITIO 62.

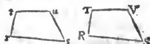
101. *Rhomboides* NOPQ est figura quadrilatera, obliquangula, latera opposita OP & NQ, item ON & PQ, æqualia habens.



DEFINITIO 63.

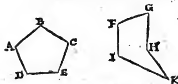
102. *Parallelogrammum* est figura quadrilatera, cujus latera opposita sunt parallela.

DEFINITIO 64.



103. *Trapezium* RTVS est figura quadrilatera non parallelogramma. Quidam *Trapezium* appellant figuram quadrilateram, cujus duo tantum latera opposita sunt parallela, quæ alias *Trapezium parallelarum basium* dici solet: figura vero, cujus neutrum latus alteri parallelum, *Trapezoides* iisdem dicitur.

DEFINITIO 65.



104. *Figura polygona* seu *multilatera* ABCED vel FGHKI est, cujus perimeter ex pluribus, quam quatuor lateribus componitur. Quodsi latera fuerint quinque, *Pentagonum*; si sex,

si sex, *Hexagonum*; si septem, *Heptagonum*; si octo, *Octogonum* &c. dicitur.

DEFINITIO 66.

105. *Figura æquiangula* est, cujus singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO 67.

106. *Figura regularis* est figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO 68.

107. *Figura irregularis* est, quæ non simul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO 69.

108. *Figuræ inter se æquilateræ* dicuntur, si singula latera unius fuerint sigillatim æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO 70.

109. *Figuræ inter se æquiangulæ* sunt, si singuli anguli unius singulis angulis homologis alterius æquales sunt.

DEFINITIO 71.

110. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, si eundem ordinem a primo in utraque figura servent.

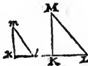
DEFINITIO 72.

111. *Diagonalis* PN est recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.



DEFINITIO 73.

112. *Basis figuræ* est perimetri pars ima KL.



COROLLARIUM.

113. Cum situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem seu latus figuræ quodlibet pro basi assumere licet.

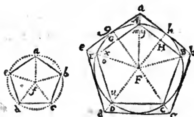
DEFINITIO 74.

114. *Vertex figuræ* M est vertex anguli basi KL oppositus.

DEFINITIO 75.

115. *Altitudo figuræ* est distantia verticis a basi.

DEFINITIO 76.



116. *Figura* ABCDE dicitur *circulo inscripta*, si peripheria per vertices singulorum angulorum ipsius transit, tuncque *Circulus* figuræ dicitur *circumscriptus*.

DEFINITIO 77.

117. *Figura abcde* dicitur *circulo circumscripta*, si singula ejus latera peripheriam tangant, tumque *circulus* figuræ dicitur *inscriptus*.

DEFINITIO 78.

118. *Mensura figuræ* est quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*, & in *pedes quadratos*, sicut pes quadratus in *digitos quadratos*, dividitur.

DEFINITIO 79.

119. *Eodem modo determinari* dicuntur, si data, per quæ unum determinatur, fuerint similia datis, per quæ

 deter-

determinatur alterum, & utrobique ex datis similibus per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

120. Quæ itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, per quæ discerni debent, adeoque similia sunt (§. 24 *Arith.*).

CAPUT II.

De Propositionibus Quibusdam Fundamentalibus.

PROBLEMA 1.

121. *A Dato puncto A ad datum punctum B lineam rectam ducere.*

RESOLUTIO.





I. In charta

Linea recta ducitur juxta regulam EF ad puncta data A & B applicatam graphio HI, penna aut plumbagine.

II. In ligno vel saxo

Recta delineatur etiam sine regula, si filum creta vel cerussa delibutum punctis datis A & B apprimatur &, medio digitis prehenso, sursum trahatur, moxque iterum demittatur.

III. In campo



Recta designatur per baculos LK in punctis datis beneficio libellæ M ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum summitati muccinium aut folium chartæ mundæ alligatur, si e longinquo videri debeant.

SCHOLION 1.

122. *Cum regulæ orichalceæ & argenteæ chartam facile nigrent; iis præferuntur, quæ ex lignis Indicis parantur, ut ebeninæ. His enim accuratam politiem inducere licet, ne sordes facile adhærescant, nec fibræ exiguæ calami graphiique motum uniformem impediant: quod quernis, nuceis & his similibus familiare vitium.*

SCHOLION 2.

123. *Pennæ optimæ sunt, quæ ex corvorum alis evelluntur: propterea quod anserinis duriores, lineis subtilioribus & purioribus ducendis inserviunt. Baculi vero IK cuspide ferrea K muniuntur, ut eo facilius in terra præsertim duriore defigi queant.*

SCHOLION 3.

124. *Utendum vero est atramento non communi, sed Sinico, tum quia commune ob corrosivitatem vitrioli, quod ipsum ingreditur, chalybeam graphii cuspidem arrodit: tum quia Sinicum facilius effluit, etiamsi atrius sit communi. Accedit, quod Sinico lineæ nitidiores ducantur, quam communi.*

PROBLEMA 2.

125. *Duobus baculis in solo defixis, tertium vel plures in eadem recta cum iis infigere.*

RESOLUTIO.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in Opticis.

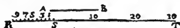
PROBLEMA 3.

126. *Lineam rectam metiri.*

RE-

Resolutio.

Ad manus sit necesse est mensura (§. 23). Nimirum pro lineis in charta



ta datis abscindantur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes designent: intervallum vero 10 pedum RS in residuum lineæ transferatur, quoties fieri potest (§. 25). In campo vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes & decempedas legitime divisis utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes & pedem ultimum in digitos dividi. Quodsi ergo lineam rectam metiri jubearis.

I. In charta

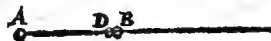
1. Ponatur crus circini unum in A & eo usque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.
2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, e. gr. in 10 ponatur & notetur, quemnam pedem mensuræ alterum attingat, e. gr. 5. Erit linea AB 1° 5′.

II. In campo

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 121) &, si ea mensuræ longitudinem superet, constituantur cum iis alii in eadem recta (§. 125).
2. Funis cannabinus aut catena mensuram largiens ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet (§. 238): quod perpendiculo appenso evidens redditur.
3. Decempedæ, pedes atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

Scholion 1.

127. *Si catena utrinque in annulos desinat, per quos baculos trajicere licet; lineam metimur, baculis hisce cum ceteris in eadem recta continuo collocatis*



(§. 125). *Notandum tamen, dum baculus ex A in B transfertur, non in vestigio baculi B, sed prope ipsum in D eundem infigi atque annuliorum crassitiem longitudini mensuræ non accenseri debere. Quodsi tamen hæc sit pars mensuræ eaque subdupla diametri baculi; baculus ex A ablatus in ipso B desigi poterit. Parantur*



autem catenæ PQ ex filis ferreis pedalibus, eàrumquè longitudo tres decempedas excedere vix debet, ne pondere fiant molestæ: quam ob rationem nec filis ferreis nimium crassis utendum.

Scholion 2.

128. *Si pertica circa alterum sui extremum tanquam centrum per quadrantem circuli elevata & per alterum rursus demissa lineam metitur; crassities ejus longitudini lineæ repertæ toties addenda, quoties ad eam applicata fuit, aut longitudo perticæ particulæ crassitiei congruente imminuenda. Ceterum quia pertica ab inæqualitate extensionis prorsus liberæ prærogativam quandam præ catenis & funibus habens; earum extremitates annullis ferreis instrui oportet, ut observantibus, quæ in scholio præcedente diximus, tanto minus periculi supersit, ne a recta dimetienda declinetur.*

Scholion 3.

129. *Funes cannabinos humor contrahit & vires diversæ inæqualiter tendunt.* Schvventerus (a) *auctor est, cum aliquando exercitiis Geometricis in campo vacaret, longitudinem funis, quæ erat 16 pedum, cadente pruina, horæ unius intervallo, ad pedes 15 rediisse. Ut igitur hi nævi tollantur, funiculi, ex quibus conficiuntur, in gyros contrarios contorquendi; ipse autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus & postquam exsiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque cerandus. Nullum longitudinis decrementum notabis, etiamsi funem istiusmodi per diem integrum sub aquis demersum detineas. Ne autem funis humum contingat, sustentaculum Z ipsi supponendum. Perpendiculum, quo ad funem horizontaliter extendendum utimur, ex filo & appenso globo vel pondere plumbeo constat.*



PRO-

(a) Geometr. pract. lib. 1. Tract. 1. p. 31.

PROBLEMA 4.

130. *Data longitudine lineæ in mensura e. gr. Parisina, invenire eandem in mensura alia, e. gr. Londinensi, cujus ad priorem nota est ratio.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. linea data 186 pedum Parisinorum, quæritur quot eadem sit pedum Londinensium? Quoniam pes Parisinus est ad Londinensem ut 144 ad 135 (§. 26); inferatur (§. 302 *Arith.*).

$144 : 135 = 186$ $144)\ 25110\ (174\frac{54}{144}$ ped. Londin.

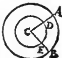
```
     186              144::
     ---             -----
     810             1071:
    1080             1008:
    135              -----
   -----               630
   25110               576
                     -----
                        54
```

PROBLEMA 5.

131. *Ex dato quovis centro C dato radio quocunque AC circulum describere.*

RESOLUTIO.

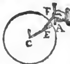
I. In charta



1. Collocetur circini crus unum in centro dato C & aperiatur intervallo radii dati AC.
2. Moveatur circinus circa centrum C: ita crus alterum peripheriam designabit (§. 37).

II. In solo & quotiescunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur, radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga sive lignea, sive ferrea.

SCHOLION 1.



132. *Si fune aut filo utimur, cavendum est, ne stylus FA, quo peripheria designatur, e situ perpendiculari dimoveatur: id quod impedit filum transversum FE, si fuerit AF = 3, AE = 4, & FE = 5. Ratio patet per theorema Pythagoricum infra demonstrandum* (§. 417).

SCHOLION 2.



133. *Circini, ut instrumenta Geometrica reliqua, ex orichalco parantur ob durabilitatem, tractabilitatem & nitorem hujus metalli. Cuspides tamen crurum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut subtilius exacuantur. Circini, quo ad lineas metiendas & dividendas utimur, crura eadem sunt & invariata. Sed circini, qui peripheriis & arcubus describendis inservit, crus alterum variari potest, ut tam plumbagine, quam atramento Sinico uti detur, prout commodum visum fuerit. Plumbagine nempe utimur, quoties arcus delineantur absoluta operatione rursus delendi. Longitudo vel 3 vel 6 digitorum esse solet.*

COROLLARIUM.

134. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuscunque (§. 119); omnes peripheriæ sunt inter se similes (§. 120). Eodem modo patet, omnes circulos & semicirculos esse inter se similes.

THEOREMA 1.



135. *Diameter AE dividit tam peripheriam, quam circulum ipsum in duas partes æquales.*

DEMONSTRATIO.

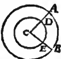
Partes peripheriæ ADE & ABE, itemque circuli ADECA & ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec sibi in directum jaceat (§. 131). Sunt adeo arcus ABE & ADE partes peripheriæ, segmenta ABECA & ADECA partes circuli eodem modo determinatæ, adeoque similes (§. 120). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§. 170 *Arith.*), consequenter tum illi, tum hæc inter se æquantur (§. 177 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

136. Super quavis igitur linea AE (producta, si opus sit §. 21) ex assumto in ea puncto C describi potest semicirculus.

THEO-

THEOREMA 2.



137. *Si ex centro C duorum circulorum concentricorum ducantur radii CDA & CEB; tum arcus DE & AB ad peripherias, tum sectores DCE & ACB ad areas suorum circulorum eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici *per hypoth.* idem centrum C habeant (§.44), & arcus AB atque DE, itemque sectores ACB & DCE describantur radiis AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 131); arcus isti atque sectores eodem modo determinantur (§.119), consequenter illi peripheriarum, hi circulorum partes similes sunt (§.120), adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§.170 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

138. Cum arcus DE & AB intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C descripti sint arcus circulorum concentricorum (§. 44); ad suas quoque peripherias eandem rationem habent, consequenter inter se sunt ut peripheriæ (§. 173 *Arith.*). Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 41); ipsi quoque eundem continere debent.

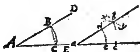
COROLLARIUM 2.

139. Quia anguli quantitas æstimatur per rationem arcus ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (§.58); perinde est, quocunque radio arcus iste describatur (§. 137).

COROLLARIUM 3.

140. Eadem ergo manet anguli quantitas, sive crura producantur, sive minuantur.

THEOREMA 3.



141. *Angulorum æqualium A & a mensuræ BC & de sunt arcus similes, & contra si angulorum A & a mensuræ BC & de similes sunt, anguli æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum anguli cujuscunque A vel *a* quantitas æstimetur per rationem arcus BC vel *de* ex vertice A vel *a* intra crura descripti ad integram peripheriam (§.58); si $A = a$, ratio arcuum BC & *de* ad peripherias suorum circulorum eadem esse debet, consequenter cum sint partes suarum peripheriarum (§.41), similes sunt (§.170 *Arith.*). *Quod erat unum.*

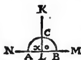
Si arcus BC & *de*, mensuræ angulorum A & *a* (§. 57), fuerint similes; ad peripherias, quarum partes sunt (§. 41), eandem rationem habent (§. 170 *Arith.*). Quare cum quantitas angulorum A & *a* per eam rationem æstimetur (§. 58); eadem omnino esse debet, hoc est, anguli æquales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

142. Cum arcus similes eandem rationem habeant ad peripherias, quarum sunt partes (§. 170 *Arith.*), si fuerint partes æqualium peripheriarum; æquales sunt (§. 177 *Arith.*). Si ergo mensuræ angulorum æqualium fuerint partes ejusdem peripheriæ vel æqualium peripheriarum, æquales sunt (§. 141), & contra.

THEOREMA 4.

143. *Anguli recti KLM mensura est quadrans circuli.*



DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (§. 21); erit $x = o$ (§. 65). Sed cum ex L super recta NM describi possit semicirculus (§. 136); angulorum x & o mensuræ AC & CB junctim sumtæ conficiunt semicirculum (§. 57). Ergo unius mensura est dimidius semicirculus, hoc est, circuli quadrans. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

144. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 41); angulus rectus est 90° (§. 59).

COROLLARIUM 2.

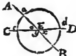
145. Omnes adeo recti sunt inter se æquales (§. 141), & æqualis recto etiam rectus est.

COROLLARIUM 3.

146. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 66).

THEOREMA 5.

147. *Duo anguli deinceps positi* x & y, *aut quotcunque ad idem punctum E super eadem recta CD constituti sunt æquales duobus rectis. Et contra si* x & y *fuerint duobus rectis æquales, CE sita est in directum ipsi ED.*



DEMONSTRATIO.

Quoniam in casu priore anguli x & y sunt deinceps positi *per hypoth.* EC cum ED eandem rectam constituit (§. 62). In casu posteriore omnes anguli constituti sunt super eadem recta CD ad idem punctum E *per hypoth.* Quare cum ex E super CD describi possit semicirculus (§. 136); in utroque casu mensura omnium angulorum simul est semicirculus (§. 57). Sed idem est mensura duorum rectorum (§. 143). Ergo anguli isti sunt duobus rectis æquales (§. 142). *Quod erat unum.*

Quodsi x & y fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipsi ED in directum sita; recta quædam alia veluti EA ipsi ED in directum jacebit (§. 21), atque hinc $o + y$ & x erunt deinceps positi (§. 62), consequenter duobus rectis æquales *per demonstrata*, adeoque $o + y + x = y + x$ (§. 87 *Arith.* & §. 145 *Geom.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arith.*), CE ipsi ED in directum sita. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

148. Anguli, qui sunt deinceps, x & y, aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ constituti, si junctim sumantur, conficiunt 180° (§. 144).

COROLLARIUM 2.

149. Angulorum deinceps positorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, si datus ex 180° subducatur.

COROLLARIUM 3.

150. Si in campo angulum inaccessum vel obtusum Quadrante metiri jubemur, & eum, qui est deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim subductus quæsitum relinquit (§. 149).

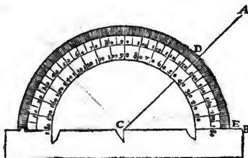
COROLLARIUM 4.

151. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimensum esse, si finita operatione deinceps positos etiam metiaris & hos singulos illis singulis addas: quodsi enim ubique prodierit summa 180°, operatio rite peracta (§. 148).

PROBLEMA 6.

152. *Angulum metiri.*

RESO-



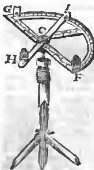
RESOLUTIO.

Cum anguli ACB mensura sit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB descriptus (§. 57), totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope semicirculi in 180° exactissime divisi. Nimirum

I. In charta

1. Centrum semicirculi ad verticem anguli C applicatur & radius ejus CE cruri CB admovetur.
2. Gradus in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepto numerantur.

II. In Campo



1. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli, centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur collineando per dioptras F & G, seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versus baculum in extremo cruris defixum; posterius vero perpendiculum ad centrum instrumenti applicando.
2. Regula HI circa centrum mobilis versus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipsi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.
3. Gradus, quem regula in instrumento indicat, notatur.

SCHOLION 1.

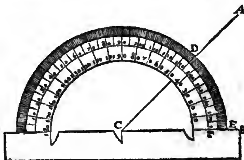
153. *Semicirculus minor, quo in charta utimur,* instrumentum transportatorium *vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro; quidam nonnisi quadrante utuntur.*

SCHOLION 2.

154. *Diameter transportatorii est trium fere digitorum Rhenanorum; majorum vero instrumentorum goniometricorum unius pedis, aut ad summum unius cum dimidio. Divisio accurata fieri debet. In transportatoriis gradus dimidii satisfaciunt; in majoribus dena prima. Angulos in campo instrumento majore captos, quantum fieri potest, accuratissime in charta designaturi, diametrum transportatorio non multo minorem diametro ejus instrumenti, quo in campo usi sunt, & regulam circa centrum mobilem indulgent.*

PROBLEMA 7.

155. *Data quantitate anguli, ipsum describere.*

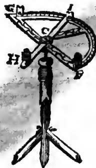


Resolutio.

I. In charta

1. Ducatur recta CB, &
2. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum instrumenti transportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincidat.
3. Numerentur gradus dati ab E versus D & ad gradum ultimum notetur punctum D.
4. Ducatur recta CA per C & D. Erit ACB angulus quæsitus (§. 141).

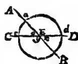
II. in campo



1. Collocetur instrumentum goniometricum ut in probl. præced. (§. 152).
2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.
3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

Theorema 6.

156. *Si recta AB alteram CD secet in E; anguli verticales x & o, item y & E, sunt æquales.*



Demonstratio.

$$x + y = 180^\circ$$
$$y + o = 180^\circ$$ (§. 148)

Ergo $x + y = y + o$ (§. 87 *Arith.*), ideoque $x = o$ (§. 91 *Arith.*). Eodem modo ostenditur esse $y = E$. *Q. e. d.*

Corollarium.

157. Quodsi in campo aut alio in casu angulum inaccessum x metiri jubeamur, accessum vero non neget verticalis o: hunc ejus loco metiri licet.

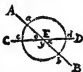
Scholion.

158. *Cum tirones sub initium studii Mathematici sensibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant, ratiociniis ex assumtis deductis minus adsueti; figuras per data ex hypothesibus theorematum assumta construere ac reliquarum linearum & angulorum per constructionem determinatorum quantitatem explorare* (§. 126. 152) *juvat: ita sensus & veritas propositionis elucescit, & animus ad demonstrationes genuinas percipiendas excitatur: cum enim sit scire avidus, rationes veritatis nosse desiderat. In demonstratione magis acquiescunt tirones, examine ratiocinationis legitimæ sic facto, non secus ac theoriæ physicæ magis satisfaciunt, ubi factis experimentis decretoriis consonæ deprehenduntur.*

THEO-

THEOREMA 7.

159. *Omnes anguli x, y, o, E &c. circa punctum aliquod E constituti sunt æquales quatuor rectis.*



DEMONSTRATIO.

Describatur ex puncto *E* vertice communi angulorum *x*, *y*, *o*, *E* &c. (§. 54) intervallo quocunque *Ea* circulus (§. 131); evidens est mensuras omnium angulorum simul sumtas *db*, *bc*, *ca*, *ad* &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 143). Mensura ergo angulorum *x*, *y*, *o*, *E* &c. junctim sumtorum est circulus integer (§. 57). Sed circulus est mensura quatuor rectorum (§. 143). Ergo omnes isti anguli æquales sunt quatuor rectis (§. 141). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

160. Omnes itaque anguli circa idem punctum constituti junctim 360° conficiunt (§. 144).

THEOREMA 8.

161. *Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quæ sibi mutuo congruunt, eorum iidem esse possunt termini (§. 3). Ergo unum in locum alterius salva quantitate substituere licet, consequenter æqualia sunt (§. 15 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Porro quoniam, quæ sibi mutuo congruunt, eosdem terminos habere possunt (§. 3): quin eodem modo determinari queant dubitandum non est. Sunt igitur similia (§. 120). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 9.

162. *Quæ æqualia & similia sunt, ea sibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Similia differre nequeunt, nisi quantitate (§. 26 *Arith.*). Quamobrem si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§. 15 *Arith.*). Jam si sibi mutuo superimposita non iisdem terminis continerentur; diversitate terminorum differrent: quod cum sit absurdum *per demonstrata*, iisdem terminis contineri debent, consequenter sibi mutuo congruunt (§. 3). *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

163. *Si linea lineæ congruit, singula puncta unius singulis punctis alterius congruere debent.*

DEMONSTRATIO.

Linearum enim, quæ sibi mutuo congruunt, iidem termini esse possunt (§. 3). Sed termini linearum secundum longitudinem sunt duo puncta, secundum latitudinem & profunditatem ipsæmet sui termini existunt (§. 11). Ergo si lineæ congruunt, non modo puncta extrema, sed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

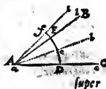
164. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ, in quibus radii terminantur (§. 39), consequenter circuli ipsi congruere debent (§. 3).

COROLLARIUM 2.

165. Ex uno itaque puncto eodem radio circulus nonnisi unicus describi potest.

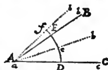
THEOREMA 11.

166. *Si fuerint duo anguli BAC & bac æquales, & vertex unius a ponatur*



 super

super verticem alterius A, *præterea crus illius* ac *super crus hujus* AC; *etiam crus alterum* ab *super alterum* AB *cadet*.

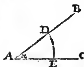


DEMONSTRATIO.

Si negas, necesse est ut *ab* vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A radio AD arcus Df (§. 131): erit DE mensura anguli BAC, *De* vel *Df* mensura anguli *bac* (§. 57). Ergo in casu priore *De* mensura anguli *bac* minor, in posteriore eadem mensura *Df* major foret mensura anguli BAC (§.20 *Arith.*). Quod utrumque cum sit absurdum (§.142); crus *ab* super AB cadit. *Q. e. d.*

THEOREMA 12.

167. *Si vertex & crura anguli unius* DAE *supra verticem & crura alterius* BAC *cadant; angulus unus* DAE *alteri* BAC *æqualis est.*



DEMONSTRATIO.

Describatur enim ex communi vertice A intra crura AD & AE arcus DE (§. 131): erit is mensura anguli DAE (§. 57). Sed quoniam crura AD & AE supra crura alterius anguli AB & AC cadunt *per hypoth.* idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Est igitur & mensura anguli BAC (*§.cit.*), consequenter DAE = BAC (§. 142). *Q. e. d.*

THEOREMA 13.

168. *Lineæ rectæ æquales sibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Est *ab* = AB *per hypoth.* Est vero etiam recta *ab* similis rectæ *AB* (§.17). Ergo *ab* ipsi *AB* congruit (§. 162). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

169. Ergo si recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* supra A & *ab* supra AB cadat; etiam *b* supra B cadet (§. 3. 11).

COROLLARIUM 2.

170. Si rectarum extrema coincidunt, singula puncta unius erunt in recta altera (§. 162), atque hinc inter duo puncta nonnisi unica recta cadit.

COROLLARIUM 3.

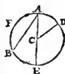
171. Cum radii circulorum sint lineæ rectæ (§. 39), ubi æquales fuerint, sibi mutuo congruunt (§. 168), consequenter etiam circuli congruere debent (§. 164), atque ideo circuli æquales sunt, quorum æquales sunt radii (§.161).

COROLLARIUM 4.

172. Quoniam non absimili modo patet, circulum, cujus minor est radius, congruere parti circuli radium majorem habentis; minor est circulus, cujus minor radius; major vero, cujus radius major (§. 20 *Arith.*).

THEOREMA 14.

173. *Si centro circuli C applicetur lineæ rectæ CD, radio AC æqualis, extremum unum; alterum peripheriam attinget.*



DEMONSTRATIO.

Quoniam recta CD radio æqualis *per hypoth.* ipsi congruet (§.168), ideoque eosdem cum eo terminos habere debet (§.3). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 39). Ergo & recta CD ipsi æqualis, si alterum extremum in C hæreat, altero peripheriam attinget. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 15.

174. *Anguli similes sunt etiam æquales*.

DEMONSTRATIO.

In angulis similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24 *Arith.*). Quare cum anguli distinguantur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam (§. 58), si anguli sint similes, arcus isti ad suas peripherias eandem rationem habere, hoc est, & ipsi similes esse debent (§. 141 *Geom.* & §. 170 *Arith.*). Sunt igitur anguli æquales (§. 141). *Q. e. d.*

THEOREMA 16.

175. *In figuris similibus anguli homologi sunt æquales & latera homologa proportionalia*.

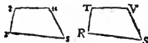
DEMONSTRATIO.

In figuris similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24 *Arith.*). Quare cum figuræ nequeant distingui nisi per angulos & latera; illi æquales (§. 174), hæc proportionalia esse debent (§. 154 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

176. *Sermo nobis tantum est de figuris rectilineis, quarum latera in se spectata omnia inter se similia sunt. Alias addendum foret, latera homologa debere esse insuper inter se similia & similiter posita, e. gr. arcus circulorum similes convexitatem centro figuræ obvertentes.*

THEOREMA 17.



177. *Figurarum sibi mutuo congruentium* RTVS & rtus *anguli & latera homologa inter se æqualia sunt*.

DEMONSTRATIO.

Quoniam figuræ RTVS & *rtus* sibi mutuo congruunt *per hypoth.* iidem utriusque termini esse possunt (§. 3). Quare cum termini earum sint perimetri (§. 31); una *rtus* supra alteram RTVS ita poni potest, ut *tu* ipsi TV, *tr* ipsi TR, *rs* ipsi RS &c. congruat. Ergo latera homologa sunt inter se æqualia (§. 161. 110). *Quod erat unum.*

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s* &c. vertices; TV, TR, RS, SV & *tu*, *tr*, *rs*, *sv* crura angulorum homologorum (§. 54. 110). Quamobrem & anguli homologi æquales sunt (§. 167). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

178. *Patet ex scholio præcedente, quomodo idem theorema ad figuras quoque non rectilineas extendatur.*



CAPUT

CAPUT III.

De Linearum Rectarum & Triangulorum Symptomatis.

THEOREMA 18.



179. *Si in duobus triangulis* ABC & abc *fuerit* A=a, AB=ab, AC=ac; *erit etiam* BC=bc, C=c, B=b *totaque triangula æqualia & similia erunt*.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus triangulum *abc* ita poni super alterum ABC, ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A & *ac*=AC *per hypoth.* punctum *b* super B (§.169), recta *ac* super AC (§.166) & punctum *c* super C (§.169), consequenter *bc* super BC (§.170) cadit, ideoque Δ *abc* alteri ABC congruit (§.3), consequenter *bc*=BC(§.161), *c*=C & *b*=B (§.167), totaque triangula æqualia & similia sunt(§.161). *Q.e.d.*

PROBLEMA 8.

180. *Datis duobus lateribus* AB & AC *cum angulo intercepto* A, *triangulum construere*.

RESOLUTIO.

1. Assumto AB pro basi, in A constituatur angulus datus (§.155).
2. In crus ejus alterum transferatur alterum datorum latus AC.
3. Tandem ducatur recta BC.

Erit ABC triangulum desideratum (§.179).

SCHOLION.

181. *Tirones latera & angulos datos in numeris assumant: quod in aliquibus casibus ad demonstrationes empiricas distinctius percipiendas proderit, quas supra (§.158) commendavimus.*

COROLLARIUM 1.

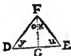
182. Determinatis ideo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

COROLLARIUM 2.

183. Quare si in duobus triangulis ACB & *acb* fiat *a*=A & *ab*:*ac*=AB:AC; triangula eodem modo determinantur(§.119), ideoque similia sunt (§.120), consequenter etiam *c*=C & *b*=B, *ab*:*bc*=AB:BC &c. (§.175).

THEOREMA 19.

184. *In triangulo æquicruro DFE 1°. anguli ad basin* y & u *sunt æquales*, 2°. *recta FG, quæ angulum DFE bifariam secat, basin quoque DE*, & 3°. *triangulum ipsum bifariam secat: imo* 4°. *FG ad basin DE perpendicularis*.



DEMONSTRATIO.

Nam *o*=*x per hypoth.* DF=FE (§.89) & FG=FG (§.81 *Arith.*). Ergo 1°. *y*=*u*, 2°. DG=GE, 3°. Δ DFG= Δ GFE (§.179). Et quia etiam anguli ad G æquales *per §. cit.* 4°. FG ad DE normalis est (§.79). *Q.e.d.*

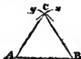
COROLLARIUM.

185. Cum triangulum æquilaterum sit etiam æquicrurum (§.88.89); theorema præsens de æquilatero itidem verum est.

THEO-

THEOREMA 20.

186. *In triangulo æquilatero ABC omnes anguli sunt inter se æquales.*



DEMONSTRATIO.

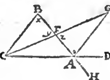
Est enim AC=CB (§. 88). Ergo A=B (§. 184). Est vero etiam AC =AB (§. 88). Ergo C=B (§. 184). Quare A=C (§. 87 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

187. Triangulum itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 105).

THEOREMA 21.

188. *Si trianguli ABC latus unum AC continuetur in D; erit angulus externus DAB major quolibet interno opposito B vel C.*

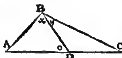


DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB bifariam divisa in F ductaque recta CF producenda in G (§. 21), donec fiat FG=FC. Quoniam GC secat AB in F (§. 50); erit $z=y$ (§. 156), consequenter $o=x$ (§. 179). Sed DAB > o (§. 84 *Arith.*). Ergo & DAB > x (§. 89 *Arith.*). Eodem modo ostenditur esse DAB aut, quod perinde est (§. 156), ejus verticalem HAC > ACB. *Q. e. d.*

THEOREMA 22.

189. *In omni triangulo ABC latus majus AC opponitur majori angulo B; minus AB minori C, & contra.*



DEMONSTRATIO.

Quoniam AB < AC *per hypoth.* parti hujus AD æqualis est (§. 20 *Arith.*). Ducatur recta BD (§. 121); erit BAD triangulum æquicrurum (§. 89), ideoque $o=x$ (§. 184). Sed o > C (§. 188). Ergo x > C (§. 89 *Arith.*), consequenter multo magis B > C. *Quod erat unum.*

Sit B > C *per hypoth.* Si non sit AC > AB, erit vel AC=AB, vel AC < AB, ideoque in casu primo B=C (§. 184), in altero B < C *per demonstr.* Sed cum utrumque hypothesin evertat, absurdum est, consequenter si angulus B > C, etiam AC > AB. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 23.

190. *In omni triangulo ABD duo latera AD & BD simul sumta sunt tertio AB majora.*

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 21), donec fiat BD=DC, ideoque AC=AD +DB (§. 88 *Arith.*): erit Δ BDC æquicrurum (§. 89), & hinc $y=C$ (§. 184). Cum vero sit $y < x+y$ (§. 84 *Arith.*); erit etiam C < $x+y$ (§. 89 *Arith.*). Quare AC seu AD+DB > AB (§. 189). *Q. e. d.*

THEOREMA 24.

191. *Linea recta AB est brevissima omnium, quæ intra eosdem terminos A & B continentur.*



DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ACB. Ducantur rectæ AC & CB: erit AC+CB > AB (§. 190). Ducantur porro rectæ AD & DC, item CE & EB: erit

erit AD + DC > AC, & CE + EB > CB (§. *cit.*), consequenter AD+DC +CE+EB > AC+CB (§. 90 *Arith.*), adeoque multo magis AD+DC+CE +EB > AB. Quodsi plures ducas subtensas; erit earum aggregatum denuo majus ipsa AB. Quare cum illæ subtensæ cum curva tandem coincidant; erit ea major recta AB intra eosdem terminos contenta. Est ergo recta AB minor curva quacunque intra eosdem terminos contenta, hoc est, omnium linearum brevissima, quæ ab A usque ad B duci possunt. *Q. e. d.*

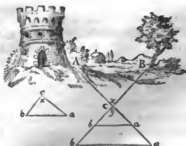
Corollarium 1.

192. Distantia ergo puncti A a puncto B in plano est linea recta (§. 15. 36): cumque inter duo puncta nonnisi unica linea recta contineri possit (§. 170); via in plano brevissima est numero unica.

Corollarium 2.

193. Singula itaque peripheriæ puncta a centro circuli æqualiter distant (§. 37).

Problema 7.



194. *Metiri distantiam duorum locorum A & B ex eodem tertio C accessorum.*

Resolutio.

1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus.
2. Linea AC transferatur ope funis vel catenæ ex C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus, sit cum C & A in eadem recta (§. 125).
3. Eadem ratione ex C in *b* transferatur linea CB.
4. Investigetur longitudo rectæ *ab* (§. 126). Dico, *ab* esse æqualem distantiæ quæsitæ.

Demonstratio.

Cum loca A & B punctorum instar in eodem plano sitorum considerentur, eorum distantia est recta AB (§. 192). Quoniam vero A*a* & B*b* sunt lineæ rectæ *per constr.* & se mutuo secant in C (§. 50);

erit $x = y$ (§. 156).

Præterea $aC = CA$, $bC = CB$ } *per constr.*

Ergo $ba = AB$ (§. 179). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Collocato instrumento goniometrico in C investigetur quantitas anguli x (§. 152).
2. Quæratur porro longitudo rectarum AC & CB (§. 126).
3. Ex datis cruribus AC & CB cum angulo intercepto x construatur juxta scalam geometricam modicam triangulum *acb* (§. 180).
4. Inveniatur in eadem mensura longitudo basis *ab* (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in ea mensura, qua in campo usus es.

Demonstratio.

Est enim $x = x$ & $ac : cb = AC : CB$ *per constr.* consequenter $cb : ab = CB : AB$ (§. 183).

(§. 183). Ergo iidem numeri, qui respondent rectis *cb* & *ab* in mensura modica, etiam rectis CB & AB in majore respondent (§. 155 *Arith.*). *Q.e.d.*

ALITER:

1. In mensula Geometrica in D horizontaliter collocata assumatur punctum *c*, & in eo acicula defigatur, ad quam
2. applicata regula cum dioptris tamdiu huc illucque moveatur, donec per eas prospicienti punctum B occurrat, ducaturque in hoc regulæ situ recta *cb*.
3. Similiter collineatio fiat in punctum A, ducaturque *ca*.
4. Investigetur longitudo rectarum *c*A & *c*B (§. 126) &
5. Ex mensura modica transferantur lineæ istis proportionales ex *c* in *a* & *b*.
6. Tandem in eadem mensura inveniatur longitudo ipsius *ab* (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in mensura majore, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proxime præcedente.

SCHOLION 1.

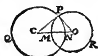
195. *Quodsi angustia spatii non permittit, ut integræ* AC *&* BC (*V. Fig.* 1. §. 194) *in* a *&* b *transferantur, poterunt* aC *&* bC *fieri* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ *&c. ipsarum* AC *&* BC: *quo in casu eodem modo ut in resolutione secunda demonstrabitur, esse* ab $=$ $\frac{1}{2}$, *vel* $\frac{1}{3}$, *vel* $\frac{1}{4}$ *&c. ipsius AB.*

SCHOLION 2.

196. *Notent tirones artificium, quo demonstrationes Geometricas non modo ad facillimam intelligentiam reducere, sed & proprio Marte invenire possunt. Nimirum quicquid vel ex constructione problematis aut hypothesi theorematis, vel ex conspectu figuræ utramque repræsentantis, distincte cognoscitur, per characteres distincte exprimatur, veluti in demonstratione prima præsentis, quod* x $=$ y, aC $=$ AC *&* bC $=$ BC. *Quo facto dispiciatur, cujusnam theorematum antecedentium hypothesis in iis contineatur: thesis enim illius theorematis ostendit, quid ex iis consequatur, veluti in nostro exemplo, quod* ab $=$ AB. *Cum vero maxima demonstrationum pars ex paucis de congruentia & similitudine triangulorum theorematibus derivetur; eorundem recordatio tandem familiarissima evadat opus est.*

THEOREMA 25.

197. *Si ex punctis extremis* C *&* O *rectæ alicujus radiis CP & PO, qui junctim sumti recta CO majores sunt, describantur circuli; ii se mutuo secabunt.*



DEMONSTRATIO.

Sit CP < CO; erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 20 *Arith.*), ideoque ipsi congruit (§. 168). Quare si ex centro C radio CP circulus PNQP describatur (§. 131); erit punctum N in peripheria ipsius (§. 173). Eodem modo ostenditur, si ex centro O radio OP describatur circulus; fore punctum M in peripheria ipsius. Cum ergo CN+NO < CP+PO *per hypoth.* & CP = CN (§. 40); erit NO < PO (§. 92 *Arith.*). Sed PO = MO (§. 40 & *per demonstr.*). Ergo NO < MO (§. 89 *Arith.*). Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMRP, consequenter circuli se mutuo secant (§. 52). *Quod erat unum.*

Nec absimili modo idem ostenditur, si fuerit CP > CO, vel CP = CO. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 10.

198. *Super data recta AB triangulum æquilaterum construere.*



RESOLUTIO.

1. Ex A tanquam centro intervallo ipsius AB describatur arcus *y* &
2. Ex B eodem intervallo alius *x* (§. 131), qui priorem in C intersecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AC & CB: erit ACB triangulum æquilaterum.

DEMONSTRATIO.

Etenim AC=AB & BC=AB (§.40). Ergo AC=BC(§.87 *Arith.*). Quare triangulum ABC est æquilaterum (§. 88). *Q. e. d.*

PROBLEMA 11.

199. *Data basi DE & crure DF, quod illa dimidia majus sit, triangulum æquicrurum construere.*



RESOLUTIO.

1. Ex uno basis extremo D intervallo cruris dati DF describatur arcus &
2. Ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 131), qui ob DF+EF > DE *per hypoth. & constr.* priorem in F intersecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ DF & EF (§.121). Dico, DFE esse triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

DF=FE *per constr.* Ergo DFE est triangulum æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

200. Determinatis ergo basi DE & crure DF totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM 2.

201. Duo igitur triangula æquicrura DFE & *dfe* eodem modo determinantur, si fiat DF : DE = *df* : *de* (§. 119), consequenter similia (§.120), ideoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175 & 109).

THEOREMA 26.

202. *Duo semicirculi CLE & DGF nonnisi in puncto unico G se mutuo secare possunt.*



DEMONSTRATIO.

Secent enim, si fieri possit, præterea se etiam in L. Ducantur ex centris A & B ad puncta intersectionum L & G rectæ AL, AG, BL, BG; puncta item intersectionum connectantur recta GL (§. 121). Quoniam BL=BG (§. 40); erit BGL=BLG (§.184). Sed BGL > AGL (§. 84 *Arith.*): ergo BLG > AGL (§. 89 *Arith.*). Porro quia AL = AG (§.40); AGL=ALG (§.184). Quare BLG > ALG (§. 89 *Arith.*): quod cum sit absurdum (§.84 *Arith.*); duo semicirculi nonnisi unico in puncto se mutuo secare possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

203. Ergo duo integri circuli nonnisi duobus in punctis se mutuo secare possunt.

THEOREMA 27.



204. *Si in duobus triangulis* ACB *& acb fuerit* AC=ac, AB=ab, BC=bc; *etiam* A=a, B=b, C=c, *totaque triangula æqualia sunt & similia.*

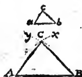
DEMON-

DEMONSTRATIO.

Ex centro A radio AC descriptus concipiatur arcus *y*, & ex centro B radio BC alius *x* (§. 131). Concipiamus porro Δ*acb* ita poni supra ΔACB, ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab*=AB *per hypoth.* punctum *b* super B cadet (§. 169). Et quia *ac*=AC & *bc*=BC *per hypoth.* recta *ac* in arcu *y* & *bc* in arcu *x* terminabitur (§. 173), consequenter punctum *c* super C cadet (§. 202) & rectæ *ac*, *bc* rectis AC, BC congruent (§. 170). Quare *a*=A, *b*=B, *c*=C (§. 167); cumque Δ *acb* alteri ACB congruat (§. 3), Δ *acb*=& ∽ΔACB (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA 12.

205. *Datis tribus lateribus AB, BC, CA, quorum duo simul sumta AC & BC tertio AB majora sunt, triangulum construere.*



RESOLUTIO.

1. Assumta AB pro basi, ex A intervallo ipsius AC describatur arcus *y* &
2. Ex B intervallo ipsius BC arcus alius *x* (§. 131), qui ob AC+BC > AB *per hypoth.* priorem in C secabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AC & BC (§. 121).

Ita factum est, quod petebatur.

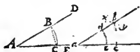
COROLLARIUM 1.

206. Cum ex tribus datis rectis nonnisi unicum triangulum construi possit (§. 204); determinatis tribus lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM 2.

207. Quare si in duobus triangolis ACB & *acb* fiat AC : AB=*ac* : *ab*, AC : BC=*ac* : *bc*; triangula eodem modo determinantur (§. 119), consequenter similia (§. 120), ideoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175. 109).

PROBLEMA 13.



208. *Angulo dato DAE æqualem bac constituere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex A intervallo AC describatur arcus BC; erit AB=AC (§. 40).
2. Ducatur recta *ac*=AC & ex *a* intervallo ipsius AB describatur arcus *x*, item
3. Ex *c* intervallo ipsius CB alius *y*, qui ob AB+BC > AC (§. 190), seu *ab*+*bc* > *ac* (§. 190), priorem in *b* intersecabit (§. 197).
4. Ducatur recta *ab* (§. 121).

Dico esse *a*=A.

II. In Solo

1. Defigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§. 125).
2. In *a* & *c* defigantur baculi ea lege, ut sit *ac*=AC.
3. Ad eos funis vel catena ita applicetur, ut pars ipsius *ab*=AB & altera *cb*=CB fiat.
4. In *b* defigatur baculus.

Dico esse *bac*=BAC.

Interdum etiam in solo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque casu *ac*=AC, *ab*=AB, *cb*=CB *per constr.* Ergo *bac*=BAC (§. 204). *Q. e. d.*

PROBLEMA 14.

209. *Angulum datum HIK in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur radio quocunque arcus LM (§. 131).
2. Ex L & M intervallo dimidia LM majore ducantur arcus se mutuo secantes in N (§. 197).
3. Ducatur recta IN (§. 121).

Dico esse HIN=NIK.

DEMONSTRATIO.

Est enim IL=IM (§. 40), LN=MN *per constr.* IN=IN (§. 81 *Arith.*). Ergo HIN=NIK (§. 204). *Q. e. d.*

PROBLEMA 15.

210. *Lineam rectam AB in duas partes æquales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.*



RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex A & B intervallo dimidia AB majore ducantur arcus se mutuo in C secantes (§. 197).
2. Fiat similis intersectio infra lineam in D (§. *cit.*).
3. Ducatur recta DC (§. 121).

Dico rectam CD dividere AB bifariam in E, & ad AB in E esse perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

ΔACB est æquicrurum (§. 199) & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 209). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E, & ad AB in E perpendicularis (§. 184). *Q. e. d.*

ALITER.

1. Ponatur circinus in A & eo usque aperiatur, donec medium lineæ attingere videatur in D.
2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto
3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In Solo

1. Filum longitudini lineæ AB æquale complicetur, ut punctum medium inveniatur.
2. Hoc acicula infixa notetur & filum lineæ datæ rursus coextendatur.
3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum est, quod petebatur.

SCHOLION.

211. *Duo modi posteriores secandi rectam bifariam equidem mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius est usus.*

PROBLEMA 16.

212. *Ex puncto G in recta ML dato perpendicularem GI excitare.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Posito circino in G arbitrario intervallo resecentur utrinque partes æquales GK & GH.
2. Ex punctis K & H intervallo dimidia KH majore fiat intersectio in I (§. 197).

3. Du-

3. Ducatur recta GI (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam KG=GH & KI=IH *per constr.* atque IG=IG. Ergo anguli ad G sunt æquales (§. 204), consequenter IG ad ML perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

RESOLUTIO ALIA.

1. Normæ, hoc est, instrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compositi, crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex supra punctum datum G cadat.

2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

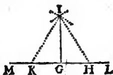
DEMONSTRATIO.

Angulus normæ est rectus *per hypoth.* sed ipsi æqualis est IGL (§. 167). Ergo IGL est itidem rectus (§. 145), ideoque IG ad ML perpendicularis (§. 78).

II. In solo

Norma utimur majore & juxta crus GI filum extenditur, aut

1. Ab utraque parte puncti G resecantur lineæ æquales GK & GH.



2. Punctis K & H alligatum filum KIH baculo extenditur in ejus puncto medio I.

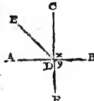
Dico esse GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Cum KI=HI, KG=GH *per constr.* & GI=GI; anguli ad G deinceps positi sunt æquales (§. 204), ideoque IG ad ML normalis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA 28.

213. *Ex uno puncto D super eadem recta AB nonnisi perpendicularis unica CD erigi potest in eodem plano.*



DEMONSTRATIO.

Si fieri potest, sit præterea DE ad idem punctum D perpendicularis, quæ intra crura anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (§. 78). Et quoniam CD perpendicularis ad AD *per hypoth.* ADC similiter rectus est (§. *cit.*), consequenter ADE=ADC (§. 145): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arith.*), ED ad AB perpendicularis esse nequit. *Q. e. d.*

THEOREMA 29.

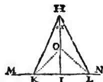
214. *Si recta CD perpendicularis ad DB continuetur in F; erit etiam DF ad DB perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD perpendicularis ad DB *per hypoth.* angulus *x* rectus est (§. 78). Ergo *y* similiter rectus est (§. 65. 145), consequenter DF perpendicularis ad DB (§. 78). *Q. e. d.*

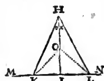
THEOREMA 30.

215. *Si duo puncta H & O alicujus rectæ HI a duobus punctis K & L alterius rectæ MN utrinque æqualiter distent; erit HI ad MN perpendicularis.*



DEMON-

DEMONSTRATIO.



Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter distant *per hypothesin*, HK=HL & QK=QL (§. 192). Est vero etiam QH=QH. Ergo $o=x$ (§. 204), consequenter cum HI=HI, anguli ad I æquales (§. 179), ideoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

PROBLEMA 17.

216. ***A dato puncto H ad rectam MN perpendicularem HI demittere.***

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Posito circino in H intervallo arbitrario, eodem tamen, intersecetur MN in K & L.
2. Ex K & L fiat intersectio in Q (§. 197).
3. Ducatur per Q recta HI (§. 121). Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH=LH & KQ=LQ *per constr.* puncta H & Q a punctis K & L utrinque æqualiter distant (§. 192). Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 215). *Q. e. d.*

ALITER.



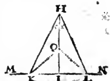
1. Applicetur norma ad lineam datam ML, ita ut crus unum eandem stringat, alterum vero punctum datum I attingat.
2. Ducatur recta GI (§. 121), quæ ad ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ in casu simili problematis 16 (§. 212).

II. In solo

Aut utimur norma majore, ut in probl. 16, aut



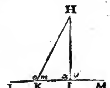
1. Fune ex H extenso designantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur (§. 125).
2. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 210).

Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI designare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH=LH & KI=LI *per constr.* atque HI=HI; anguli ad I sunt æquales (§. 204), ideoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA 31.



217. ***Ab uno puncto H ad eandem rectam LM nonnisi unica perpendicularis HI duci potest.***

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia HK ad LM itidem perpendicularis; erit o rectus (§. 78). Quia HI ad LM perpendicularis *per hypoth.* erit x quoque rectus (§. *cit.*). Est vero $o > x$ (§. 188), ideoque unus rectus altero recto major: quod cum sit absurdum (§. 145), a puncto H ad LM nonnisi unica perpendicularis duci potest. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 32.

218. *In omni triangulo rectangulo HIK angulus nonnisi* x *rectus est; reliqui H & m sunt acuti.*

DEMONSTRATIO.

Angulus *y* rectus est (§. 79). Sed *y*>*m*, item *y*>H (§. 188). Ergo *m* & H sunt recto minores, ideoque acuti (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

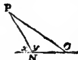
219. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus (§. 66).

COROLLARIUM 2.

220. In triangulo rectangulo latus maximum est hypothenusa (§. 95. 189).

THEOREMA 33.

221. *In triangulo obtusangulo PNO angulus obtusus nonnisi unicus est, reliqui P & O sunt acuti.*



DEMONSTRATIO.

y+*x*=2 rectis (§. 147). Sed *y*, utpote obtusus *per hypoth.* major recto (§. 66). Ergo *x* recto minor. Quoniam vero *x*>O, item *x*>P (§. 188); erunt O & P multo magis recto minores, ideoque acuti (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

222. In triangulo obtusangulo angulorum maximus est obtusus.

COROLLARIUM 2.

223. Ergo latus maximum, quod obtuso opponitur (§. 189).

THEOREMA 34.

224. *Linea perpendicularis HI (V. Fig. §. 217) est brevissima omnium, quæ a puncto H ad eandem rectam LM duci possunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI perpendicularis ad LM *per hypoth.* angulus *x* rectus est (§. 78), ideoque HK hypothenusa (§. 95), consequenter HK>HI (§. 220). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

225. Ergo distantia puncti a linea vel plano est recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 15).

COROLLARIUM 2.

226. Quare si linea HI fuerit ipsi KL parallela, erunt perpendicula quævis ex illa in hanc demissa GE, AB, CD inter se æqualia, & contra (§. 81).

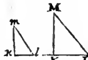


COROLLARIUM 3.

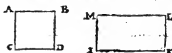
227. Altitudo figuræ est perpendiculum ex vertice in basin demissum (§. 115).

COROLLARIUM 4.

228. In triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 91), & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§. 78). Ergo si KL sumatur pro basi, erit M vertex (§. 114), ideoque MK altitudo (§. 227).



COROLLARIUM 5.



229. Similiter in quadrato & oblongo latus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 98. 100), ideoque unum ad alterum perpendiculare (§. 78). Quod si ergo latus unum CD vel IK sumatur pro basi; erit A vel L vertex (§. 114), consequenter AC vel LK altitudo (§. 227).

THEOREMA 35.

230. *Si HI (V. Fig. §. 226) fuerit parallela & AB perpendicularis ad KL; erit eadem AB etiam perpendicularis ad HI.*

DEMONSTRATIO.

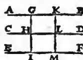
Fiat EB=BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 212); erit GE=CD (§. 226) & E=D (§. 78. 145), consequenter BG=BC & *y*=*u* (§. 179). Sed quoniam

niam AB perpendicularis ad KL *per hypoth.* ideo $u+x=o+y$ (*§.* 79). Ergo & $x=o$ (*§.* 91 *Arith.*). Quare cum porro sit AB=AB; erit & $m=n$ (*§.* 179), ideoque BA ad HI perpendicularis (*§.* 79). *Q. e. d.*

Corollarium.

231. Sunt ergo EG, AB, CD distantiæ tum rectæ KL a recta HI, tum rectæ HI a recta KL (*§.* 225), ideoque si HI parallela ipsi KL, etiam KL parallela est ipsi HI (*§.* 81).

Theorema 36.



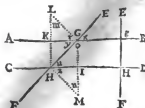
232. *Parallelæ AB & EF eidem tertiæ CD sunt etiam parallelæ inter se, & parallelis parallelæ sunt inter se parallelæ.*

Demonstratio.

Ducantur GI & KM perpendiculares ad CD (*§.* 216): erunt eædem perpendiculares ad AB & EF (*§.* 214. 230). Ergo GH=KL & HI=LM (*§.* 226), consequenter GH+HI=KL+LM (*§.* 88 *Arith.*), hoc est, GI=KM (*§.* 86. 87 *Arith.*), ideoque AB parallela ipsi EF (*§.* 226. 81). *Quod erat unum.*

Posterius patet per prius.

Theorema 37.



233. *Si duas parallelas AB & CD secet transversa EF in G & H; erunt 1°. anguli alterni y & u æquales; 2°. angulus externus x æquatur interno opposito u; 3°. duo interni oppositi o & u sunt æquales duobus rectis.*

Demonstratio.

Si recta EF secet parallelas AB & CD ad angulos rectos; omnia manifesta sunt per theorema 35 (§. 230). Si vero oblique secet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 216). Producatur GI in M & HK in L (§. 21), donec fiat IM=GI & KL=HK.

1°. Quoniam GI perpendicularis ad CD *per constr.* erunt anguli ad I æquales (§. 79). Porro GI=IM *per construct.* & HI=IH. Ergo HG=HM & $u=z$ (§. 179). Eodem modo ostenditur esse HG=GL & $y=t$. Quamobrem & GL=HM (*§.* 87 *Arith.*). Est vero etiam HK=GI (§. 226), & hinc HK+KL=GI+IM (§. 88 *Arith.*), hoc est, HL=GM (§. 86. 87 *Arith.*) & GH=GH. Unde $t+y=u+z$ (*§.* 204). Cum itaque $t=y$ & $u=z$ *per demonstrata*; erit $y+y=u+u$ (§. 15 *Arith.*), hoc est, $2y=2u$, consequenter $y=u$ (*§.* 94 *Arith.*). *Quod erat primum.*

2°. $x=y$ (*§.* 156) & $u=y$ (*per num.* 1). Ergo $x=u$ (*§.* 87 *Arith.*). *Quod erat secundum.*

3°. $x+o=180°$ (*§.* 148). Sed $x=u$ (*per num.* 2). Ergo $u+o=180°$ (*§.* 15 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

PRO-

PROBLEMA 18.



234. *Datis duobus lateribus* AB & BC *cum angulo* A *uni eorum* BC *opposito, triangulum* ABC *construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato æqualis (§. 208), factaque AB uni datorum laterum æquali,
2. Ex B intervallo alterius lateris dati BC crus anguli AC intersecetur in C.
3. Puncta B & C connectantur recta (§. 121). Sic factum est, quod petebatur.
4. Quodsi BC < BA; aut bis secabit crus AC, aut idem tanget, ideoque in casu posteriore angulus ad C rectus est (§. 309): in priore constare debet utrum angulus ad C sit acutus, an obtusus.

COROLLARIUM 1.

235. Cum ex duobus lateribus atque angulo uni eorum opposito triangulum construi possit, iis datis reliqui anguli & crus reliquum una determinantur. Quare si in duobus triangulis ejusdem speciei ABC & *abc* fuerit AB = *ab*, BC = *bc* & A = *a*; erit etiam AC = *ac*, B = *b*, C = *c* & △ ABC = △ *abc*: nulla enim adest ratio, cur horum aliqua sint inæqualia.

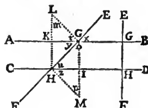
SCHOLION.

236. *In genere liquet, æqualia esse, quæ per æqualia determinantur, seu, quod perinde est, figuras esse æquales, quæ ex æqualibus datis eodem modo construuntur. Unde non solum triangulorum, verum etiam reliquarum figurarum congruentia ex hoc principio demonstrari potest.*

COROLLARIUM 2.

237. Quodsi in duobus triangulis ejusdem speciei, veluti acutangulis, ABC & *abc* fuerit A = *a* & AB : BC = *ab* : *bc*; triangula eodem modo determinantur (§. 119); ideoque similia sunt (§. 120), consequenter etiam B = *b*, C = *c*, BC : CA = *bc* : *ca* & CA : AB = *ca* : *ab* (§. 175).

THEOREMA 38.



238. *Perpendicula* KH & GI *æquales parallelarum partes* KG & HI *intercipiunt.*

DEMONSTRATIO.

KH = GI (§. 230. 226), $u = y$ (§. 233), & GH = GH. Ergo KG = HI (§. 179). *Q. e. d.*

THEOREMA 39.

239. *Si trianguli cujuscunque* ACB *latus unum* BC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DCA *æqualis duobus internis oppositis* y & z *simul sumtis.*



DEMONSTRATIO.

Ducatur CE basi AB parallela, erit $x = y$ & $o = z$ (§. 233), consequenter DCA = $x + o = y + z$ (§. 88 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 40.

240. *In quovis triangulo* ACB *tres anguli* y, u, z *junctim sumti sunt æquales duobus rectis seu* 180°.

DEMONSTRATIO.

Nam $o + x = y + z$ (§. 239). Ergo $o + x + u = y + z + u$ (§. 88 *Arith.*). Sed $o + x + u = 180°$ (§. 147). Ergo $y + z + u = 180°$ (§. 87 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.



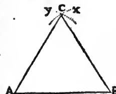
241. In triangulo igitur rectangulo MKL duo anguli obliqui M & L junctim sumti efficiunt rectum seu 90°, ideoque semirecti sunt, si fuerit æquicrurum (§. 184).

COROLLARIUM 2.

242. Si unus angulus est obtusus, duo reliqui simul sumti sunt recto minores (§. 66).

COROLLARIUM 3.

243. In triangulo æquilatero ACB quilibet angulus est 60°, nimirum $180:3$ (§. 186).



COROLLARIUM 4.

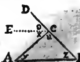
244. Cum itaque in triangulo rectangulo necessario angulus unus sit rectus (§. 91); triangulum rectangulum æquilaterum esse nequit.

COROLLARIUM 5.

245. Si unus trianguli angulus ex 180° subtrahitur; summa duorum reliquorum relinquitur: & si summa duorum ex 180° aufertur; residuus fit tertius.

COROLLARIUM 6.

246. Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, sive sigillatim sive junctim; etiam tertius unius æqualis est tertio alterius (§. 91 *Arith.*).



COROLLARIUM 7.

247. In quovis triangulo anguli ad basin y & z junctim sumti sunt duobus rectis minores.

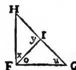
COROLLARIUM 8.

248. Quoniam in triangulo æquicruro DFE anguli ad basin y & u æquales sunt (§. 184), si angulus ad verticem F subtrahitur a 180° & residuum bisecatur; unus angulorum æqualium y vel u prodit. Similiter si duplum anguli unius ad basin y a 180° subtrahitur; angulus ad verticem F relinquitur.



PROBLEMA 19.

249 *In extremitate F lineæ FG perpendicularem FH excitare.*



RESOLUTIO.

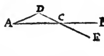
1. Super FG construatur Δ æquilaterum FIG (§. 198).
2. Producatur GI in H (§. 121), donec fiat $HI=GI$.
3. Ducatur recta HF (§. 121): quæ erit ad FG perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Δ FIG est æquilaterum *per constr.* $o=60^o$ & $u=60^o$ (§. 243). Ergo $y=120^o$ (§. 239), consequenter, ob $FI=HI$ *per constr.* $x=30^o$ (§. 248). Cum igitur $x+o=90^o$; angulus ad F rectus (§. 144) & HF ad FG perpendicularis est (§. 78). *Q. e. d.*

THEOREMA 41.

250 *Si recta DE secet rectam AB in C; non alibi eandem denuo secabit.*



DEMONSTRATIO.

Occurrat enim, si fieri potest, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, e. gr. in A: erunt rectæ ADCE puncta duo A & C in recta altera AB, consequenter recta ADCE tota supra AB cadit (§. 170), ideoque eam non secat (§. 50): quod cum hypothesi repugnet, DE non alibi quam in C, ipsam AB secare potest. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 42.



251. *Si in duobus triangulis* ABC & abc *fuerit* AB=ab, A=a & B=b; *erit etiam* AC=ac, BC=bc, C=c & Δ ACB= & ∽ Δ acb.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus Δ *abc* poni ſupra alterum ABC, ita ut punctum *a* ſuper A & recta *ab* ſuper AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A & *b*=B *per hypoth.* punctum *b* ſuper B (§. 169), recta *ac* ſuper AC & *bc* ſuper BC (§. 166), conſequenter *c* ſuper C (§. 250) cadit. Cum igitur Δ *abc* alteri ABC congruat (§. 3); erit *ac*=AC, *bc*=BC, *c*=C (§. 177) & Δ *abc*= & ∽ ΔABC (§. 161). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

252. Si in duobus triangulis ACB & *acb* fuerit A=*a*, B=*b* & BC=*bc*; erit etiam C=*c* (§. 246), conſequenter AC=*ac*, AB=*ab* & Δ ACB= & ∽ Δ *acb* (§. 251).

THEOREMA 43.

253. *Si in triangulo DFE anguli ad baſin* y & u *æquales; triangulum eſt æquicrurum.*



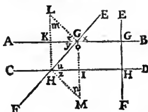
DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. 209); erit DF=FE (§. 252). Eſt ergo Δ DFE æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

254. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum eſt (§. 88).

THEOREMA 44.



255. *Si duas lineas AB & CD ſecet tranſverſa EF in G & H, ita ut vel* 1°. y=u; *vel* 2°. x=u; *vel* 3°. o+u=180°; *erunt lineæ iſtæ inter ſe parallelæ.*

DEMONSTRATIO.

1°. Ducantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 216); erit K=I (§. 78. 145). Eſt vero & *y*=*u* *per hypoth.* & HG=HG. Quare HK=GI (§. 252), conſequenter cum HK & GI ſint diſtantiæ linearum AB & CD (§. 225), lineæ AB & CD ſunt inter ſe parallelæ (§. 81). *Quod erat primum.*

2°. *x*=*u* *per hypoth.* & *x*=*y* (§. 156). Ergo *y*=*u* (§. 87 *Arith.*), conſequenter AB & CD ſunt inter ſe parallelæ *per num.* 1. *Quod erat ſecundum.*

3°. *o*+*u*=180° *per hypoth.* Sed *o*+*x*=180° (§. 147). Ergo *u*=*x* (§. 87. 91 *Arith.*), conſequenter AB & CD ſunt inter ſe parallelæ *per num.* 2. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 45.



256. *Si duæ lineæ EG & AB fuerint perpendiculares ad eandem tertiam HI; erunt inter ſe parallelæ.*

DEMONSTRATIO.

Fiat AB=EG ducaturque recta KL; erit HI ipsi KL parallela (§. 81), consequenter EB=GA (§. 238). Quare cum etiam sit GB=GB; erit EG B=ABG (§. 204), consequenter EG ipsi AB parallela (§. 255). *Q. e. d.*

THEOREMA 46.

257. *Parallelæ DF & GA inter easdem parallelas FA & DG sunt æquales: & contra, si DF & GA fuerint parallelæ & æquales; erit etiam FA ipsi DG parallela & æqualis.*



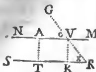
DEMONSTRATIO.

Ducatur recta DA (§. 121): erit $x=y$ & $o=u$ (§. 233). Quare cum AD=AD, erit DF=GA (§. 251). *Quod erat unum.*

DF=AG *per hypoth.* & cum eædem lineæ sint parallelæ *per hypoth.* $o=u$ (§. 233). Quare cum etiam sit DA=DA, erit $x=y$ (§. 179), consequenter FA ipsi DG parallela (§. 255), ideoque etiam æqualis *per num.* 1. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 20.

258. *Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere.*



RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 216).
2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA=KV (§. 212).
3. Per V & A ducatur recta MN (§. 121), quæ erit ipsi RS parallela (§. 226).

ALITER.

1. Regula ad rectam RS applicetur & circinus intervallo VK aperiatur.
2. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R versus S promoveatur.

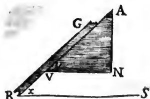
Ita crus alterum per V parallelam ipsi RS describet (§. 81).

ALITER.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.
2. In V fiat $o=x$ (§. 208).

Erit VN seu MN parallela ipsi RS (§. 255).

ALITER.



Ex modo præcedente enatus est sequens.

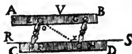
1. Triangulum rectangulum AVN ex ligno Ebenino aut alio Indico paratum ita applicetur ad rectam RS, ut basis ejus NV parti ipsius congruat.
2. Hypothenusæ ejusdem trianguli AV applicetur regula RG, quæ altera manu in hoc situ immota detineatur.

3. Trian-

3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec basis punctum V attingat.

Erit enim in quovis situ basis VN, ob $y = x$, ipsi RS parallela (§. 255). *Q. e. d.*

ALITER.



Utimur interdum *Parallelismo* ex duabus regulis ligneis potius, quam orichalceis (§. 122) AB & CD composito, quæ ejusdem ubique latitudinis retinaculis EF & GH inter se æqualibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus EG & FH a se invicem distent, ipsæ autem regulæ variis intervallis diduci queant. Nimirum

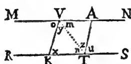
1. Regula una debite applicetur ad rectam RS.
2. Altera ad datum punctum V adducatur &
3. Juxta hujus ductum recta AB per V ducatur: quæ erit ipsi RS parallela.

DEMONSTRATIO.

Ducatur obliqua linea EH (§. 121). Quoniam EG = FH, EF = GH *per constr.* & EH = EH; erit $o = x$ (§. 204), ideoque FH parallela ipsi EG (§. 255). Sed AB ipsi EG & RS ipsi FH parallela *per constr.* Ergo AB parallela ipsi RS (§. 232). *Q. e. d.*

II. In campo

Commode utimur modo primo antecedentium, vel



1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).
2. Ad V fiat $o = x$ (§. 208).

Erit MV, quæ facile produci potest in N (§. 125), ipsi RS parallela (§. 255).

ALITER.

1. In punctis K & T defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).
2. Fiat $u = x$ (§. 208) & TA = VK.
3. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 125).

Erit MN parallela ipsi RS.

DEMONSTRATIO.

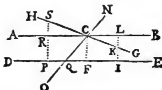
Quoniam $x = u$ *per constr.* erit TA parallela ipsi KV (§. 255), consequenter $z = y$ (§. 233). Est vero etiam TA = KV *per constr.* & TV = TV. Ergo $m = n$ (§. 179), consequenter MN parallela ipsi RS (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

259. *Si parallelismis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur & a rectitudine cito recedunt ipsi parallelismi. Huic malo præsens remedium attulit* Jacobus Leupoldus, *artifex insignis, qui retinacula ex geminis lamellis orichalceis elasticis, in medio firmiter connexis, & capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare solet. Notum vero est, orichalcum ad elasticitatem usque vehementi contusione indurari.*

THEO-

THEOREMA 47.



260. *Per idem punctum C eidem rectæ DE parallela nonnisi unica AB duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim, si fieri potest, adhuc alia HG, priorem secans in C, cujus ideo pars GC efficit cum parte alterius CB angulum BCG. Ex I erigatur perpendicularis IL (§. 212); erit tum IK ad CG, tum IL ad CB perpendicularis (§. 230), consequenter anguli CKL (§. 214) & CLK recti (§. 78): quod cum sit absurdum (§. 218), per C nonnisi AB ipsi DE parallela duci potest. *Q. e. d.*

ALITER.

Angulus NCH=NQD & NCA =NQD (§. 233). Ergo NCH= NCA (§. 87 *Arith.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arith.*), HG & AB non sunt simul ipsi DE parallelæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 48.

261. *Si recta NO secet duas rectas alias HG & DE in C & Q, ita ut duo anguli interni oppositi HCO & DQN fuerint simul sumti duobus rectis majores; lineæ GH & ED versus eam plagam divergunt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur ACB parallela ipsi DE per C (§. 258); tum angulus ACO cum angulo DQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed HCO & DQN simul sunt duobus rectis majores *per hypoth.* Ergo HCO > ACO (§. 92 *Arith.*), consequenter AC intra spatium HCQD cadit. Erigatur perpendicularis PS (§. 212) & ex C demittatur perpendicularis CF (§. 216); erit PR=CF (§. 226), consequenter PS major PR (§. 84 *Arith.*), est etiam major ipsa CF (§. 89 *Arith.*). Distantiæ igitur rectarum CH & QD versus H & D crescunt (§. 225), ideoque lineæ CH & QD versus eam plagam divergunt (§. 84). *Q. e. d.*

THEOREMA 49.

262. *Si duas rectas HG & DE secet transversa NO in C & Q, ita ut anguli GCO & EQN simul sumti sint duobus rectis minores; lineæ CG & QE versus eam plagam convergunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CG ipsi QE parallela esse nequit (§. 233), ducatur AB parallela ipsi DE per C (§. 258): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed GCO & EQN simul sumti sunt duobus rectis minores *per hypoth.* Ergo GCO < BCQ (§. 92 *Arith.*), consequenter CB extra spatium GCQE cadit. Demittantur perpendiculares LI & CF (§. 216); erit CF=IL (§. 226), consequenter IK minor IL (§. 84 *Arith.*), est etiam minor ipsa CF (§. 89 *Arith.*). Distantiæ igitur rectarum CG & QE decrescunt versus G & E (§. 225), ideoque lineæ CG & QE versus eam plagam convergunt (§. 83). *Q. e. d.*

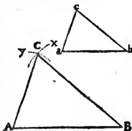
COROL-

COROLLARIUM.

263. Si anguli GCQ & BQC simul sumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipsi deinceps positi duobus rectis majores (§. 147). Quare lineæ, quæ versus unam plagam convergunt (§.262), versus oppositam divergunt (§.261).

PROBLEMA 21.

264. *Datis recta AB & angulis adjacentibus A & B, qui junctim sumti duobus rectis minores sunt, triangulum ABC describere.*



RESOLUTIO.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 155).
2. Crura AC & BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 250. 262). ABC triangulum erit desideratum.

COROLLARIUM 1.

265. Data ergo linea una datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

COROLLARIUM 2.



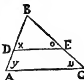
266. Quare si in duobus triangulis fiat A=a & B=b, triangula eodem modo determinantur (§. 119), ideoque similia sunt (§. 120).

COROLLARIUM 3.

267. Si in duobus triangulis fuerit A=a & B=b, consequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero (§. 145); erit etiam C=c (§. 246), hoc est, △△ ACB & acb sibi mutuo æquiangula (§. 109). Quare △△ sibi mutuo æquiangula similia sunt (§. 266), & hinc latera homologa, seu æqualibus angulis opposita, proportionalia habent (§. 175).

THEOREMA 50.

268. *Si in triangulo ABC recta DE basi AC parallela ducatur; segmenta crurum cruribus proportionalia sunt, hoc est, BA:BC=BD:BE =AD:EC & BA:AC=BD:DE, atque △ BDE ∽ △ BAC.*

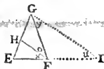


DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipsi AC; erit $x=y$ & $o=u$ (§. 233), ideoque △ BDE ∽ △ BAC & BA:BC= BD:BE & BA:AC=BD:DE (§.267). Ergo & BA:BD=BC:BE (§.173 *Arith.*), consequenter AD:BD =EC:BE (§. 193 *Arith.*) seu BD:AD=BE:EC (§.169 *Arith.*), vel denique BD:BE=AD:EC (§. 173 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 51.

269. *Recta FH angulum GFE bifariam secans, basin GE cruribus adjacentibus EF & GF proportionaliter secat.*



DEMONSTRATIO.

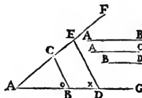
Producatur EF in I (§. 21), donec fiat FI=GF, erit $o+x=y+u$ (§.239). Sed $o=x$ *per hypoth.* & $y=u$ (§.184), ideoque $2y=2o$ (§. 15 *Arith.*). Ergo $o=y$ (§.94 *Arith.*), consequenter HF ipsi GI parallela (§. 255). Quare EF:EH=FI:GH (§. 268) = GF:GH (§. 168 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

270. Est ergo & EF:GF=EH:GH (§. 173 *Arith.*), consequenter EF+FG:EF=GE:EH (§.190 *Arith.*), seu EF+FG:GE=EF:EH (§.173 *Arith.*),

Arith.), hoc est, ut summa crurum ad basin integram, ita crus unum ad segmentum hujus adjacens.

PROBLEMA 22.



271. *Datis tribus lineis* AB, AC & BD, *invenire quartam proportionalem*.

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC (§. 121).
4. In D constituatur angulus ipsi ABC æqualis (§. 208).

Dico, esse AB : AC = BD : CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam o = x *per constr.* erit BC ipsi DE parallela (§. 255). Quamobrem AB : AC = BD : CE (§. 268). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

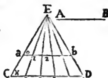
272. Quodsi duabus lineis AB & AC datis tertia inveniri debet; etiam BD ipsi AC æqualis fieri, hoc est, AC bis poni debet. Erit nimirum AB : AC = AC : CE.

COROLLARIUM 2.

273. Si DB sumatur pro unitate; respondebit CE exponenti rationis AC : AB (§. 140 *Arith.*).

PROBLEMA 23.

274. *Datam rectam* AB *in quotcunque partes æquales dividere.*



RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio assumta resecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, e. gr. 5.
2. Super harum partium intervallo construatur triangulum æquilaterum CED (§. 198).
3. Ex E in *a* transferatur recta AB, itidemque ex E in *b*.
4. Ducatur recta *ab*: ducantur itidem aliæ ex E in 1, 2, 3, &c.

Dico esse $ab = AB$, $a1 = \frac{1}{5} AB$, $a2 = \frac{2}{5} AB$ &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Ea = Eb$ & $EC = ED$ *per constr.* erit $Ea : Eb = EC : ED$ (§. 168. 173 *Arith.*). Quare cum angulus E utrique triangulo ECD & E*ab* communis sit: erit $EC : CD = Ea : ab$ & $o = x$ (§. 183). Sed $EC = CD$ *per constr.* Ergo $Ea = AB = ab$ (§. 151 *Arith.*). *Quod erat unum.*

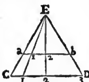
Quoniam $o = x$ *per demonstr.* erit $a1$ parallela ipsi C1 (§. 255), consequenter $EC : C1 = Ea : a1$ (§. 268), hoc est, ob $EC = CD$ *per constr.* & $Ea = ab$ *per demonstr.* $CD : C1 = ab : a1$ (§. 168 *Arith.*). Sed $C1 = \frac{1}{5} CD$ *per constr.* Ergo $a1 = \frac{1}{5} ab$ (§. 151 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

Eodem modo ostenditur, esse $a2 = \frac{2}{5} AB$, consequenter $12 = \frac{1}{5} AB$, & ita porro.

COROL.

COROLLARIUM.

275. Quodsi ergo CD fuerit utcunque divisa in 1 & 2; eodem modo recta *ab* secabitur in eadem ratione. Est nempe CD : C 1 = *ab* : *a* 1, CD : C 2 = *ab* : *a* 2 &c. (§. 274).



SCHOLION.

276. *Corollarii hujus usus amplissimus est in architectura tam civili, quam militari, præsertim ubi ichnographiæ vel ampliandæ, vel contrahendæ.*

PROBLEMA 24.

277. *Scalam Geometricam construere.*



RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF & in eam transferantur partes 10 æquales B 1, 1 2, 2 3, 3 4 &c. intervallum vero 10 partium AB toties ex B in E, ex E in F &c. quoties libuerit.
2. In A excitetur perpendicularis AC, arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales divisa (§. 249).
3. Per puncta divisionum 1, 2, 3, 4, 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§. 258).
4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB æquales.
5. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis transversis connectantur (§. 121).

Dico, si AB fuerit decempeda, fore B 1, 1 2, 2 3, 3 4 &c. pedes, 9 9 digitum unum, 8 8 digitos duos, 7 7 tres, 6 6 quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

B 1 = 1 2 = 2 3 &c. = $\frac{1}{10}$ AB *per constr.* Sed pes est decempedæ pars decima (§. 25). Ergo cum AB sit decempeda *per hypoth.* erunt B 1, 1 2, 2 3 &c. pedes. *Quod erat unum.*

Porro quia 9 9 est parallela ipsi A 9 *per constr.* C 9 : CA = 9 9 : A 9 (§. 268). Sed C 9 = $\frac{1}{10}$ CA *per constr.* Ergo 9 9 = $\frac{1}{10}$ A 9 (§. 151 *Arith.*). Quare cum A 9 sit pes *per demonstr.* erit 9 9 digitus (§. 25). Eodem modo ostenditur esse 8 8 duos, 7 7 tres &c. digitos. *Quod erat alterum.*

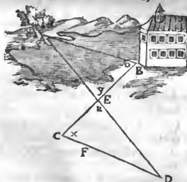
SCHOLION.

278. *Quemadmodum hic linea exigua A 9 in 10 partes æquales dividitur; ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi potest. Neque opus est, ut angulus A sit rectus; sed idem obliquus esse potest.*

COROLLARIUM.

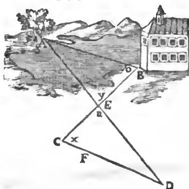
279. Quodsi ergo circini crus unum collocetur in I & alterum in K, erit intervallum IK = 1° 4′ 5″ & ita porro.

PROBLEMA 25.



280. *Invenire distantiam duorum locorum AB, quorum unus B tantum accedi potest.*

RESOLUTIO.



1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus, sit cum E & B in eadem recta (§. 125).
2. In C constituatur angulus ECF ipsi B æqualis (§. 208).
3. Tandem ex C progrediendum versus D, donec baculus in D defixus, sit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse DC=BA.

DEMONSTRATIO.

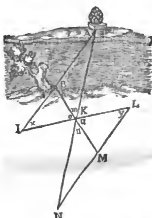
Nam BE=EC, o=x *per constr.* & y=u (§. 156). Ergo AB=DC (§. 251). *Q. e. d.*

ALITER.

1. Defigatur (*Vid. Fig. seq.*) baculus in I cum B & A in eadem recta (§. 125), itidemque alius utcunque in K.
2. Ex K in L transferatur IK, in M vero KB.
3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus, sit cum M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 125).

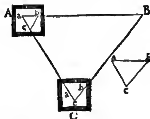
Dico esse MN=BA.

DEMONSTRATIO.



BK=KM & IK=KL *per constr.* o=u (§. 156). Ergo IB=ML & y=x (§. 179). Quare cum sit o+m=u+n (§. 156), & IK=KL *per constr.* erit IA=NL (§. 251), consequenter AB=NM (§. 91 *Arith.*). *Q. e. d.*

ALITER.



1. Mensula Geometrica in C collocata per dioptras collineetur in A & B, ducanturque rectæ *ac* & *cb*.
2. Quæratur distantia stationis a loco accessibili AC (§. 126) &
3. Ex Scala Geometrica in *ac* transferatur (§. 277).
4. Translocetur mensula in A, ita ut pun-

punctum *a* ipsi A immineat & per dioptras regulæ ad *ac* applicatæ baculus in prima statione C defixus conspiciatur.

5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque *ab*.

6. Denique in Scala Geometrica capiatur intervallum ipsius *ab*(§. 277).

Ita distantia quæsita AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $c=C$ & $a=A$ (*per construct.* & §. 167); erit $ac : ab = AC : AB$ (§. 267), hoc est, iidem numeri rationes $ac : ab$ & $AC : AB$ indigitant (§. 149 *Arith.*). *Q. e. d.*

ALITER.

1. Baculo in C defixo investigetur quantitas angulorum A & C (§. 152), itemque longitudo ipsius AC (§. 126).

2. Ope instrumenti transportatorii & Scalæ Geometricæ construatur triangulum *acb* (§. 264).

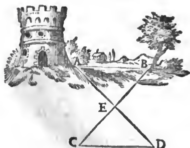
3. Ad Scalam Geometricam applicetur recta *ab* (§. 277).

Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA 26.



281. *Metiri distantiam duorum locorum inaccessorum* AB.

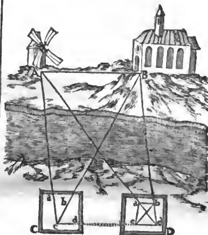
RESOLUTIO.

Sine instrumentis tædiosior est problematis resolutio, quam ut commendari possit. Cui tamen volupe fuerit eandem experiri, is

1. Statione in E assumta rectas BE & AE inveniat (§. 280).

2. His datis reperiet DC ipsi BA æqualem (§. 194).

ALITER.

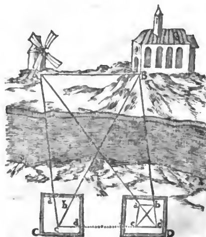


1. Duabus stationibus in C & D electis, in prima C collocetur mensula & per dioptras collineetur in D, B & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ *cd*, *cb*, *ca*.

2. Quæratur distantia stationum CD (§. 126) &

3. Ex Scala Geometrica transferatur in *cd* (§. 279).

4. Baculo in C defixo mensula collocetur in D ea lege, ut punctum *d* ipsi D, hoc est puncto, in quo defigeba-



gebatur ante baculus, immineat & per dioptras regulæ ad *cd* applicatæ respicienti baculus in C occurrat.

5. Hinc porro collineatio fiat in A & B, ducanturque rectæ *da* & *db*.

6. Tandem distantia punctorum *a* & *b* investigetur in Scala Geometrica (§. 279).

Dico esse *cd* : *ab* = CD : AB.

Demonstratio.

Est enim *cdb* = CDB & *bcd* = BCD (*per constr.* & §. 167). Ergo *dc* : *cb* = DC : CB (§. 267). Similiter cum sit *acd* = ACD & *adc* = ADC (*per construct.* & §. 167); erit *dc* : *ac* = DC : AC (§. 267), ideoque *bc* : *ac* = BC : AC (§. 198 *Arith.*), consequenter, ob *acb* = ACB (*per construct.* & §. 167), *ac* : *ab* = AC : AB (§. 183) &, ob *dc* : *ac* = DC : AC *per demonstr.* *dc* : *ab* = DC : AB (§. 197. 169 *Arith.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Electis duabus stationibus C & D investigetur quantitas angulorum *y* & *x*, item *z* & *u* (§. 152), quorum summæ dant angulos C & D (§. 86 *Arith.*).

2. Quæratur porro distantia stationum CD (§. 126) &

3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex Scala Geometrica transferatur recta *cd* ipsi CD respondens (§. 279).

4. Super ea ope angulorum *x* & D construatur triangulum *bcd* & ope angulorum *z* & C alterum *acd* (§. 264).

5. Tandem in Scala Geometrica investigetur distantia punctorum *a* & *b* (§. 279).

Dico esse *ab* : *cd* = AB : CD.

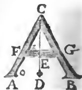
Demonstratio.

Eadem est cum proxime præcedente.

Scholion 1.

282. *Levi attentione patet, non absimili methodo ex duabus stationibus reperiri distantias plurium locorum.*

Scholion 2.



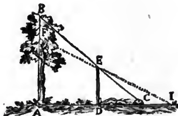
283 *Nec minus manifestum est, mensulæ situm in istiusmodi operationibus horizontalem esse debere: id quod obtinetur ope perpendiculi CD.*

Problema 17.

284. *Altitudinem accessibilem* AB *metiri.*

RESO-

Resolutio.



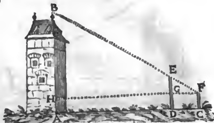
1. Baculus DE tantæ longitudinis ſumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet.
2. Humi proſtratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 121).
3. Quodſi contingat, ut E & B ſint cum oculo C in eadem recta; erit CA=AB; ſin punctum inferius F cum E & oculo in eadem recta fuerit, propius cum baculo ad altitudinem AB provolvaris opus eſt; ſin punctum ſuperius, procul recedendum, donec prædicta conditio adimpleatur.
4. Tandem diſtantiam oculi C ab altitudine AB metiaris neceſſe eſt (§. 126).

Dico eſſe CA=AB.

Demonstratio.

Quoniam enim AB (§. 227) & ED *per conſtruct.* ad AC perpendiculares; inter ſe parallelæ ſunt (§. 256), ideoque CD:DE = CA:AB (§. 268). Sed CD=DE *per hypoth.* Ergo CA=AB (§. 149 *Arith.*). *Q.e.d.*

Aliter.



1. In diſtantia plurium e.gr. 30, 40 & amplius pedum defigatur perpendiculariter baculus DE & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita ut cum oculo in F conſtituto E & B ſint in eadem recta.
2. Inveſtigetur diſtantia baculorum GF & baculi minoris ab altitudine quæſita HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 126).
3. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 302 *Arith.*).
4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC vel pars HA.

Dico ſummam eſſe altitudinem AB.

E. gr. Sit HF=48', GF=20', GE=16', FC=5'.

20 —— 16 —— 48
5   4   4
192

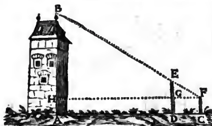
5) 192 ($38\frac{2}{5}$=BH
15
42
40
2

$38\frac{2}{5}$=BH
5=FC
$43\frac{2}{5}$=AB

Demonstratio.

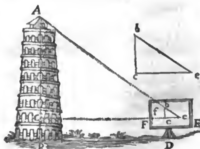
Cum HF ipſi AC parallela ſupponatur, ſintque BA (§. 227) & ED *per conſtr.* ad AC perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad HF (§. 230), ideoque GE & BH parallelæ (§. 256), conſequenter GF:GE = HF:HB (§. 268). *Quod erat unum.*

Porro



Porro cum HA & FC ſint perpendiculares inter eaſdem parallelas HF & AC (*per conſtr.* & §.227); erit FC = HA (§.226). Quare BH+FC = BH+HA (§.88 *Arith.*) = BA (§.86 *Arith.*). *Q.e.d.*

ALITER.



1. Menſula in D verticaliter erigatur, ita ut latus ipſius FE ſit horizonti parallelum: id quod obtinetur ope perpendiculi CD.



2. Ducatur recta *ef* lateri menſulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur menſula, donec collineatio in altitudinem quæſitam fiat.
3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras tranſpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *eb*.
4. Quæratur diſtantia ſtationis ab altitudine *e*C (§. 126) &
5. Ex Scala Geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 279).
6. Ex *c* erigatur perpendiculum *cb* (§. 212), quod
7. Ad Scalam Geometricam applicatum (§. 279) partem altitudinis AC manifeſtat.
8. Addatur altitudo BC.

Dico, ſummam eſſe altitudinem AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC perpendicularis ad BD (§. 227) & Ce ipſi BD parallela *per conſtr.* erit eadem AC perpendicularis ad Ce (§. 230). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis *per conſtr.* Ergo *bc* ipſi AC parallela (§. 256), conſequenter *ec*:*cb* = eC : CA (§.268).

ALITER.

1. Inveſtigetur quantitas anguli *e* (§. 152) & diſtantia ſtationis *e*C (§. 126).
2. Super *ec* in Scala Geometrica minore aſſumta (§. 279) conſtruatur triangulum ad *c* rectangulum *ecb* (§. 264).
3. Reliqua fiant ut ante.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *c* = C & *e* = *e per conſtr.* Ergo *ec*:*cb* = eC : AC (§. 267). *Q.e.d.*

SCHOLION.

285. *In omnibus iſtis reſolutionibus ſupponitur planities perfecte horizontalis: quæ cum rariſſime in praxi occurrat, ſi notabilis fuerit declivitas, non tam inſtrumenti altitudo, quam ipſa CE addenda, in altitudine acceſſibili facile inveſtiganda. Neceſſe etiam eſt, ut baculi, quantum fieri poteſt, exactiſſime ad horizontem perpendiculariter infigantur, & in inſtrumentis præſcripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur: imo altitudo BC eodem modo inveſtigari poteſt, quo ipſam AC invenimus.*

PRO-

PROBLEMA 28.

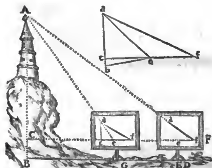
286. *Altitudinem inaccessam AB metiri.*

RESOLUTIO.

Sine instrumentis prolixa est operatio. Nimirum

1. Distantia stationis eC quæritur per problema 25 (§. 280).
2. Reliqua fiunt, ut in problemate præcedente (§. 284).

ALITER.



1. Statione in D electa mensula colloce tur ut in problemate præcedente (§. 284).
2. Ducantur ut ibidem rectæ *ef* & *af*.
3. Baculi in G defixi, ut sit in recta *f*C, quæratur distantia a puncto *f* (§. 126) &
4. Ex Scala Geometrica transferatur in *fe* (§. 279).
5. Sub puncto *f* in D defigatur baculus & mensula ita collocetur in G, ut punctum *e* ipsi G immineat & per dioptras regulæ ad *ef* applicatæ respicienti baculus in D occurrat.
6. Vertatur regula circa punctum *e*, donec per dioptras prospiciens apicem A videat, ducaturque recta *ea*.
7. Ex puncto *a* demittatur *ac* ad *fe* perpendicularis (§. 216): quæ
8. Ad Scalam Geometricam (§. 279) applicata prodit altitudinem AC.
9. Quodsi puncta B, E, D fuerint in eadem recta; addatur altitudo puncti *f*, ut habeatur AB: sin minus, regula circa *e* vertatur, donec per dioptras despiciens videat B, ducaturque *eb*, atque perpendiculum *ac* continuetur, donec ipsi *eb* in *b* occurrat. Etenim *ab* in Scalam Geometricam translata manifestabit AB.

DEMONSTRATIO.

In ΔΔ enim *fea* & FeA est angulus *afe*=AFC & *aef* =AeF *per constr.* Ergo *fe*:*ea*=Fe:*e*A (§. 267). Porro AC & *ac* perpendiculares ad FC (per §. 227 & *constr.*), ideoque inter se parallelæ (§. 256). Quare *ae*:*ac*=A*e*:AC (§. 268), consequenter *fe*:*ac* =F*e*:AC (§. 194 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Quoniam *ab* parallela ipsi AB *per demonstrata*: erit *ae*:*ab* = A*e*:AB (§. 268), consequenter *fe*:*ab*=F*e*:AB (*per demonstr.* & §. 194 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

ALITER.

1. Investigetur quantitas anguli AFC in D & anguli A*e*C in G, itemque C*e*B in eadem statione G (§. 152).
2. Quæratur distantia F*e* (§. 126).
3. Construatur ex his datis juxta Scalam modicam triangulum *aef* (§. 279).

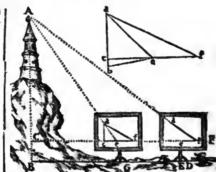
4. De-

4. Demittatur ex vertice *a* in basin continuatam perpendicularis *ac* (§. 216) indefinite producenda.
5. Fiat angulus *ceb* ipsi CeB æqualis (§. 208) & producatur crus *eb*, donec perpendiculari *ab* in *b* occurrat (§. 21).

Dico esse *fe* : *ab* = Fe : AB.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.



CAPUT IV.

De Circuli Symptomatis.

THEOREMA 52.

287. *Circuli se intus tangentes sunt eccentrici.*

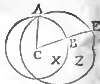


DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus unus alterum intus tangit *per hypoth.* ille totus intra hujus peripheriam continetur (§. 47). Quare si ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (§. 121); ea peripheriam minoris in M secabit (§. 50), ideoque radius minoris CM erit pars ipsius CN (§. 9 *Arith.*). Quodsi jam C ponatur centrum commune circulorum; erit CL=CM & CL=CN (§. 40), ideoque CM=CN (§. 87 *Arith.*), quod cum sit absurdum (*per demonstr.* & §. 84 *Arith.*); circuli idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA 53.

288. *Duo circuli se mutuo secantes sunt eccentrici.*

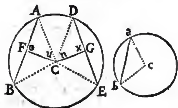


DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus X alterum Z secat *per hypoth.* pars illius intra hunc cadit (§. 53). Ducatur itaque ex C centro circuli X radius CB, qui continuatus ad peripheriam circuli Z ipsam secabit in E (§. 50), eritque CB pars ipsius CE (§. 9 *Arith.*). Quodsi C ponatur centrum etiam circuli Z; erit CB=AC & CE=AC (§. 40), ideoque CB=CE (§. 87 *Arith.*). Quod cum sit absurdum (*per demonstr.* & §. 84 *Arith.*); circuli X & Z idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA 54.



289. *In eodem vel in æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE æquales arcus subtendunt, & contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB=DE *per hypoth.* atque BC=CE & AC=CD (§. 40); angulus ACB=DCE (§. 204), consequenter arcus AB & DE, mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57), æquales sunt (§. 142). *Quod erat primum.*

Arcus AB & DE æquales sunt *per hypoth.* Sunt vero etiam iidem mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57). Anguli igitur isti æquales sunt (§. 142). Quoniam porro BC=CE & AC=CD (§. 40); erit quoque AB=DE (§. 179). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 55.

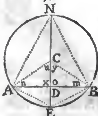
290. *Si in circulis inæqualibus arcus AB & ab fuerint similes; chordæ cognomines ad suos radios AC & ac eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & *ab* similes sunt *per hypoth.* iidemque mensuræ angulorum ACB & *acb* (§. 57); erit ACB=*acb* (§. 141). Est vero AC: BC =*ac* : *bc* (§. 40 *Geom.* & §. 149 *Arith.*). Ergo AB : AC=*ab* : *ac* (§. 183). *Q.e.d.*

THEOREMA 56.

291. *Radius CE chordam BA bifariam secans in D, etiam arcum bifariam secat in E & ad chordam AB perpendicularis, & contra.*



DEMONSTRATIO.

AD=DB *per hypoth.* AC=CB (§. 40) & DC=DC. Ergo *o*=*x* & *y*=*u* (§. 204), consequenter CE ad AB perpendicularis in D (§. 79), & arcus AE atque EB, æqualium angulorum *u* & *y* mensuræ (§. 57), æquales sunt (§. 142): *Quod erat primum.*

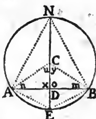
Sint arcus AE & EB æquales *per hypoth.* cum iidem sint mensuræ angulorum *u* & *y* (§. 57); erit *y*=*u* (§. 142). Est vero etiam AC=CB (§. 40) & DC=DC. Ergo AD=DB & *o*=*x* (§. 179), consequenter CD ad AB perpendicularis (§. 79). *Quod erat secundum.*

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D *per hypoth.* erit *o*=*x* (§. 79). Est vero etiam AC =CB (§. 40), & hinc *m*=*n* (§. 184), consequenter *y*=*u* (§. 246). Quare arcus AE & EB, æqualium angulorum *u* & *y* mensuræ (§. 57), æquales sunt (§. 142) & AD=DB (§. 251). *Quod erat tertium.*

THEOREMA 57.

292. *Si recta NE chordam AB bifariam secet & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum transit, & tam arcum AEB, quam ANB bifariam secat.*

DEMONSTRATIO.



Quoniam ND perpendicularis ad AB *per hypoth.* erit $o=x$ (§. 79). Est vero etiam AD=DB *per hypoth.* & ND=ND. Ergo AN=NB(§. 179), consequenter arcus cognomines æquales sunt (§. 289). Eodem modo ostenditur, arcus AE & EB æquales esse. *Quod erat unum.*

Arcus AN=NB & AE=EB *per demonstr.* Ergo NA+AE=NB+BE (§. 88 *Arith.*), consequenter NE diameter circuli (§. 135), ideoque per centrum transit (§. 39). *Quod erat alterum.*

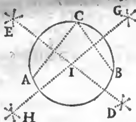
PROBLEMA 29.

293. *Datum arcum* AB *in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium D chordæ AB perpendicularis NE (§. 210), hæc arcum AB bifariam secabit (§. 292). *Q.e.f. & d.*

PROBLEMA 30.



294. *Per data tria puncta non in directum jacentia A, C & B circulum describere.*

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant intersectiones in D & E, itemque aliæ duæ G & H ex C & B.
2. Ducantur rectæ DE & HG (§. 121).

Dico I esse centrum circuli per A, C & B describendi (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C & B sunt in peripheria alicujus circuli *per hypoth.* ideoque rectæ AC & CB chordæ (§. 38). Sed ED ad AC, GH ad BC perpendicularis, & ED ipsam AC, GH vero BC bifariam secat (§. 210). Ergo utraque per centrum transit (§. 292). Quare cum DE & GH tantum in I se mutuo secent (§. 250); erit I centrum circuli per puncta data A, C & B transeuntis. *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

295. Assumtis in peripheria vel arcu circuli tribus punctis, centrum inveniri datusque arcus perfici potest.

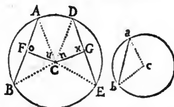
COROLLARIUM 2.

296. Si tria puncta unius peripheriæ tribus punctis alterius congruant; peripheriæ totæ congruunt: ac propterea circuli æquales sunt (§. 161).

COROLLARIUM 3.

297. Omne triangulum est circulo inscriptibile (§. 116).

THEOREMA 58.



298. *In eodem vel æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE a centro C æqualiter distant: & contra.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Quoniam FC & CG sunt distantiæ chordarum AB & DE a centro C *per hypoth.* erunt ad chordas perpendiculares (§. 225): & hinc o & x recti (§. 78), ideoque æquales (§. 145). Porro cum $AB=DE$ *per hypoth.* & CF ad AB perpendicularis *per demonstrata* ipsam AB, CG vero perpendicularis ad DE *per demonstrata* ipsam DE bisecet (§. 291); erit $FA=DG$ (§. 177 *Arith.*). Quare cum etiam sit $AC=CD$ (§. 40); erit $CF=CG$ (§. 235). *Quod erat unum.*

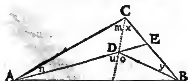
Quodsi distantiæ FC & CG fuerint æquales *per hypoth.* cum sit $o=x$ *per demonstr.* & $AC=CD$ (§. 40); erit $AF=DG$ (§. 235). Sed $AF=\frac{1}{2}AB$ & $DG=\frac{1}{2}DE$ (§. 291). Ergo $AB=DE$ (§. 177 *Arit.*) *Q. e. alterum.*

THEOREMA 59.

299. *Chordarum maxima est diameter AB.*

DEMONSTRATIO. Est enim $Co=BC$ & $CN=CA$ (§. 40). Sed $Co+CN > oN$ (§. 190). Ergo $BC+CA$, hoc est, $BA > oN$ (§. 89 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 60.



300. *Si intra triangulum ACB super ejusdem basi AB construatur triangulum ADB; erunt crura interioris AD & DB simul sumta minora cruribus exterioris AC & CB simul sumtis; angulus vero ad verticem interioris D major angulo ad verticem exterioris C.*

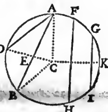
DEMONSTRATIO.

Quia $AE < AC+CE$ (§. 190); $AE+EB < AC+CE+EB$ (§. 90 *Arith.*), hoc est, $AD+DE+EB < AC+CB$ (§. 86. 89 *Arith.*). Sed $DB < DE+EB$ (§. 190). Ergo multo magis $AD+DB < AC+CB$. *Quod erat unum.*

Quoniam $o > x$ & $u > m$ (§. 188); erit $o+u > x+m$ (§. 90 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 61.

301. *Chorda arcus majoris AB major est, chorda minoris AD minor.*



DEMONSTRATIO. $EB+EC > BC$ (§. 190), hoc est, quia $DE+EC=BC$ (§. 40), $EB+EC > DE+EC$ (§. 89 *Arith.*), consequenter $EB > DE$ (§. 92 *Arith.*). Est vero $AE+DE > DA$ (§. 190). Ergo multo magis $AE+EB > DA$, hoc est, $AB > DA$ (§. 86. 89 *Arith.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 62.

302. *Secantium (Vid. Fig §. 299) MA, MN, ME ex eodem puncto M ductarum maxima est MA, quæ per centrum transit; reliquæ sunt tanto minores, quo a centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum MD, Mo, MB sunt tanto majores, quo magis a*

centro distant; minima est MB secantis MA per centrum transeuntis.

DEMONSTRATIO.

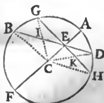
1. NC+MC > MN (§.190). Sed NC = CA (§. 40). Ergo CA+CM=NC+MC(§.88 *Arith.*) =MA (§.86 *Arith.*), consequenter MA > MN (§.89 *Arith.*). *Quod erat primum.*

2. Mo+Eo > ME (§.190). Sed No > Eo (§.301). Ergo multo magis Mo+oN, hoc est, MN(§.86 *Arith.*) > ME. *Quod erat secundum.*

3. Co+oM > MC (§.190). Sed Co = CB (§.40). Ergo oM > MB (§. 92 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

4. CD+DM > Co+oM (§.300) Sed CD = Co (§.40). Ergo DM > oM (§. 92 *Arith.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA 63.



303. *Si ex puncto E intra circulum assumto ducantur in peripheriam rectae EF, EB, EG &c. item EA, ED, EH &c. maxima erit EF, quae per centrum C transit, reliquae EB, EG &c. tanto majores, quo maximae propiores. Contra minima est EA, quae continuata per centrum transit: reliquae ED, EH &c. sunt tanto majores, quo ab ea remotiores.*

DEMONSTRATIO.

1. EC+BC > EB (§. 190). Sed BC=FC(§. 40). Ergo EC+BC=EC+FC(§. 88 *Arith.*), hoc est, EF (§. 86 *Arith.*) > EB (§. 89 *Arith.*). *Quod erat primum.*

2. EI+GI > GE, & IB+IC > BC(§. 190), hoc est, ob BC=GI+IC(§.40), IB+IC > GI+IC(§.89 *Arith.*), ideoque IB > GI (§. 92 *Arith.*). Quare EI+IB > EI+GI (§. 90 *Arith.*), ideoque EI+IB, hoc est, BE (§. 86 *Arith.*) > GE. *Quod erat alterum.*

3. EC+ED > DC(§. 190). Sed CD=EC+EA(§.40). Ergo EC+ED > EC+EA(§. 89 *Arith.*), consequenter ED > EA(§. 92 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

4. EK+KD > ED, & KH+KC > CH(§. 190), hoc est, ob CH=CK+KD(§. 40), KH+KC > KC+KD (§.89 *Arith.*), ideoque KH > KD (§.92 *Arith.*). Quare EK+KH > EK+KD(§.90 *Arith.*), ideoque EK+KH, hoc est, EH(§.86 *Arith.*) > ED. *Quod erat quartum.*

THEOREMA 64.



304. *Recta IL, radio CL perpendiculariter insistens, tangit circulum in unico puncto L: nec inter tangentem HL & circulum alia recta duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim quaelibet alia CK (§.121). Quoniam IL perpendicularis ad CL *per hypoth.* ideoque L est rectus(§.78); K erit acutus(§.218). Ergo CK > CL(§.220), consequenter quodlibet punctum K a L diversum

ſum, hoc eſt, tota linea LI ſeu HI extra circulum cadit (§. 40), & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 47). *Quod erat unum.*

Ducatur deinde, ſi fieri poteſt, inter tangentem HL & circulum recta ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 216); erit D rectus (§. 78), ideoque CL > CD (§. 220). Cadit itaque D intra circulum (§. 40): quod cum hypotheſi repugnet (§. 47), inter tangentem & circulum per contactum tranſiens recta alia duci nequit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

305. Angulus igitur contactus tangente HL & arcu ML interceptus, eſt quovis rectilineo minor: angulus vero ſemicirculi inter radium CL & arcum ML interceptus, eſt quovis rectilineo acuto major.

SCHOLION.

306. *Hoc paradoxum* Euclidis *exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata eſt de eo controverſia inter* Jacobum Peletarium *Cenomani in Gallia Matheſeos Profeſſorem &* Chriſtophorum Clavium *Jeſuitam Bambergenſem: quorum (a) hic angulum contactus rectilineo heterogeneum (§. 32* Arithm.*) agnovit, quemadmodum linea eſt ſuperficiei heterogenea; ille vero e numero angulorum ſuſtulit & pro non quanto declaravit. Peculiarem de angulo contactus & ſemicirculi Tractatum A. 1656 conſcripſit* Wallifius, *qui legitur Operum Vol. II. f. 605 & ſeqq. ubi cum* Peletario *angulum contactus omni aſſignabili minorem, ideoque nullius magnitudinis eſſe defendit.*

COROLLARIUM 2.

307. Circulum in eodem puncto L nonniſi unica recta HI tangere poteſt.

THEOREMA 65.

308. *Omnis recta HI, circulum tangens, radio CL ad punctum contactus ducto perpendicularis eſt.*

(a) In Schol. ad 16. Elem. III. f. 117 & ſeqq. Tom. 1. Oper.

DEMONSTRATIO.

Ponamus IL non eſſe ipſi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit CK ad HI perpendicularis (§. 216), hæcque utpote tangens *per hypoth.* extra circulum cadet (§. 47), conſequenter CK major CN (§. 84 *Arith.*), eſt etiam major ipſa CL (§. 40 *Geom.* & §. 89 *Arith.*). Eſt vero etiam CK < CL (§. 220): quod cum ſit abſurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

309. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 78.).

COROLLARIUM 2.

310. Si HI circulum tangat & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 216), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA 31.

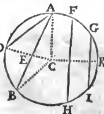
311. *Ducere rectam HI circulum in dato puncto L tangentem.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL.
2. In L excitetur perpendicularis LH (§. 249), quæ circulum in L tanget (§. 308). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA 66.

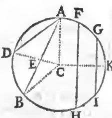
312. *Arcus FG & HI inter chordas parallelas intercepti ſunt æquales.*



DEMONSTRATIO.

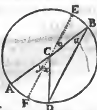
Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 216): erit eadem perpendicularis ad GI (§. 230) ob FH & GI

per hypoth. parallelas, ideoque dividet tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 291): Quare KF — GK = KH — KI, hoc est, FG = HI (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*



THEOREMA 67.

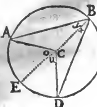
313. *Angulus ad centrum* ACD *est duplus anguli ad peripheriam* ABD, *eidem arcui* AD *insistentis*.



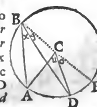
DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 258), erit EB = DF (§. 312), ideoque o = x (§. 142). Sed o = y (§. 156). Ergo x = y (§. 87 *Arith.*) = $\frac{1}{2}$ ACD. Porro o = u (§. 233). Ergo u = y = $\frac{1}{2}$ ACD (§. 87 *Arith.*). *Quod erat prim.*

II. In casu altero o = 2y & u = 2x *per cas.* 1. Ergo u + o = 2x + 2y (§. 88 *Arith.*), hoc est, ABD = $\frac{1}{2}$ ACD (§. 94 *Arith.*). *Quod erat secundum.*

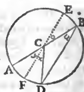


III. In casu tertio o+u = 2y + 2x *per cas.* 1. & o = 2y *per cas.* 1. Ergo u = 2x (§. 91 *Arith.*), hoc est, $\frac{1}{2}$ ACD = ABD (§. 94 *Arith.*). *Quod erat tertium*,



THEOREMA 68.

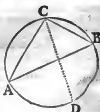
314. *Anguli ad peripheriam* ABD *mensura est arcus dimidius* AD, *cui insistit*.



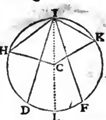
DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore segmento: insistet ergo arcui minori AD quam semicirculo (§. 70. 56), ideoque ipsi respondet angulus ad centrum ACD (§. 72. 135). Sed anguli ACD mensura est arcus AD (§. 73). Ergo ipsius ABD mensura dimidius arcus AD (§. 313. 142). *Quod erat unum.*

II. Sit ACB angulus in semicirculo. Ducatur utcunque recta CD: erit arcus dimidius AD mensura anguli ACD, & $\frac{1}{2}$ DB mensura ipsius DCB *per cas.* 1. Ergo $\frac{1}{2}$ ADB mensura anguli ACB. *Q. e. secundum.*



III. Sit denique HIK angulus in minore segmento. Ducatur utcunque recta IL: erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL mensura anguli HIL, & $\frac{1}{2}$ LK mensura anguli LIK *per cas.* 1. Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK mensura anguli HIK. *Quod erat tertium.*



CO-

COROLLARIUM 1.

315. Duo vel plures anguli HLI & HMI eidem arcui HI vel æqualibus arcubus insistentes æquales sunt (§. 142).

COROLLARIUM 2.

316. Quare cum porro sit $o = x + u$ (§. 239); erit anguli extra centrum mensura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipse & ejus verticalis K insistunt (§. 314).

COROLLARIUM 3.

317. Cum angulus (*Vid. Fig. 2. §. 314.*) in semicirculo ACB semicirculo insistat *per hypothes.* mensura ejus est circuli quadrans (§. 314), ideoque ipse rectus est (§. 143).

COROLLARIUM 4.

318. Cum angulus (*Vid. Fig. 3. §. 314.*) in majore segmento DIF, arcui minori DF, quam est semicirculus, insistat (§. 70); mensura ejus est semiquadrante minor (§. 314), ideoque ipse recto minor (§. 143), consequenter acutus (§. 66).

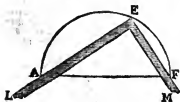
COROLLARIUM 5.

319. Non absimili ratione liquet (*Vid. Fig. 3. §. 314*), angulum in minore segmento HIK esse obtusum.

COROLLARIUM 6.

320. Quoniam $o = x + y$ (§. 239) & anguli o mensura est $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 314); anguli extra peripheriam G mensura est differentia inter dimidium arcum concavum LM, cui insistit, & dimidium convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA 32.



321. *Normam examinare, utrum exacta sit nec ne.*

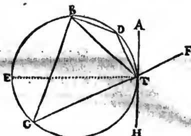
RESOLUTIO.

1. Describatur intervallo arbitrario semicirculus AEF &
2. Ducantur in eo ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario assumtum rectæ AE & FE.
3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex super E cadat. Hoc enim si fieri potest; erit norma exacta.

DEMONSTRATIO.

Tum enim angulus normæ LEM æqualis est angulo AEF (§. 167), ideoque rectus (§. 317), consequenter norma exacta (§. 212). *Q. e. d.*

THEOREMA 69.

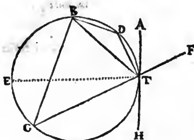


322. *Mensura anguli minoris segmenti* ATB *est dimidium arcus minoris* TDB; *anguli vero majoris segmenti* BTH *dimidium arcus majoris* BGT.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATE rectus (§. 308). Cum ideo ejus mensura sit arcus dimidius EBT (§. 135. 143), anguli vero BTE dimidius arcus EB (§. 314);

erit



erit anguli A T B menſura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum*.

Eodem modo patet, cum dimidius ſemicirculus EGT ſit menſura anguli ETH (§. 135. 143), & dimidius arcus EB menſura anguli BTE (§. 314), eſſe dimidium arcum BGT menſuram anguli BTH. *Quod erat alterum*.

COROLLARIUM 1.

323. Cum anguli G menſura etiam ſit dimidius arcus BDT, ipſius D vero arcus dimidius BGT (§. 314); angulus in majore ſegmento G æqualis eſt angulo minoris ſegmenti ATB, & angulus in minore ſegmento D æqualis eſt angulo majoris ſegmenti BTH (§. 142).

COROLLARIUM 2.

324. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF menſura ſemiſumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus ſubtenſorum. Nam ATF = GTH (§. 156). Ergo ejus menſura dimidius arcus TG (§. 322). Eſt vero anguli ATB menſura arcus dimidius TB (§. cit.). Quare ſemiſumma eorundem arcuum eſt menſura anguli BTF.

COROLLARIUM 3.

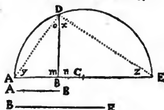
325. Si LM & MN ſint tangentes ex eodem puncto ductæ; erit angulorum MLN & MNL menſura arcus dimidius LN (§. 322), conſequenter anguli ipſi ſunt æquales (§. 142), & ideo LM = MN (§. 253).



COROLLARIUM 4.

326. Quia angulorum L, M & N menſura eſt ſemicirculus (§. 240. 143), angulorum vero L & N junctim ſumtorum arcus LN (§. 322); erit anguli M a duabus tangentibus LM & NM intercepti menſura differentia arcus intercepti LN a ſemicirculo.

PROBLEMA 33.



327. *Inter duas lineas AB & BE mediam proportionalem BD invenire.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum, dividaturque AE bifariam in C (§. 210).
2. Ex C intervallo ipſius AC deſcribatur ſemicirculus ADE (§. 136).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 212).

Dico eſſe AB : BD = BD : BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE *per conſtr.* m & n ſunt anguli recti (§. 78). Sed $o + x$ eſt itidem rectus (§. 317), & y utrique triangulo ABD & ADE communis. Ergo $o = z$ (§. 246), conſequenter $y = x$ (§. *cit.*), & tunc AB : BD = BD : BE (§. 267). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

328. Cum ſit AB : BD = BD : BE, ex data ſagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 302 *Arith.*). Sit e. g. AB = 80‴, BD = 300‴; erit BE = 1125‴, ideoque AB + BE = AE = 1205‴ ſeu fere 12′.

COROLLARIUM 2.

329. Ex demonſtratione una liquet, △ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB ex angulo recto D in hypothenuſam AE demiſſam

missam resolvi in duo triangula ABD & BDE inter se & toti ADE similia (§. 267).

COROLLARIUM 3.

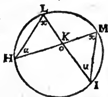
330. Cum igitur etiam sit AB : AD = AD : AE (§. *cit.*); si lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transfertur, factisque reliquis ut in resolutione problematis, erit AD media proportionalis quæsita.

COROLLARIUM 4.

331. Si ergo AB sit unitas, erit BD radix ipsius BE, aut AD ipsius AE (§. 247. *Arith.*).

THEOREMA 70.

332. *Si duæ chordæ HM & LI se mutuo secent in K; erit HK:LK = KI:KM.*

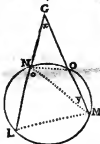


DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $x = x$ & $u = u$ (§. 315); ideo HK : LK = KI : KM (§. 267). *Q. e. d.*

THEOREMA 71.

333. *Si fuerint duæ secantes GL & GM ex eodem puncto G ductæ; erit GM : GL = GN : GO.*

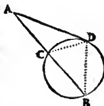


DEMONSTRATIO.

Angulus x est utrique triangulo GNO & GLM communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 324). Sed anguli GML mensura est semisumma eorundem arcuum (§. 314). Quare GNO = GML (§. 142), consequenter GM : GL = GN : GO (§. 267). *Q. e. d.*

THEOREMA 72.

334. *Si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ AD & AB, quarum altera circulum tangit, altera secat; erit tangens AD media proportionalis inter totam secantem AB & ejus portionem extra circulum AC.*



DEMONSTRATIO.

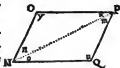
Angulus A est utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales sunt (§. 323). Ergo AC : AD = AD : AB (§. 267). *Q. e. d.*



CAPUT V.

De Figurarum Descriptione.

THEOREMA 73.



335. *In parallelogrammis latera opposita sunt aequalia, & si in figuris quadrilateris latera opposita fuerint aequalia, erunt eaedem parallelogramma.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogrammum *per hypoth.* erit OP parallela ipsi NQ & ON parallela ipsi PQ (§. 102), consequenter ducta diagonali PN erit x = o & n = m (§. 233), ideoque OP = NQ & ON = PQ (§. 251). *Quod erat unum.*

Quodsi OP = NQ & ON = PQ *per hypoth.* cum etiam sit NP = NP; erit x = o & n = m (§. 204), consequenter parallela est OP ipsi NQ, & ON ipsi PQ (§. 255), ideoque figura OPQN parallelogrammum est (§. 102). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

336. Cum in Quadrato, Oblongo, Rhombo & Rhomboide latera opposita aequalia sint (§. 98. 99. 100. 101); erunt Quadratum, Oblongum, Rhombus & Rhomboides parallelogramma (§. 335).

THEOREMA 74.

337. *Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes aequales, anguli in iis diagonaliter oppositi sunt aequales, anguli vero ad idem latus oppositi duobus rectis aequantur, & duo latera simul sumta sunt diagonali majora.*

DEMONSTRATIO.

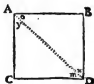
In Parallelogrammis ON = PQ & OP = NQ (§. 335). Sed PN = PN. Ergo Δ NOP = Δ NQP (§. 204). *Quod erat unum.*

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§. 102): anguli O & N, N & Q, Q & P, P & O simul sumti aequantur duobus rectis (§. 233). *Quod erat secundum.*

Quoniam angulus O+N = N+Q *per demonstr.* erit O = Q (§. 91 *Arith.*). Similiter quoniam Q+P = Q+N *per demonstr.* erit P = N (§. 91 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

Denique NO + PO > NP & PQ + QN > PN (§. 190). *Quod erat quartum.*

PROBLEMA 34.



338. *Super data recta CD quadratum construere.*

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 249) = CD.
2. Ex D & A intervallo ipsius CD fiat intersectio in B (§. 197).
3. Ducantur AB & DB.

DEMONSTRATIO.

AC = CD = AB = BD *per constr.* Ducta ergo diagonali AD, patet esse C = B (§. 204). Sed C rectus est *per constr.* Ergo B etiam rectus (§. 145), consequenter *o* & *x*, item *y* & *m* semirecti

recti (*§.* 241), ideoque $o+y$ & $x+m$ itidem recti. Quare figura est quadratum (*§.* 98). *Q. e. d.*

A L I T E R.

1. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipsi CD æquales (*§.* 249).
2. Ducatur recta AB.

D E M O N S T R A T I O.

Est enim CA = DB = CD *per constr.* & quoniam AC & BD perpendiculares ad CD *per constr.* anguli ad D & C sunt recti (*§.* 78), ideoque BA parallela ipsi DC (*§.* 226), consequenter anguli A & B sunt recti (§. 233), & ob parallelas AC & BD (§. 256) AB = CD (§. 238). Est igitur ABCD quadratum (*§.* 98). *Q. e. d.*

P R O B L E M A 35.

339. ***Datis duabus rectis MI & IK rectangulum parallelogrammum seu oblongum construere.***



R E S O L U T I O.

1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (*§.* 249).
2. Ex M intervallo ML = IK describatur arcus, & ex K intervallo KL = IM alius priorem intersecans in L (*§.* 197).
3. Ducantur rectæ ML & KL.

D E M O N S T R A T I O.

MI = LK & ML = IK *per constr.* Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 335), consequenter I = L & I+M ac I+K = duobus rectis (*§.* 337). Sed I est rectus *per constr.* Ergo & L (*§.* 145), itemque M & K recti sunt. Est ergo figura constructa oblongum (*§.* 100). *Q. e. d.*

P R O B L E M A 36.

340. ***Data recta GH una cum angulo obliquo G rhombum construere.***



R E S O L U T I O.

1. Ad rectam datam GH constituatur in G angulus dato æqualis (*§.* 208).
2. Fiat GE = GH & reliqua peragantur ut in probl. 34. (§. 338.).

D E M O N S T R A T I O.

EG = EF = FH = HG *per constr.* Est ergo EFHG parallelogrammum (§. 335), consequenter G = F & G+H ac G+E = duobus rectis (§. 337). Sed G est angulus obliquus *ex hypoth.* Ergo & F, consequenter etiam E & H sunt obliqui, ideoque figura constructa rhombus est (*§.* 99). *Q. e. d.*

P R O B L E M A 37.

341. ***Datis*** (*Vid. Fig. §.* 335.) ***duabus rectis ON & OP una cum angulo intercipiendo O rhomboidem construere.***

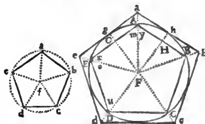
R E S O L U T I O.

1. Jungantur rectæ ON & OP sub angulo dato (*§.* 208).
2. Reliqua peragantur ut in problemate 35 (*§.* 339).

D E M O N S T R A T I O.

Eadem est, quæ problematis præcedentis.

THEOREMA 75.



342. *Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales, ducanturque subtensæ AB, BC, CD &c. figura circulo inscripta regularis est.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 289), cumque anguli A, B, C, &c. æqualibus arcubus BCDE, CDEA, DEAB &c. insistant, ipsi quoque æquales sunt (§. 315). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 106). *Q. e. d.*

PROBLEMA 38.

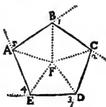
343. *Invenire summam omnium angulorum in quocunque polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto subtrahantur 360°: residuum est summa quæsita.

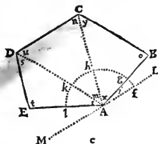
E. g. Pentag.	180	Hexag.	180
	5		6
	900		1080
	360		360
	540		720

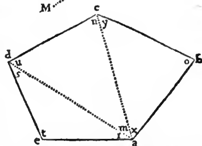
DEMONSTRATIO.



Quælibet figura ex assumto in ea puncto F in tot triangula AFB, BFC, CFD &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD &c. Si ergo 180° per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium angulorum in dictis triangulis (§. 240). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos polygoni, semper efficiunt 360° (§. 159). Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur 360°; summa angulorum polygoni relinquitur. *Q. e. d.*

ALITER.





Cum numerus triangulorum ABC, CAD

CAD & DAE, in quæ resolvitur figura polygona per diagonales AC & AD ex puncto A ductas, a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario mulctatum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D & E (§. 240). *Q. e. i. & d.*

E. g. pro Pentagono 180, pro Hexagono 180

Pentagono	Hexagono
180	180
3	4
540	720

Corollarium 1.

344. Quodsi summa inventa per numerum laterum dividatur; quotus est angulus polygoni regularis (§. 106).

Scholion.

345. *En tibi tabulam, in qua summa angulorum in figuris rectilineis quibuscunque, & quantitas unius in regularibus a trigono usque ad dodecagonum exhibetur (§. 343.). Construitur columna secunda continua additione 180, tertia vero numeris in columna secunda per numerum angulorum sive laterum divisis (§. 344.). Utimur hac tabula tum in*

Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. regul.	Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. regul.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	147 $\frac{3}{11}$
VII	900	128 $\frac{4}{7}$	XII	1800	150

figuris regularibus describendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet instrumento rite explorata fuerit, nec ne. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor vel major deprehenditur ea, quæ in tabula definitur, e. gr. si in heptagono superet 900.

Corollarium 2.

346. Si latera figuræ (*Vid. Fig.* 1. §. 343.) polygonæ cujuscunque continuentur, anguli externi 1, 2, 3, 4 &c. cum angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera (§. 147.). Sed interni soli efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera, demtis quatuor (§. 343). Ergo externi in omni casu conficiunt 4 rectos seu 360°.

Problema 39.

347. *Dato (Vid. Fig. §. 342.) polygono regulari cuicunque ABCDE circulum circumscribere.*

Resolutio.

1. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 209.) ob angulos FED & FDE duobus rectis minores concursuris in F (§. 262).
2. Ex puncto concursus F describatur radio EF circulus (§. 131).

Demonstratio.

Quoniam *o* & *u* sunt angulorum polygoni dimidii *per constr.* erit $o = u$ (§. 106 *Geom.* & §. 94 *Arith.*), consequenter EF = FD (§. 253). Circulus ideo transiens per E transit etiam per D (§. 40). Ducatur jam ex F in A recta FA (§. 121). Quoniam $o = x$ *per constr.* & ED = AE (§. 106) atque EF = EF; erit AF = FD (§. 179). Ergo circulus transiens per D & E transit etiam per A (§. 40). Porro quia AF = EF *per demonstr.* erit $m = x$ (§. 184). Sed *x* dimidius angulus polygoni *per constr.* Ergo & *m* (§. 87 *Arith.*), consequenter etiam *y*. Quare si ducatur FB (§. 121); erit ut ante FB = EF, ideoque radius circuli. Eodem modo ostenditur, FC, & si quæ plures fuerint rectæ istiusmodi, esse radios circuli, ideoque circulum transire per omnes angulos polygoni, hoc est, eidem circumscribi (§. 116.) *Q. e. d.*

Corollarium.

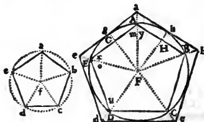
348. Omnis ergo figura regularis est circulo inscriptibilis (§. 116.).

Pro-

PROBLEMA 40.

349. ***Invenire angulum in dato polygono regulari.***

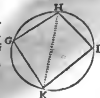
RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.



Concipiatur polygonum regulare ABCDE circulo inſcriptum (§. 348). Quoniam arcus dimidius BCDE eſt menſura anguli quæſiti A (§. 314), arcus vero AB, qui ipſius EAB dimidius, habetur circuli peripheria per numerum laterum diviſa (§.289); angulus polygoni A relinquitur, ſi arcum AB a ſemicirculo ſubtraxeris. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Quæratur angulus pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 eſt arcus AB, qui ex 180 ſubductus relinquit 108 angulum pentagoni quæſitum.

THEOREMA 76.



350. *Quadrilateri circulo inſcripti GHIK anguli bini oppoſiti H & K, item G & I conficiunt duos rectos.*

DEMONSTRATIO.

Inſiſtunt enim junctim ſumti integro circulo, e. gr. K arcui GHI & H complemento ejus ad circulum GKI (§. 56.), ideoque ipſorum menſura eſt ſemicirculus (§. 314). Sunt ergo duobus rectis æquales (§. 143). *Q. e. d.*

PROBLEMA 41.

351. ***Circulo quadratum circumſcribere.***

RESOLUTIO.

1. Ducantur diametri AB & DE ſe mutuo in centro C ad angulos rectos ſecantes (§. 210).
2. Ex A, E, B, D intervallo radii fiant interſectiones in F, G, H, I.
3. Ducantur rectæ FG, GH, IH & IF. Erit FGHI quadratum circulo circumſcriptum.

DEMONSTRATIO.

Anguli ad A, E, B, D ſunt recti (§. 338), ideoque FG, GH, HI & IF circulum tangunt (§.304). Sunt vero anguli G, F, I, H recti (§.338), & FG = GH = HI = FI = 2 AC *per conſtr.* Ergo FGHI eſt quadratum (§.98) idque circulo circumſcriptum (§.117). *Q. e. d.*

PROBLEMA 42.

352. ***Super data recta ED*** (Vid. Fig. §.349) ***polygonum regulare quodcunque deſcribere.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur angulus polygoni (§.344. 349).
2. Fiat in E ipſi æqualis (§. 155) & EA = ED.
3. Per puncta A, E, D deſcribatur circulus (§. 294).

4. In

4. In eo applicetur data recta ED, quoties fieri potest.

Ita describetur figura quæsita (§. 342. 348).

Aliter.

1. In E & D fiant anguli dimidio angulo polygoni sigillatim æquales (§. 155), quorum crura EF & DF se mutuo secabunt in F (§. 262).
2. Ex F tanquam centro radio EF describatur circulus, qui erit circulus polygono circumscriptus (§. 347).
3. Reliqua absolvantur ut ante.

Problema 43.

353. *Circulo dato polygonum regulare quodcunque inscribere.*

Resolutio.

1. Dividantur 360 (*Vid. Fig. §. 349*) per numerum laterum, ut innotescat quantitas anguli EFD (§. 59).
2. Construatur is ad centrum (§. 155).
3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri potest.

Ita figura regularis erit circulo inscripta (§. 342. 116). *Q. e. f. & d.*

Scholion.

354. *Resolutio problematis præsentis & præcedentis mechanica quidem est, cum ad constructionem instrumento transportatorio utamur (§. 155): non tamen ideo contemnenda, tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis rite peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & Quindecagoni constructionem tradunt* Euclides (a) & Ptolemæus (b), *de qua in Analysi. Equidem & heptagoni, enneagoni & hendecagoni constructiones Geometricæ passim apud Auctores, practicos inprimis, occurrunt; sed a rigore demonstrationum abhorrent.* Joan. Carolus Renaldinus (c) *omnium polygonorum describendorum regulam catholicam præscribit, passim Geometriis practicis insertam: sed quantum fallat,* Cl. Wagnerus, Mathemat. in Academia Helmstad. Professor, *ostendit* (d), *& nos inferius in Analysi ostendemus.*

Problema 44.

355. *Polygonum (Vid. Fig. § 349.) regulare quodcunque circulo circumscribere.*

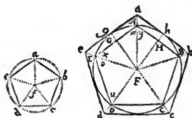
Resolutio.

1. Inscribatur figura regularis similis circulo dato, v. gr. pentagonum ABCDE, si pentagonum *abcde* circumscribendum (§. 353).
2. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam F*b* ad eandem in H normalem (§. 210), quæ arcum cognominem in *b* secat.
3. Per A & B producantur radii FA & FB.
4. Per *b* ducatur ipsi AB parallela radiis continuatis in *a* & *b* occurrens: erit *ab* latus unum polygoni circumscripti.
5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat F*e* = F*d* = F*c* = F*a* & puncta *a*, *e*, *d*, *c*, *b* connectantur rectis *ae*, *ed*, *dc*, *cb*: erit *abcde* polygonum circulo circumscriptum. *Q. e. f.*

Demonstratio.

Quoniam *ab* parallela ipsi AB *per constr.* erit angulus F*ba* = FHA (§. 233.). Sed ob FH ad AB perpendicularem *per constr.* FHA rectus est (§. 78). Ergo etiam F*ba* rectus (§. 145), consequenter *ab* circulum in *b* tangit (§. 78. 304). Est vero etiam angulus F*ab* = FAB (§. 233), ideoque dimidius angulus polygoni (§. 347). Porro quoniam AB = AE *per constr.* & FA = FE = FB (§. 40); erit angu-

(a) Elem. 4 prop. 11. 16 & Elem. 13. prop. 10.
(b) Almag. lib. 1. c. 9. f. m. 2. conf. Joannes Regiomontanus in epitome hujus Almag. lib. 1. prop. 1.
(c) lib. 1. de Resolut. & composit. Mathem. f. 367.
(d) in peculiari dissertatione Helmstadii 1700 habita.

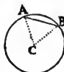


angulus $bFa = aFe$ (§. 204). Quare cum etiam sit $Fa = Fe$ *per constr.* & ob $Fab = Fba$ *per demonstrata* atque rectos ad *b* & latus *Fb* utrique triangulo *Fab* & *Fbb* commune, $Fb = Fa$ (§. 252); erit $ae = ab$ & $Fae = Fab$ (§. 179), consequenter *a* angulus polygoni, e. gr. in nostro casu pentagoni. Eodem modo ostenditur, angulos quoque *e*, *d*, *c*, *b* esse angulos polygoni circumscribendi, & $ed = dc = cb = ab$. Quod vero etiam *ae* circulum in G tangat, ita demonstratur. Demittatur ex F perpendicularis ad *ae* (§. 216): erit angulus ad *g* rectus (§. 78). Quoniam porro $Fab = Fag$ *per demonstrata*, & $Fa = Fa$; erit $Fb = Fg$ (§. 252). Quare cum *Fb* sit radius circuli *per constr.* erit etiam *Fg* radius circuli (§. 40), ideoque *ae* circulum in *g* tangit (§. 304). Idem eodem modo ostenditur de rectis *ed*, *dc*, *bc*. Polygonum itaque *abcde* circulo est circumscriptum (§. 117). *Q. e. d.*

THEOREMA 77.

356. *Latus hexagoni AB æquatur radio circuli circumscripti AC.*

DEMONSTRATIO.



Angulus $C = 60°$ (§. 57). Ergo $A+B = 120°$ (§. 245), consequenter, ob $AC = BC$ (§. 40), $A = B = 60°$ (§. 184). Quare △ ACB æquilaterum (§. 254), consequenter $AB = AC$ (§. 88). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

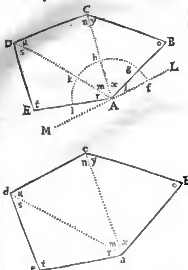
357. Hexagonum regulare circulo inscribitur, si radius ad peripheriam sexies applicetur.

COROLLARIUM 2.

358. Si super linea data AB hexagonum describendum; triangulum æquilaterum ACB construitur (§. 198): est enim vertex C centrum circuli hexagono quæsito circumscribendi (§. 356).

PROBLEMA 45.

359. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuscunque & tot diagonalibus, quot sunt latera, demtis tribus, figuram construere.*



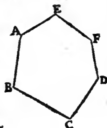
RESO-

Resolutio.

Cum figura quælibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE resolvatur, quot sunt latera, demtis duobus: non alia re opus est, quam ut unum triangulum super altero excitetur (§. 205.)

Problema 46.

360. *Datis omnibus lateribus figuræ & tot angulis, quot sunt latera, demtis tribus, figuram construere.*



Resolutio.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis.
2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 155) & latera AE & BC per data debite determinentur.
3. Fiat porro in C angulus conveniens (§. 155) & determinetur latus DC &c.
4. Tandem ex E & D fiat intersectio in F intervallo laterum EF & FD.

Ductis enim DF & EF, figura terminabitur eritque æqualis quæsitæ (§. 161. 177).

Eodem modo construi possunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 106).

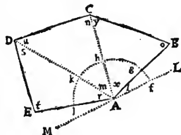
Corollarium.

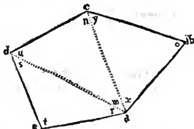
361. Si omnes anguli præter unum F dentur, duo latera DF & FE ut dentur opus non est.

Scholion.

362. *Tirones ut se exerceant in figuris irregularibus describendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus assumere debent. Quodsi contingat, figuram non terminari, id indicio erit, casum esse impossibilem, ideoque vel in angulorum, vel linearum quantitate quædam erunt immutanda.*

Problema 47.



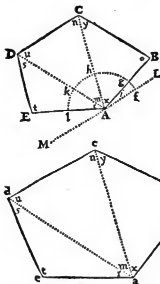


363. *Areæ cujusdam campestris rectilineæ* abcde *libere permeabilis ichnographiam perficere, hoc est, figuram areæ campestri similem describere.*

Resolutio.

1. Investigetur longitudo singulorum laterum *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, itemque diagonalium *ac* & *ad* (§. 126).
2. Construatur figura ABCDEA (§. 359) juxta scalam geometricam minorem (§. 279).

Dico

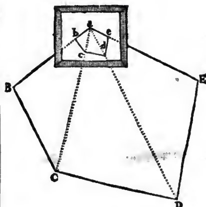


Dico figuram ABCDE esse figuræ campi *abcde* similem.

D E M O N S T R A T I O.

Est enim AB:BC = *ab*:*bc*, BC:CD = *bc*:*cd*, CD:DE = *cd*:*de* &c. Etenim e. gr. *ab* 6 & *bc* 7 pedum in campo existentibus, etiam AB = 6 & BC = 7 in charta *per constr.* Quare cum porro sit AC:AB = *ac*:*ab*, AC:AD = *ac*:*ad*, AD:AE = *ad*:*ae* &c. *per constr.* erit *o* = *o*, *x* = *x*, *y* = *y*, *n* = *n*, *m* = *m*, *u* = *u*, *r* = *r*, *s* = *s*, *t* = *t* (§. 207), consequenter *x* + *m* + *r* = *x* + *m* + *r*, *y* + *n* = *y* + *n*, *u* + *s* = *u* + *s* (§.88 *Arith.*). Quamobrem figura ABCDE est figuræ campi *abcde* similis (§. 175) *Q. e. d.*

A L I T E R.



1. Posita mensula ita in uno figuræ angulo ut punctum *a* vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos, ducanturque lineæ indefinitæ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.
2. Investigetur longitudo rectarum *a*B, *a*C, *a*D, *a*E (§. 126) &
3. Exinde juxta scalam modicam (§. 279) determinentur *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.
4. Ducantur *bc*, *cd*, *de*.

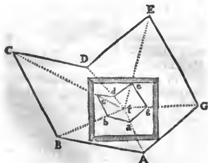
Dico *abcde* esse similem figuræ *a*BCDE.

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam in ΔΔ *abc* & *a*BC angulus *a* communis & *ab*:*ac* = *a*B:*a*C *per constr.* erit angulus *abc* = *a*BC & *acb* = *a*CB, nec non *ab*:*bc* = AB:BC & *ac*:*bc* = AC:BC(§.183). Similiter quoniam in ΔΔ *acd* & *a*CD angulus *a* communis & *ac*:*ad* = *a*C:

$\doteq aC:aD$, atque in ΔΔ *dae* & DaE angulus *a* itidem communis & $ad:ae = aD:aE$ *per constr.* erit angulus $acd = aCD$ & $adc = aDC$, nec non $ac:cd = aC:CD$ & $ad:dc = aD:DC$, itemque angulus $ade = aDE$ & $aed = aED$, nec non $ad:de = aD:DE$ & $ae:ed = aE:ED$ (§. 183). Quoniam itaque $a = a$, $b = B$, $acb + acd = aCB + aCD$, hoc est, $c = C$, $adc + ade = aDC + aDE$, hoc est, $d = D$ & denique $e = E$ *per demonstrata*, figuræ *abcde* & *a*BCDE inter se æquiangulæ sunt (§. 109). Porro cum sit $ac:bc = aC:BC$ & $ac:cd = aC:CD$ *per demonstr.* erit etiam $bc:cd = BC:CD$ (§. 196 *Arith.*), & cum sit $ad:dc = aD:DC$ & $ad:de = aD:DE$ *per demonstr.* erit denuo $dc:de = DC:DE$. Quamobrem cum quoque sit $ab:bc = aB:BC$ & $ae:ed = aE:ED$ *per. demonstrata*; latera æquales angulos comprehendentia proportionalia sunt. Sunt itaque figuræ *abcde* & *a*BCDE similes (§. 175). *Q. e. d.*

A L I T E R.



1. Mensula intra figuram posita eligatur punctum *f*, ex quo per dioptras regulæ affixas ut ante collineatio fiat in baculos in A, B, C, D, E & G defixos, ducanturque rectæ indefinitæ *fa*, *fb*, *fc*, &c.
2. Investigetur longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E, *f*G (§. 126).
3. Inde determinetur longitudo rectarum *fa*, *fb*, *fc* &c. juxta scalam modicam (§. 279).
4. Tandem ducantur *ab*, *bc*, *cd* &c.

Dico *abcdeg* esse figuræ ABCDEG similem.

D E M O N S T R A T I O.

Angulus *f* utrique Δ *fab* & *f*AB communis, estque $fa:fb = fA:fB$ *per constr.* Ergo anguli ad *a* & A, item ad *b* & B æquales sunt, atque $fa:ab = fA:AB$ (§. 237). Eodem modo ostenditur esse in ΔΔ *fga* & *f*GA angulos ad *a* & A æquales, atque $fa:ag = fA:AG$, consequenter $ab:ag = AB:AG$ (§. 196 *Arithm.*) & angulus $bag = BAG$ (§. 86 *Arith.*). Quare cum eadem ratione demonstretur, esse $g = G$, $e = E$, $d = D$, $c = C$, $b = B$, & $ag:ge = AG:GE$, $ge:ed = GE:ED$, $ed:dc = ED:DC$, $dc:cb = DC:CB$ & $cb:ba = CB:BA$; figura *abcdeg* est majori ABCDEG similis (§. 175). *Q. e. d.*

A L I T E R.

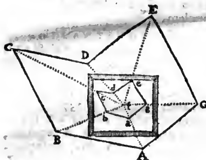
1. Collocato (*Vid. Fig.* 1. *pag. præced.*) instrumento goniometrico in *a* investigetur quantitas angulorum *x*, *m*, *r* (§. 152) & longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad* & *ae* (§. 126).
2. Construantur juxta scalam modicam

dicam ΔΔ ABC, ACD & ADE (§. 180).
Dico ABCDE esse similem figuræ *abcde*.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum secunda problematis præsentis.

ALITER.



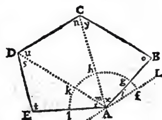
1. Collocato instrumento goniometrico in *f*, investigetur quantitas angulorum A*f*B, B*f*C, C*f*D, D*f*E, E*f*G, G*f*A (§. 152) & longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E, *f*G (§. 126).
2. Construantur ut ante juxta scalam modicam ΔΔ *bfa*, *afg*, *gfe*, *efd*, *dfc* & *cfb* (§. 180).

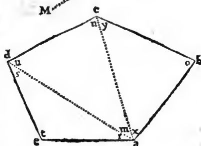
Dico *abcdeg* esse similem figuræ ABCDEG.

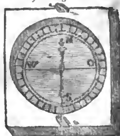
DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia problematis præsentis.

ALITER.






Pyxis Magnetica.

Pyxis cum acu magnetica, cujus margo in 360 gradus divisa, & quæ in cardine meridiei ac septentrionis dioptris instructa, ita collocetur in *a*, ut ejus centrum ipsi *a* immineat & per dioptras collineanti baculus in *b* defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acus a linea meridiana pyxidis ipsi *ab* imminente versus ortum vel occasum.

2. Pyxidis dioptræ convertantur successi-

ceſſive ad baculos in *c*, *d* & *e* defixos, notenturque ut ante in ſingulis caſibus anguli declinationis.

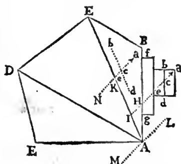
3. Inveſtigetur longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* (§. 126).
4. Ducatur in charta recta LM & aſſumto in ea puncto A applicetur centrum inſtrumenti transportatorii, & fiant anguli *i*, *x*, *m*, *r* angulis declinationum rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* æquales (§. 155), atque ex harum longitudine per ſcalam modicam determinetur longitudo ipſarum AB, AC, AD, AE (§. 279).

Dico figuram ABCDE eſſe alteri *abcde* ſimilem.

DEMONSTRATIO.

In campo acus magnetica ſemper eidem lineæ reſpondet in plano horizontali imaginario mundi, quod immobile eſt, etſi diverſis in pyxide ſucceſſive immineat. Lineam iſtam deſignet in charta recta LM & punctum A centrum acus, ex quo deſcriptus eſt circulus. Quodſi jam linea meridiana pyxidis admovetur lateri AB; erit principium numerationis in *g* & acus indicabit in *f* quantitatem anguli *i*. In inſtrumento transportatorio initium numerandi fit in *f*, & ſi arcus *fg* declinationi in campo obſervatæ æqualis aſſumitur; angulus *i* idem erit, qui ante, ſituſque lineæ AB rite determinatur. Arcus enim *fg* perinde metitur declinationem ipſius AB a linea meridiana, quam monſtrat acus, ſive numerandi principium in *f*, ſive in *g* fiat. Eodem modo liquet, arcus *fb*, *fk*, *fl* determinare ſitum rectarum AC, AD, AE reſpectu lineæ LM, conſequenter anguli *x*, *m*, *r* in figura ABCDE erunt æquales totidem cognominibus in altera *abcde*. His ſuppoſitis reliqua demonſtrantur ut ſupra in demonſtratione ſecunda.

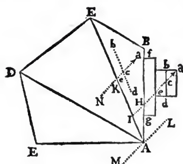
ALITER.



Quodſi pyxis cum acu magnetica dioptris non fuerit inſtructa, ſed ligneæ regulæ *fg* ita affixa, ut linea meridiana ejuſdem *bd* tranſiens per centrum pyxidis *c* ſit eidem parallela;

1. Regula *fg* ad latus figuræ AB applicetur, quo facto AB erit ipſi *bd* parallela.
2. Notetur gradus, quem indicat acus magneticæ *ae* circa centrum *c* libere mobilis cuſpis *a*: dico eſſe angulum *bca* ipſi BAL æqualem, ſi ML ducatur acui magneticæ *ae* in I productæ parallela.
3. Eodem modo ſi regula, cui pyxis affixa, applicetur diagonali

AE



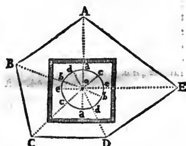
AE, & recta *ae* deſignet ſitum acus, *bd* autem ipſi AE parallela lineam meridianam pyxidis; erit angulus *bca* ipſi EAL æqualis. Cetera igitur peraguntur ut ante.

D E M O N S T R A T I O.

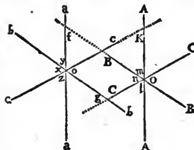
Id tantummodo demonſtrari debet, angulum *bca* eſſe ipſi BAL, & in altero ſitu pyxidis ipſi EAL æqualem. Quoniam ex reſolutione patet, *bd* eſſe ipſi BA parallelam: erit angulus IHA ipſi *ecd* (§. 233), conſequenter ejus verticali *bca* æqualis (§. 156 *Geom.* & §. 87 *Arith.*). Similiter cum ſit ML ipſi I*a* parallela *per conſtruct.* erunt alterni IHA & BAL æquales (§. 233), conſequenter BAL = *bca* (§. 87 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Similiter ſi pyxis ad diagonalem AE applicatur, cum ſit *bd* ipſi EA parallela *vi ſolutionis*; erit NKA = *ecd* (§. 233). Quare cum porro ſit *bca* = *ecd* (§. 156); erit NKA = *bca* (§. 87 *Arith.*). Denique quia acus magnetica pyxide quomodocunque promota ſitum obtinet priori, quem habuerat, parallelum, eſtque ideo N*a* ipſi I*a* parallela, ML vero parallela ipſi I*a per conſtruct.* erit etiam ML ipſi N*a* parallela (§. 232), conſequenter NKA = EAL (§. 233), ac ideo EAL = *bca* (§. 87 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

A L I T E R.



1. Charta ſuper menſula expanſa ex centro *o* deſcribatur circulus.
2. In eodem defigatur ſtylus, cui inſeratur regula cum dioptris.
3. Collineetur in ſingulos areæ angulos A, B, C &c. notenturque in peripheria circuli puncta diametraliter oppoſita *a* & *a*, *b* & *b*, *c* & *c* &c.
4. Inveſtigetur longitudo rectarum *o* A, *o* B, *o* C &c. (§. 126).
5. Charta a menſula remota alteri



mun-

mundæ coextendatur in tabula & Parallelismus ad *aa* applicatus arbitrario intervallo aperiatur, donec in charta munda ipsi parallela AA commode duci possit (§. 258).

6. Idem Parallelismus applicetur ad *bb* & eo usque aperiatur, donec recta BB huic parallela ducta alteram AA ipsi *aa* parallelam in puncto commodo O intersecet.

7. Applicetur porro successive ad rectas *cc*, *dd*, *ee*, quæ confusionis evitandæ gratia in schemate non omnes sunt expressæ, & aperiatur usque ad punctum intersectionis O ipsis *aa* & *bb* parallelarum, ducanturque per idem dictis *cc*, *dd*, *ee* parallelæ CC &c.

8. Tandem ex puncto intersectionis O convenienter determinetur longitudo rectarum ipsis oA, oB, oC &c. respondentium juxta scalam modicam (§. 279). Ita enim ut supra ichnographiam absolvere licebit.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia probl. præs. modo demonstretur, si plures lineæ *aa*, *bb*, *cc* &c. se intersecent in *o* & his ducantur totidem aliæ parallelæ AA, BB, CC &c. se itidem in O intersecantes, fore $y = m$, $x = n$, $z = l$ &c. Quod facile patet. Continuetur enim BB, donec ipsi *aa* occurrat in *f*: continuentur etiam CC & *cc*, donec ipsis *bb* & AA occurrant in *g* & K. Erit, ob parallelas *aa* & AA, $m = f$, &, ob parallelas *bb* & BB, $y = f$ (§. 233), ideoque $m = y$ (§. 87 *Arithm.*). Similiter ob parallelas *bb* & BB, $n = g$, &, ob parallelas *cc* & CC, $x = g$ (§. 233), ideoque $n = x$ (§. 87 *Arithm.*). Item ob parallelas *aa* & Aa, $z = K$, &, ob parallelas *cc* & CC, $l = K$ (§. 233), ideoque $l = z$ (§. 87. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

364. *Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo sufficiat. Si enim campus in plures resolutus fuerit partes; litera initialis in singulis nota quadam numerica notanda, & ubi unum alphabetum fuerit absolutum, aliud literis aliis usurpandum.*

SCHOLION 2.

365. *Etiam sine parallelismo ichnographiam facillime conficere datur, si puncta* a *&* a, *item* b, c, d &c. *subtili acu perforentur & per foramina pulvis carbonum linteo inclusus trajiciatur. Puncta enim* a *&* a *dabunt rectam, qua bifariam divisa determinatur centrum O; reliqua puncta* b, c, d &c. *situm angulorum figuræ respectu hujus centri determinant.*

SCHOLION 3.

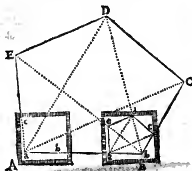
366. *Acus magnetica ex optimo chalybe cudenda, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri solet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur. Ejus longitudo 6 digitos ne superet, ne sphæram magnetis excedat; a duobus ne deficiat. Præstat major minore, ut angulus, quo in usu a linea meridiana pyxidis declinat, exactius innotescat. Communiter utuntur acu duorum vel ad summum trium digitorum. Uno magnetis polo cum aliqua mora eam affricari sufficit: affricanda autem est pars acus, quæ septentrionem respicere debet, polo australi, nec ductu contrario destruendum, quod anteriore communicatum fuerat. In hemisphærio septentrionali, quod nos inhabitamus, pars acus borealis post contactum magnetis ponderosior evadit & inclinatur: quare levior fieri debet australi. Pyxis ex ligno, ebore vel orichalco; stylus, cui capitellum acus ex ære, cupro vel argento intus in conum excavatum imponitur, ex orichalco vel argento paratur. Ut acus tanto exactius libretur, quidam styli apicem chalybeum faciunt.*

PROBLEMA 48.

367. *Ichnographiam* (Vid. Fig. seq.) *areæ ABCDE ex duabus stationibus A & B perficere.*

RESO-

RESOLUTIO.



1. Posita mensula in A collineatio fiat in singulos areæ angulos B, C, D & E, ducanturque rectæ versus eos ex *a*.
2. Quæratur distantia stationum AB (§. 126) & in mensulam ex scala Geometrica (§. 279) transferatur in *ab*.
3. Mensula ex A deferatur in B, ita ut punctum cognomine *b* in ea designatum ipsi B respondeat, & regula ad lineam *ba* applicata per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.
4. Ex puncto *b* in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versus eos rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c* intersecant.
5. Denique jungantur puncta *a* & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, *c* & *b* rectis *ae*, *ed*, *dc*, *cb*.

Dico, ichnographiam esse absolutam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam 1°. ABC = *abc* & CAB = *cab per constr.* erit AB:BC = *ab*:*bc* & AB:AC = *ab*:*ac* (§. 267). Similiter 2°. quia EAB = *eab* & EBA = *eba per constr.* erit AEB = *aeb*, itemque EA:AB = *ea*:*ab* & EB:AB = *eb*:*ab* (§. *cit.*). Porro 3°. cum sit DAB = *dab* & DBA = *dba*; erit etiam DA:AB = *da*:*ab* & DB:AB = *db*:*ab* (§. *cit.*). 4°. DBC = *dbc per constr.* &, quoniam DB:AB = *db*:*ab per num.* 3, atque AB:BC = *ab*:*bc per num.* 1, DB:BC = *db*:*bc* (§. 194 *Arith.*). Ergo CDB = *cdb* atque BCD = *bcd* & BC:CD = *bc*:*cd*, nec non BD:CD = *bd*:*cd* (§. 183). 5°. DB:BC = *db*:*bc per demonstrata in num.* 4, & AB:BC = *ab*:*bc per num.* 1. Ergo DB:AB = *db*:*ab* (§. 195 *Arithm.*). Est vero etiam EB:AB = *eb*:*ab per num.* 2. Ergo DB:EB = *db*:*eb* (§. *cit.*). Quare cum etiam sit DBE = *dbe per construct.* erit BDE = *bde* & DEB = *deb*, nec non DB:DE = *db*:*de* & DE:EB = *de*:*eb* (§. 183). 6°. BD:CD = *bd*:*cd per num.* 4, & DB:DE = *db*:*de per num.* 5. Ergo CD:DE = *cd*:*de* (§. 196 *Arithm.*). 7°. EB:AB = *eb*:*ab per num.* 2, & DE:EB = *de*:*eb per num.* 5. Ergo DE:AB = *de*:*ab* (§. 197 *Arith.*). Quare cum porro sit EA:AB = *ea*:*ab per num.* 2; erit DE:EA = *de*:*ea* (§. 195 *Arithm.*). 8°. Quia CDB = *cdb per num.* 4, & BDE = *bde per num.* 5; erit CDE = *cde* (§. 88. *Arithm.*). 9°. Similiter quia AEB = *aeb per num.* 2, & DEB = *deb per num.* 5; erit DEA = *dea* (§. 88 *Arithm.*). Cum itaque sit EAB = *eab* & ABC = *abc per constr.* BCD = *bcd per num.* 4, CDE = *cde per num.* 8, & DEA = *dea*

per

Per num. 9, atque præterea AB : BC = *ab* : *bc per num.* 1, BC : CD = *bc* : *cd per num.* 4, CD : DE = *cd* : *de per num.* 6, DE : EA = *de* : *ea per num.* 7, tandemque EA : AB = *ea* : *ab per num.* 2; figuræ ABCDE altera *abcde* similis eſt (§. 175). *Q. e. d.*

ALITER.

1. In A inveſtigetur quantitas angulorum EAD, DAC & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD & DBC (§. 152), quæraturque ſtationum diſtantia AB (§. 126).
2. Ducta in charta recta *ab* per ſcalam modicam diſtantiæ ſtationum AB convenienter determinetur (§. 279).
3. In *a* conſtituantur angulis EAD, DAC, CAB æquales *ead*, *dac*, *cab*; in *b* vero ipſis ABE, EBD & DBC æquales *abe*, *ebd* & *dbc* (§. 155).
4. Tandem puncta interſectionum *b*, *c*, *d*, *e* & *a* rectis connectantur.

Dico *abcde* eſſe ſimilem areæ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

ALITER.

1. Ope pyxidis magneticæ obſerventur ut in probl. præc. ex duabus ſtationibus A & B declinationes linearum AB, AC, AD, AE, itemque BC, BD, BE a linea meridiana acus.
2. Quæratur diſtantia ſtationum (§. 126).
3. In charta eodem modo, quo in probl. præc. determinetur ſitus rectarum *ab*, *ac*, *ad* &c. & puncta interſectionum *c*, *d*, *e* rectis connectantur.

Ita ichnographia erit abſoluta.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente, modo una notentur, quæ in demonſtratione penultima problematis præcedentis dicta ſunt.

PROBLEMA 49.

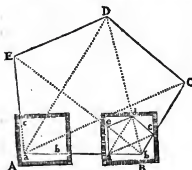
368. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.*

RESOLUTIO.

1. Menſula in A collocata collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis *bae* in eadem deſignari poſſit.
2. Longitudo utriuſque rectæ AB & AE explorata (§. 126) ex ſcala minore transferatur in menſulam ex *a* in *b* & *e* (§. 279).
3. Menſula in B translocetur, ita ut ipſi B punctum cognomine in eadem reſpondeat, & viſus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto,
4. Idem dirigatur per eaſdem in C, ut, ſicut ante, angulo ABC æqualis *abc*, & rectæ BC proportionalis *bc* in menſula deſignari poſſint.
5. Quodſi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in menſula delineata areæ propoſitæ ſimilis.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in men-

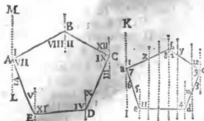


menſula delineatæ ſunt æquales ſingulis angulis areæ, & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia ſunt *per conſtr.* Figura igitur delineata eſt areæ ſimilis (§. 175). *Q. e. d.*

ALITER.

Quæratur longitudo omnium laterum (§. 126) & quantitas tot angulorum, quot ſunt latera, demtis tribus (§. 152). His enim datis ichnographia *per probl.* 46 (§. 360), vi demonſtrationis præcedentis abſolvetur.

ALITER.



1. Notetur in ſingulis angulis figuræ A, B, C, D, E laterum AB, BC, CD, DE, AE declinatio a linea meridiana pyxidis magneticæ ut in probl. 47 (§. 363).
2. Quæratur ſimul longitudo laterum (§. 126).
3. In charta deſignetur linea *ab* & in eam transferatur ex ſcala modica longitudo lateris AB (§. 279).
4. Ad rectam *ab* applicetur latus pyxidis lineæ ejuſdem meridianæ parallelum, ita tamen ut extremum ipſius ſeptentrionale ſeptentrionem reſpiciat & charta cum pyxide huc illucque moveatur, donec acus angulum declinationis debitum monſtret.
5. Charta immota idem latus pyxidis collocetur in *a* & circa id vertatur, donec angulum declinationis convenientem lateri AE indicet acus: ita enim rectam *ae* ducere & per ſcalam modicam ipſi AE proportionalem determinare licet.
6. Quodſi hæc operatio continuetur; ichnographia tandem abſolvetur.

DEMONSTRATIO.

Non aliud hic demonſtrandum eſt, quam angulum *bae* ope pyxidis magneticæ in charta ſic deſignatum, eſſe alteri BAE in campo æqualem. Superius uſum pyxidis magneticæ nullis dioptris inſtructæ exponentes demonſtravimus, pyxide ad latus figuræ AB in campo ita applicata ut linea meridiana ejuſdem ſit huic parallela, angulum declinationis acus eſſe ipſi BAM æqualem, ſi ML ita ducatur ope pyxidis, ut ejuſdem lineæ meridianæ parallela exiſtat (§. 363). Eodem modo ex ibi-

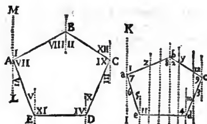
ibidem demonstratis apparet, pyxide eadem lege ad latus figuræ A E applicata esse angulum EAL angulo declinationis acus in hoc situ æqualem. His jam datis si latus pyxidis lineæ meridianæ ejusdem parallelum ad rectam *ab* in charta ductam applicetur, & charta cum pyxide vertatur, donec acus in convenienter situ angulum declinationis eundem, quem in campo ad latus B A, monstret; erit perinde *ba*K eidem angulo declinationis æqualis. Similiter si eadem lege pyxis applicetur ad punctum *a*, donec acus angulum declinationi lateris A E convenientem monstret & juxta ejus latus ducatur *ae*; erit angulus *ea*I angulo declinationis æqualis. Supponimus nempe rectam KI per *a* ea lege esse ductam, ut lineæ meridianæ pyxidis in plano mundi imaginario immobili respondeat centro in *a* collocato. Est igitur $1 = I$ & $6 = VI$ *per construct.* Sed $1 + 7 + 6 = 180°$ & $I + VII + VI = 180°$ (§. 147), consequenter $1 + 7 + 6 = I + VII + VI$ (§. 87. *Arith.*). Quare $7 = VII$ (§. 91 *Arith.*). *Q. e. d.*

Vel.

1. In charta ducantur lineæ quotcunque parallelæ.
2. Instrumentum transportatorium parallelismo instructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum sit in *a*, radius vero ipsi *a*K respondeat, noteturque punctum *z*, indicans in peripheria instrumenti gradum declinationis acus a linea meridiana pyxidis in campo ad punctum A.
3. Ab *a* per *z* ducatur recta, & ex *a* in *b* transferatur ex scala modica longitudo rectæ A B in campo mensuratæ.
4. Regula parallelismi solitaria unam parallelarum stringente, altera, cui cohæret instrumentum transportatorium, promoveatur, donec hujus centrum ipsum *b* attingat & ad gradum declinationis in B observatæ designetur punctum *y*: quo facto, ut ante, rectam *bc* ducere licet.
5. Hac operatione continuata, integra areæ ichnographia tandem absolvetur.

Demonstratio.

$1 = I$, $2 = II$, $3 = III$, $4 = IV$ & $5 = V$ *per constr.* & quoniam recta per *b* ducta (quæ diametrum instrumenti transportatorii refert) ipsi *a*K parallela *per construct.* acus vero magnetica in B est parallela situi in A; erit $1 = 8$ & $I = VIII$ (§. 233), consequenter $8 = VIII$ (§. 87 *Arith.*). Simili modo ostenditur esse $6 = VI$. Quare cum sit $1 + 7 + 6 = I + VII + VI$ (§. 147. *Geom.* & §. 87. *Arith.*); erit $7 = VII$ (§. 91 *Arith.*). Porro $2 = II$ *per constr.* & $8 = VIII$ *per demonstr.* Ergo $8 + 2 = VIII + II$ (§. 88 *Arith.*). Similiter $12 = 2$ & $XII = II$ (§. 233) & $3 = III$ *per constr.* Quare cum sit $12 + 9 + 3 = XII + IX + III$ (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arith.*); erit $9 = IX$ (§. 91 *Arith.*). Porro $4 = IV$ *per constr.* & hinc, cum sit $10 =$



3 & X = III (§. 233), ideoque ob 3 = III *per demonstr.* 10 = X (§. 87 *Arith.*), 4 + 10 = IV + X (§. 88 *Arith.*). Denique 5 = V *per constr.* & 4 + 11 = IV + XI (§. 233 *Geom.* & §. 87 *Arith.*), ideoque ob 4 = IV *per construct.* 11 = XI (§. 91 *Arith.*). Quare 5 + 11 = V + XI (§. 88 *Arith.*). Singuli igitur anguli figuræ *abcde* sunt æquales singulis angulis areæ ABCDE. Quare cum etiam latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sint *per construct.* figura *abcde* areæ ABCDE similis (§. 175). *Q. e. d.*

PROBLEMA 50.

369. *Figuræ in charta delineatæ similem in campo designare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc problema est inversum alterius, quo ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur casus, quot hujus commemoravimus, sed & ipsius resolutio ex resolutionibus problematum immediate præcedentium intelligitur. E. gr. Si semicirculo vel mensula & pertica utimur: anguli singuli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti &c. in solo designantur *per probl.* 7 (§. 155); & latera vel diagonales &c. per mensuram majorem decenter determinantur.

CAPUT VI.

De Figurarum Dimensione ac Divisione.

PROBLEMA 51.

370. *Invenire aream quadrati.*

RESOLUTIO.

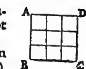
1. Quæratur longitudo lateris (§. 126).
2. Hæc ducatur in seipsam. Factum exprimit aream quadrati.

Sit e. gr. Latus quadrati = 345″

```
      345
    -----
     1725
    1380
   1035
   ------
erit Area = 119025
```

DEMONSTRATIO.

Aream quadrati investigans quærit,



rit, quot digiti quadrati, hoc est, quot quadratula digitum longa & lata in eodem contineantur (§. 118). Evidens vero est, si latus quadrati AB concipiatur in quotcunque partes æquales, & quadratum ipsum per rectas puncta divisionum in lateribus oppositis connectentes in quadrata minora divisum; tot esse quadratulorum series, quot partes habet latus AB, & in qualibet serie tot reperiri quadratula, quot latus BC vel idem AB habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, si latus in seipsum ducatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

371. Si latus quadrati fuerit 10, area erit 100. Cum igitur decempeda sit 10 pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 25); pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitus quadratos &c. continet (§. 118).

COROLLARIUM 2.

372. Si latus quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare si pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continebit 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos &c. (§. 118).

COROLLARIUM 3.

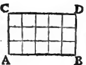
373. Datus igitur numerus in priori casu facile in digitos, pedes & perticas quadratas resolvitur, si scilicet a dextra finistram versus duæ notæ digitis, duæ pedibus resecentur: quæ enim finistram versus residuæ fiunt, perticis cedunt. E. gr. 119025 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

COROLLARIUM 4.

374. Quadrata sunt inter se in ratione duplicata laterum (§. 159 *Arith.*). E. gr. Quadratum lateris dupli est quadruplum quadrati lateris simpli. Et quadrata æqualia sunt, quorum latera æqualia sunt.

PROBLEMA 52.

375. *Invenire aream rectanguli ABDC.*



RESOLUTIO.

1. Investigetur longitudo laterum AB & AC (§. 126).
2. Ducatur AB in AC. Factum erit area rectanguli.

E. gr. Sit AB = 345″
AC = 123

1035
690
345

erit Area = 42435.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ problematis præcedentis.

COROLLARIUM 1.

376. Rectangula sunt in ratione composita suorum laterum AB & AC (§. 159. *Arith.*).

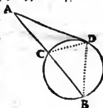
COROLLARIUM 2.

377. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales; quadratum mediæ rectangulo extremarum æquale est (§. 298 *Arith.*).

COROLLARIUM 3.

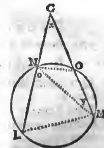
378. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; rectangulum sub extremis æquatur rectangulo sub mediis (§. 297 *Arith.*).

COROLLARIUM. 4.



379. Quare si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB secat; erit quadratum tangentis AD rectangulo sub secante AB & eius portione extra circulum AC æquale (§. 334 & 377).

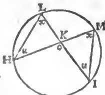
COROLLARIUM 5.



380. Si duæ vel plures secantes GL & GM ex eodem puncto G ducantur; erunt rectangula sub totis & earum portionibus extra circulum æqualia (§. 333 & 378).

COROLLARIUM 6.

381. Si duæ chordæ HM & LI se mutuo secent in K; erunt rectangula sub segmentis inter se æqualia (§. 332. 378).

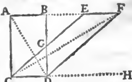


COROLLARIUM 7.

382. Cum orgya, qua lignorum strues metimur, vel quadrati, vel rectanguli figuram habeat; ejus area *per probl. præc. vel præf.* inveniri potest. Per hanc itaque si factum ex longitudine in latitudinem struis dividatur; quotus indicat, quot ipsa orgyas contineat (§. 69 *Arith.*).

THEOREMA 78.

383. *Duo parallelogramma ABDC & ECDF super eadem basi CD & inter easdem parallelas AF & CD constituta, sunt inter se æqualia.*



DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD, itemque EF & CD sunt latera opposita parallelogrammi *per hypoth.* erit AB=CD & EF=CD (§ 335), consequenter AB=EF (§. 87 *Arith.*), & hinc porro AE=BF (§. 88 *Arith.*). Quoniam porro AC=BD & CE=DF (§. 335); erit △ ACE=△BDF (§. 204), ideoque ABGC=FEGD (§. 91 *Arith.*), consequenter ABDC=EFDC (§. 88 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

384. Quoniam AF & CD sunt parallelæ *per hypoth.* erunt perpendicula inter eas intercepta æqualia (§. 226): quæ cum sint altitudines parallelogrammorum (§. 227); parallelogramma inter easdem parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Patet ideo parallelogramma super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia esse (§. 383).

COROLLARIUM 2.

385. Ergo & triangula super eadem basi, & ejusdem altitudinis æqualia sunt. Nam ▭ ACDB = ▭ ECDF (§. 384), sed △ ACD = ½ ▭ ACDB & △ FCD = ½ ▭ ECDF (§. 337). Ergo △ ACD = △ FCD (§. 94 *Arith.*).

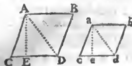
COROLLARIUM 3.

386. Quodcunque igitur triangulum DCF est dimidium parallelogrammi ACDB super eadem vel æquali basi CD & ejusdem altitudinis, seu intra easdem parallelas. Nam △ DCF = △ ACD (§. 385). Sed △ ACD = ½ ▭ ACDB (§. 337). Ergo △ DCF = ½ ▭ ACDB (§. 87 *Arith.*).

PROBLEMA 53.

387. *Invenire aream rhombi & rhomboidis seu parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.



1. In CD pro basi assumtam demittatur perpendicularis AE (§. 216), quæ erit altitudo parallelogrammi (§. 227).
2. Multiplicetur basis per altitudinem. Factum erit area quæsita.

E. gr. Sit CD = 4° 5′ 6″
AE = 2 3 4

1824
1368
912

Erit Area = 10° 67′ 04″

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo super eadem basi CD & ejusdem altitudinis AE (§. 384). Sed area rectanguli æquatur facto ex basi in altitudinem (§. 375 & 229).

& 229). Ergo eidem æqualis est area parallelogrammi obliquanguli (§. 87 *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

388. Parallelogramma sunt in ratione compositaj altitudinum & basium (§. 159 *Arith.*), ideoque & triangula eorum dimidia (§.386) in eadem existunt (§. 181 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

389. Ergo si altitudines sunt æquales, basium; si bases sunt æquales, altitudinum rationem habent (§. 181 *Arith.*).

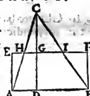
COROLLARIUM. 3.

390. Parallelogramma æqualia bases & altitudines reciprocant (§. 299 *Arith.*).

THEOREMA 79.

391. *Triangulum est æquale parallelogrammo super eadem basi, sed dimidiæ altitudinis, itemque parallelogrammo super dimidia basi & ejusdem altitudinis.*

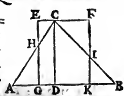
DEMONSTRATIO.



Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque super eadem basi AB & intra easdem basi parallelas AB & EF existenti æquale sit (§. 383), ideoque eidem, salva quantitate, substitui possit (§. 15 *Arith.*). Jam

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum; assumta AD pro basi, erit CD altitudo: sumta vero DC pro basi, erit AD altitudo (§. 228). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli EA (§. 229) sit altitudini dimidiæ trianguli CG æqualis *per hypoth.* & angulus ad D sit rectus (§. 91), ideoque ob EF & AB parallelas (§. 102) is ad G similiter rectus (§. 233), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 100), & hinc G = E (§. 145), sint vero etiam verticales ad H æquales (§. 156); erit ΔCGH = ΔEHA (§. 252), consequenter EGDA = ΔACD (§. 88 *Arith.*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendiculum CD in duo rectangula ADC & CDB resolvetur (§. 78. 91). Ergo si fiat FB = DG dimidiæ altitudini; erit DGFB = Δ DCB & AEGD = Δ ACD *per cas.* 1. Ergo AEFB = Δ ACB (§. 88 *Arith.*). *Quod erat unum.*

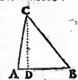


Si DK = KB = ½DB & GD = AG = ½AD; erit GK = ½AB, ideoque dimidia basis. Jam CFKD = ΔDCB & GECD = Δ ACD *per cas.* 1. Quare EGKF = Δ ACB (§. 88 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 54.

392. *Invenire aream Trianguli.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.



1. Multiplicetur basis AB per altitudinem CD: erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 375).
2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area trianguli ABC (§. 386).

ALI-

ALITER.

Basis dimidia $\frac{1}{2}$ AB multiplicetur per altitudinem CD, vel basis AB per altitudinem dimidiam $\frac{1}{2}$ CD. Factum erit area trianguli (§. 391. 387).

E. gr. AB = 3° 4′ 2″
CD = 2 3 4
1368
1026
684
80028
2)
△ ACB 40014

AB = 3° 4′ 2″
$\frac{1}{2}$ CD = 1 1 7
2394
342
342
△ ACB 40014

$\frac{1}{2}$ AB = 1° 7′ 1″
CD = 2 3 4
684
513
342
△ ACB 40014

COROLLARIUM I.

393. Triangula æqualia bases & altitudines dimidias (§. 299 *Arith.*), consequenter etiam bases & altitudines integras reciprocant (§. 178 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

394. Si area trianguli per basin dimidiam dividitur, quotus est altitudo (§. 210 *Arith.*).

PROBLEMA 55.

395. *Invenire latus quadrati parallelogrammo, vel triangulo dato æqualis.*

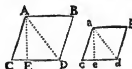
RESOLUTIO.

Quæratur inter basin & altitudinem parallelogrammi, vel inter dimidiam basin & altitudinem, aut integram basin & dimidiam altitudinem trianguli media proportionalis *per* §. 327, aut in numeris *per* §. 301 *Arith.* Ita prodit latus quadrati quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 375. 387), & factum ex dimidia basi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in basin aream trianguli (§. 392). Cum ideo quadratum lineæ vel numeri reperti sit in utroque casu facto isti æquale (§. 298. *Arith.*); erit quadratum istud in priori casu parallelogrammo, in posteriori triangulo æquale. *Q. e. d.*

THEOREMA 80.



396. *In parallelogrammis & triangulis similibus altitudines sunt lateribus homologis proportionales, & ab iis bases lateribus proportionaliter secantur.*

DEMONSTRATIO.

Cum altitudines AE & *ae* sint ad bases CD & *cd* perpendiculares (§. 227); erunt E & *e* anguli recti (§. 78), ideoque æquales (§. 145). Et quia parallelogrammum ABDC ipsi *abdc*, triangulum CAD ipsi *cad* simile *per hypoth.* erit C = *c* (§. 175). Quare AC:AE = *ac*:*ae* (§. 267). Est vero etiam AC:CD = *ac*:*cd* (§. 175). Ergo AE:CD = *ae*:*cd* (§. 196 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Quoniam E = *e* & C = *c per demonstr.* erit AC:CE = *ac*:*ce* (§. 267). Est vero etiam AC:CD = *ac*:*cd* (§. 175).

175). Ergo CE:CD=*ce:cd* (§. 196 *Arith.*), ideoque ED:CE=*ed:ce* (§. 193 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

397. *Patet quoque a priori. Quoniam enim* ABDC ∽ abdc *&* △ ACD ∽ △ acd per hypoth. *perpendicula* AE *&* ae, *pariterque segmenta basium* CE *&* ce, *itidemque* ED *&* ed *eodem modo determinantur* (§. 119. 216), *ideoque similia sunt* (§. 120). *Cum ideo ea eadem sint, per quæ a se invicem discerni debebant* (§. 24 Arith.), *lineæ autem rectæ utpote similes* (§. 17) *non aliter nisi ratione discerni possint* (§. 132 Arith.); *tam perpendicula, quam segmenta basium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent* (§. 149 Arith.). *Eodem modo generaliter patet, rectas quascunque in figuris similibus eodem modo determinatas tum inter se, tum ad latera homologa eandem rationem habere.*

COROLLARIUM 1.

398. Quoniam parallelogramma & triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 388), similia vero habent bases altitudinibus proportionales (§. 396); igitur parallelogramma & triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 159 *Arith.*). Et eodem modo patet, quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum baseos, imo linearum eodem modo ut libet determinatarum (§. 397).

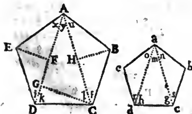
COROLLARIUM 2.

399. Sunt ergo ut quadrata laterum, altitudinum, & segmentorum basium homologorum, nec non linearum eodem modo ut libet determinatarum (§. 374).

PROBLEMA 55.

400. *Invenire aream polygoni irregularis ac trapezii.*

RESOLUTIO.



1. Resolvatur per diagonales AD & AC in triangula.
2. Inveniantur areæ singulorum triangulorum (§. 392) &
3. Addantur. Erit summa area quæsita (§. 86 *Arith.*).

E. gr. ½AD=43′ ½AD=43′ ½AC=42′
EF=35 GC=45 BH=30

215 215 △ABC 1260
129 172

△AED 1505 △DAC 1935
△AED 1505
△ABC 1260

Area polygoni irregularis 4700′

Quodsi ½ AD multiplicetur per summam altitudinum EF+GC, vel integra AD per ½ (EF+GC); prodibit area trapezii AEDC.

E. gr. EF=35 ½ AD=43
GC=45 EF+GC= 80

EF+GC=80 AEDC=3440

½(EF+GC)=40
AD=86

AEDC=3440

Similiter si in trapezio fuerit AB ipsi CD parallela; erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 226. 227), consequenter trapezii area prodit, ducta semisumma basium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 392).

E. gr. Sit AB=246″, CD=378″, BF=195″.
erit AB+CD=624

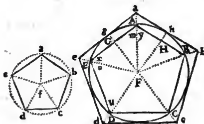
½(AB+CD)=312
BF=195

1560
2808
312

Area Trapezii 6°08′40″

THEOREMA 81.

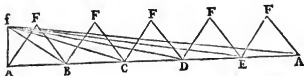
401. *Figura regularis ABCDE ex centro*



tro circuli circumſcripti F in triangula æqualia atque ſimilia reſolvitur & area ejus æquatur triangulo, cujus baſis peripheria totius polygoni AB + BC + CD &c. altitudo perpendiculum FG ex centro F in latus unum AE demiſſum. Idem valet de area circumſcripti abcde, *niſi quod altitudo ſit radius* Fg.

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam AB=BC=CD=DE =AE (§. 106), & AF=FB=FC =FD=FE (§. 40); triangula AFB, BFC, CFD, DFE, EFA æqualia & ſimilia ſunt (§. 204). *Quod erat unum.*



Conſtituantur triangula AFB, BFC, CFD &c. in quæ reſolutum eſt polygonum ABCDE, ſuper eadem recta AA (§. 199). Erigatur in A perpendicularis *Af* (§. 249) ipſi altitudini triangulorum æqualis. Erit △A*f*B = △AFB, △B*f*C = △BFC, △C*f*D = △CFD &c. (§. 385), conſequenter △A*f*A æquale △△AFB, BFC, CFD &c. (§. 88 *Arith.*), eſt etiam æquale areæ polygoni regularis (§. 86. 87 *Arith.*). *Quod erat ſecundum.*

Cum recta Fg (*Vid. Fig. 2*) ex centro F ad contactum *g* ducta ſit radius & ad latus *ae* perpendicularis (§. 308); erit ea altitudo trianguli *aFe* (§. 227). Reliqua patent ut ante. *Quod erat tertium.*

P R O B L E M A 56.

402. *Invenire aream polygoni regularis* (*Vid. Fig. 2. pag. præſ.*).

Resolutio & Demonstratio.

1. Latus polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum, e. gr. latus hexagoni per 3.
2. Factum porro ducatur in perpendiculum FH ex centro circuli circumſcripti in latus AB demiſſum.

Ita prodit area quæſita (§. 392. 401).

E. gr. AB =	$5^{0}\ 4'$
dimidius Numer. later.	$2\frac{1}{2}$
	108
	27
Semiperimeter =	135
Perpendiculum FH =	29
	1215
	270
Area Pentagoni	$39^{0}15'$

T H E O R E M A 82.

403. *Quadrilatera* (Vid. Fig. ſeq.) & *Polygona ſimilia ABCDE* & abcde per

per diagonales AC, AD & ac, ad in similia triangula ABC & abc, ACD & acd, ADE & ade dividuntur, & inter se, & totis proportionalia.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ABCDE ∽ *abcde per hypoth.* erit *o*=*o* & AB:BC=*ab*:*bc* (§. 175). Ergo Δ *bac* ∽ ΔBAC, *y*=*y* atque *bc*:*ca*=BC:CA (§. 183). Est vero etiam *bc*:*cd*=BC:CD & *n*+*y* =*n*+*y* (§. 175). Ergo *ca*:*cd*=CA:CD (§. 196 *Arith.*) & *n*=*n* (§. 91 *Arith.*), consequenter Δ*acd* ∽ Δ ACD, *cd*:*da*=CD:DA & *u*=*u* (§. 183). Est vero etiam *u*+*s*=*u*+*s* & *cd*:*de* =CD:DE (§. 175). Ergo *s*=*s* (§. 91 *Arith.*) & *da*:*de*=DA:DE (§. 196 *Arith.*), consequenter Δ *dea* ∽ Δ DEA (§. 183). *Quod erat primum.*

Quoniam Δ ABC ∽ Δ *abc*, Δ DAC ∽ Δ *dac* & Δ DAE ∽ Δ *dae per demonstrata*; erit Δ ABC : Δ *abc* = $CA^2 : ca^2$, ΔDAC:Δ*dac*=$CA^2 : ca^2$ =$DA^2 : da^2$ & Δ DAE : Δ *dae*=$DA^2 : da^2$ (§. 398), consequenter Δ ABC : Δ *abc*=Δ DCA : Δ *dca* & Δ DCA : Δ *dca*=ΔDAE:Δ*dae* (§. 167 *Arith.*), ideoque etiam Δ DEA : Δ *dea* = Δ ABC : Δ *abc* (*§. cit.*). Sunt igitur ΔΔ ABC, ACD, ADE & *abc*, *acd*, *ade* inter se proportionalia. *Quod erat secundum.*

Quoniam denique Δ ABC : Δ *abc* =ΔDCA : Δ *dca* = Δ DEA : Δ *dea per secundum hujus*; erit Δ ABC + Δ DCA + Δ DEA : Δ *abc* + Δ *dca* + Δ *dea* = Δ ABC : Δ *abc* (§. 187. *Arith.*). Sed Δ ABC + Δ DCA + Δ DEA=polygono ABCDE & Δ *abc* + Δ *dca* + Δ *dea* = *abcde* (§. 86 *Arith.*). Ergo ABCDE : *abcde* = Δ ABC : Δ *abc* = Δ DCA : Δ *dca* &c. (§. 168 *Arith.*), consequenter ABCDE : ΔABC = *abcde*:Δ*abc*, & ABCDE : Δ DCA = *abcde* : Δ *dca* &c. (§. 173 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

404. Cum polygona regularia sint æquilatera & æquiangula (§. 106), tum etiam sibi mutuo æquiangula (§. 344); polygona regularia ejusdem ordinis, veluti omnia pentagona, omnia hexagona &c. regularia inter se similia sunt (§. 175). Polygona igitur regularia ejusdem ordinis per diagonales in triangula similia dividuntur & inter se, & totis proportionalia.

SCHOLION

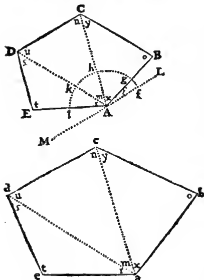
405. *Poterat theorema præsens ex notione determinationis facilius demonstrari. Nimirum cum figuræ* ABCDE *&* abcde *sint similes* per hypoth. *ideoque anguli* A *&* a *æquales (§. 175), atque præterea diagonales* AC, AD *&* ac, ad *ex angulis hisce æqualibus* A *&* a *ducantur*; ΔΔ ABC *&* abc, CAD *&* cad, DAE *&* dae *eodem modo determinantur (§. 119), consequenter & inter se similia sunt & similes partes figurarum existunt (§. 120),*

eandem ideo ad figuras tanquam tota rationem (§. 170 Arith.), *imo eandem inter se rationem, quam polygona aut quadrilatera habent* (§. 171 Arith.).

THEOREMA 83.

406. ***Figuræ tam regulares, quam similes irregulares habent rationem duplicatam homologorum laterum.***

DEMONSTRATIO.



Sint figuræ ABCDE & *abcde* sive regulares, sive irregulares similes, eæque sive quadrilateræ, sive polygonæ quæcunque ejusdem ordinis; erit ABCDE : *abcde* = Δ ABC : Δ *abc* = Δ ACD : Δ *acd* = Δ ADE : Δ *ade* (§. 403. 404). Sed Δ ABC : Δ *abc* = $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$, Δ ADC : Δ *adc* = $CD^2 : cd^2$ & Δ ADE : *ade* = $DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* = $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 167 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION

407. *Eodem modo ostenditur, figuras rectilineas similes esse in ratione duplicata diagonalium ex angulis æqualibus* A *&* a *ductarum, vel linearum aliarum quarumcunque eodem modo intra eas determinatarum* (§. 405).

THEOREMA 84.

408. ***Circuli & figuræ similes ipsis inscriptæ vel circumscriptæ, sunt inter se ut quadrata diametrorum.***

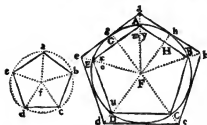
DEMONSTRATIO.

Ponamus describi duos circulos & iis circumscribi quadrata; omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 119 & 351). Sunt ergo figuræ utræque inter se similes (§. 120). Cum igitur utrobique eadem sint, per quæ distingui debent (§. 24 *Arith.*); quadrata circulis circumscripta ad suos circulos eandem rationem habere debent (§. 132 *Arith.*). Quamobrem circuli inter se sunt ut quadrata diametrorum (§. 173 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, figuras similes circulis inscriptas vel circumscriptas, esse ut circulos, quibus inscribuntur vel circumscribuntur. Sed circuli sunt ut quadrata diametrorum *per demonstrata.* Ergo figuræ ipsis inscriptæ & circumscriptæ similes, sunt ut quadrata diametrorum (§. 167 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

ALITER:

Resolvantur polygona circulis inscripta ABCDE & *abcde* ex centris



tris F & f in ΔΔ AFB, BFC, CFD &c. & *afb*, *bfc*, *cfd* &c. erit angulus FAB = *fab* & FBA = *fba* &c. (§. 344. 347), consequenter Δ AFB ∽ Δ *afb* (§. 267). Imo si polygona non fuerint regularia; anguli FAB & *fab*, itemque FBA & *fba* sunt anguli ad peripheriam similibus arcubus insistentes, ideoque æquales (§. 343. 141), consequenter Δ AFB ∽ Δ *afb* (§. 267), & generaliter in utroque casu dicta ΔΔ eodem modo determinantur (§. 119), ideoque similia sunt (§. 120). Eodem modo patet, esse Δ BFC ∽ Δ *bfc*, Δ CFD ∽ Δ *cfd* &c. Habemus itaque Δ AFB: Δ *afb* = $BF^2 : bf^2$, Δ BFC : Δ *bfc* = $BF^2 : bf^2$ &c. (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* = $BF^2 : bf^2$ (§. 187. *Arith.*), consequenter cum radii BF & *bf* sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & 178 *Arith.*), polygona similia circulo inscripta, sunt ut quadrata diametrorum (§. 260 *Arith.*). Et idem eodem modo ostenditur de polygonis circulo circumscriptis, cum ΔΔ similia etiam sint in ratione duplicata altitudinum (§. 398), altitudines vero triangulorum, in quæ resolvitur polygonum circulo circumscriptum, sint radii circulorum (§. 355).

Quodsi jam polygonum circulo inscriptum tot sumatur laterum, donec subtensa a peripheria magnitudine inassignabili differat; polygonum cum circulo idem erit. Unde etiam circuli erunt inter se ut diametrorum quadrata.

COROLLARIUM.

409. Habent ergo circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 374), ideoque, cum radii sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arith.*), & radiorum (§. 260. 259 *Arith.*).

THEOREMA 85.

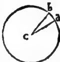
410. *Circulus æqualis est triangulo, cujus basis peripheriæ, altitudo radio æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se æquales, ideoque infinite parvas divisa; arcus infinite exigui *ab* supra chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, ideoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus infinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*; erit angulus *acb* infinite parvus, ideoque *a* & *b* non different a recto (§. 240), consequenter si *ab* sumatur pro basi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo (§. 228). Cum ideo area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis est radius *ac*, bases vero junctim sumtæ, sunt peripheriæ circuli æquales *per demonstrata*; erit ille æqualis triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius circuli (§. 401). *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION



411. *Hac demonstrandi methodo primus usus est* Keplerus (a). *Eam exemplo ejus excitatus* (b) *sub nomine* methodi indivisibilium *magis excoluit* Cavalerius. *Demonstrationem indirectam dedit* Archimedes (c) *non contemnendam, quoniam ipsius demonstrandi methodo principia methodi infinitesimalis rigidantur.*

COROLLARIUM 1.

412. Sunt igitur circuli in ratione composita peripheriarum & radiorum (§. 388). Sed iidem sunt in ratione duplicata radiorum (§. 409). Quare peripheriæ sunt inter se ut radii (§. 159. 167. 185 *Arith.*).

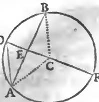
COROLLARIUM 2.

413. Cum igitur sit ut peripheria circuli unius ad suum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad suum (§. 173 *Arith.*); ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 39 *Geom.* & §. 178 *Arith.*) in omnibus circulis eadem.

SCHOLION

414. *Idem etiam hoc modo ostenditur: cum omnes circuli inter se similes sint* (§. 134), *per quæ distingui possent, ea eadem sunt* (§. 24 Arith.). *Quoniam itaque per rationem peripheriarum ad diametros distingui possent, siquidem ea in diversis circulis diversa foret* (§. 132 Arith.); *ratio in omnibus eadem esse debet.* Q. e. d.

THEOREMA 86.



415. *Sector circuli ACD æqualis est triangulo, cujus basis arcus AD, altitudo radius AC.*

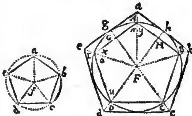
DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ theorematis præcedentis (§. 410).

THEOREMA 87.

416. *Polygonum inscriptum minus; circumscriptum majus est circulo. Similiter illius perimeter minor; hujus autem perimeter major est peripheria circuli.*

DEMONSTRATIO.



Latera AB, BC, CD &c. polygoni inscripti sunt chordæ arcus cognomines subtendentes (§. 342). Sed chordæ sunt arcubus minores (§. 191). Ergo singula polygoni latera AB, BC, CD &c. sunt singulis arcubus, qui eisdem respondent, minora, consequenter perimeter polygoni circulo inscripti est hujus peripheria minor (§. 90 *Arith.*). Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt: area polygoni parti circuli congruit (§. 9 *Arith.* & §. 3 *Geom.*), ideoque ipsi æqualis est (§. 161), consequenter polygonum inscriptum circulo minus (§. 20 *Arith.*). *Quod erat primum & secundum.*

Latera polygoni circumscripti *ab*, *bc*, *cd* &c. tangunt circulum (§. 355), ideoque tota extra eum cadunt (§. 47), consequenter circulus parti polygoni congruit (§. 9 *Arith.* & §. 3 *Geom.*). Hinc ipsi æqualis (§. 161), hoc est, circulus polygono circumscripto minor est (§. 20 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

Area

[a] in Nova Stereometria doliorum vinariorum part. 2. theor. 2. f. 8a.
[b] vide præfat. ad Geometriam indivisibilium continuorum nova ratione promotam p. b. 2.
[c] in libello de circuli dimensione prop. 1.

Area polygoni circumscripti est ad aream circuli in ratione composita radii circuli & perimetrorum (§. 401. 410. 388), consequenter ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 159 *Arith.*). Ergo illa ad hanc ut illius perimeter ad hujus peripheriam (§. 181 *Arith.*). Sed polygonum majus circulo *per demonstrata*. Ergo & ejus perimeter major peripheria hujus (§. 149 *Arith.*). *Quod erat quartum*.

THEOREMA 88.

417. ***In triangulo rectangulo ABC quadratum hypothenusæ AC æquale est quadratis laterum AHIB & BCED simul sumtis.***

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE & BF (§.121), itemque BK ipsi CF parallela (§.258) Quoniam Δ ACE cum quadrato BCED super eadem basi & inter easdem parallelas (§. 336) existit; hujus dimidium est (§. 386). Ex eadem ratione Δ BCF est dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x=o$ (§.98. 145), ideo $x+y=o+y$ (§. 88 *Arith.*). Præterea BC=CE & AC=CF (§. 98), ac proinde Δ ACE=Δ BCF (§. 179), consequenter BCED=LCFK (§.93 *Arith.*). Eodem modo ostenditur, esse AHIB = ALKG. Quamobrem BCED + AHIB = LCFK + ALKG (§. 88 *Arith.*) = ACFG (§.86 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

418. *Hoc theorema* Pythagoras *invenit: unde* Pythagoricum *dicitur. Amplissimi per Mathesin universam est usus: ideo ab illius auditoribus* hecatombe, *hoc est, centum boum sacrificio redemtum fertur.*

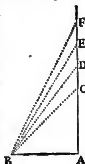
COROLLARIUM 1.

419. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumtis æquale, si 1°. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 249): 2°. super ducta hypothenusa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. cit.) ducaturque hypothenusa BD &c. Est enim $BC^2=AB^2+AC^2$ & $BD^2=BC^2+CD^2$ [§. 417]. Ergo $BD^2=AB^2+AC^2+CD^2$ &c.

COROLLARIUM 2.

420. Quodsi AB fuerit =1 & AC=1; erit CB = $\sqrt{2}$. Si porro fiat AD = CB = $\sqrt{2}$; erit DB = $\sqrt{3}$. Si fiat AE = 2; erit BE = $\sqrt{5}$. Si fiat AF = EB = $\sqrt{5}$; erit FB = $\sqrt{6}$ & ita porro in infinitum. Omnes ideo radices quadratæ surdæ, sunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, consequenter numeri (§. 10 *Arith.*) iique irrationales (§. 43. 295 *Arith.*).

COROLLARIUM 3.



421. Cum CB sit diagonalis quadrati (§. 111); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 420), ideoque unitati incommensurabilis (§. 43 *Arith.*), consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

COROLLARIUM 4.

422. Dantur ideo quantitates incommensurabiles, hoc est, quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 31 *Arith.*), consequenter rationes irrationales (§. 164 *Arith.*). Et hinc patet non repugnare, ut hæ numeris irrationalibus exprimantur (§. 420).

PROBLEMA 57.

423. *Datis chorda AB & radio AC invenire chordam arcus dimidii AD.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bisecat in D *per hypoth.* etiam chordam AB bisecat & ad eam perpendicularis (§. 291), ideoque anguli ad E recti sunt (§. 78). Quare

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: residuum est quadratum ipsius EC (§. 417).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arith.*), quæ erit EC.
3. Hæc ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, summa est quadratum DA (§. 417).
5. Inde ergo si extrahatur radix (§. 269 *Arith.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

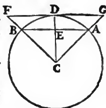
E. gr. Sit radius AC = 10000, & AB latus hexagoni: erit AB itidem 10000 (§. 356) & AE = 5000.

Quare

$AC^2 = 100000000$	$AE^2 = 25000000$
$AE^2 = 25000000$	$ED^2 = 1795600$
$CE^2 = 75000000$	$DA^2 = 26795600$
	$DA = 5176$
$CE = 8660$	
$DC = 10000$	
$DE = 1340$	

PROBLEMA 58.

424. *Dato latere polygoni regularis inscripti AB invenire latus circumscripti FG.*



RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB, & CD chordam AB bifariam dividit (§. 355); erit $AE = \frac{1}{2} AB$ & CE:EA = CD:DG (§. 268). Quare si ob angulum rectum ad E (§. 291), EC investigetur ut in problemate præcedente; reperietur DG (§. 302 *Arith.*), cujus duplum est latus polygoni circumscripti FG. Est enim CE:CD = EA:DG & CE:CD = EB:DF (§. 268). Cum ideo sit EA:DG = EB:DF (§. 167 *Arith.*) & EA = EB *per demonstrata*: erit etiam DG = DF (§. 177 *Arith.*), ideoque FG = 2 DG. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Sit DC = AB = 10000; erit AE = 5000 & EC = 8660 (§. 423), ideoque DG = 5774 fere. Hinc FG = 11548.

PRO-

PROBLEMA 59.

425. ***Invenire rationem diametri ad peripheriam.***

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam bisectionem latera polygonorum inscriptorum (§. 423), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.
2. Invento hoc latere quæratur porro latus polygoni similis circumscripti (§. 424).
3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni tam inscripti, quam circumscripti (§. 106).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major, quam ejusdem ad perimetrum polygoni circumscripti; minor vero, quam ejusdem ad perimetrum inscripti (§. 416 *Geom.* & §. 205 *Arith.*). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

Sit e. gr. radius circuli 1 seu (ut latera polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 1000000000000000000000000000000; repeerietur continua a quadrato bisectione latus polygoni 1073741824 laterum inscripti vero proxime minus 0.0000000000585167231706863871 22; circumscripti autem latus vero itidem proxime majus 0.00000000005851672317068638737 84. Hinc perimeter circumscripta 6.28318530717958649156537 vero proxime major; inscripta autem 6.2831853071795864509 3 vero proxime minor. Cum ergo circuli peripheria intra hos limites contineatur; posita diametro 2.000000 0000000000, erit peripheria minor quam 6.2831853071795864, major vero quam 6.2831853071795863. Unde ratio prope vera diametri ad peripheriam ut 1000000000000000000 ad 3141 5926535897932. Compendia calculi tradit *Ludolphus a Ceulen* (a).

SCHOLION 1.

426. *In quadrando circulo ab omni ævo, quo Geometria exculta, desudarunt ingenia præstantissima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, etsi nostra præsertim ætate ars inveniendi egregie promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi.* Archimedes (b) *ea fini excogitavit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inscripta & circumscripta, & polygonis 96 laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse ut 7 ad 22 fere. Nimirum si diameter 1, perimeter polygoni inscripti reperitur* $3\frac{10}{71}$, *perimeter vero circumscripti* $3\frac{1}{7}$. *Ejus vestigiis insistentes posteri rationes propiores investigarunt. Nemo autem plus operæ impendit* Ludolpho a Ceulen (c), *qui tandem reperit, posita diametro 1 peripheriam esse majorem quam 3. 14159265358979323846264338387950, sed minorem quam idem numerus, cyphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum respondent; in Geometria practica hodie a plerisque assumitur, diametrum esse ad peripheriam ut 100 ad 314, vel in circulis majoribus ut 10000 ad 31415: in qua proportione* Ptolemæus, Vieta, Hugenius *cum* Ludolpho *consentiunt.* Hugenius (d) *compendiosiorem monstravit viam; sed pluribus theorematis nixam, quæ in hisce Elementis non demonstrantur.*

COROLLARIUM.

427. Si diameter fuerit 113; erit peripheria (113. 31415): 10000 (§. 302 *Arith.*), hoc est, 355 quam proxime.

SCHOLION 2.

428. *Hæc proportio, quam* Adrianus Metius *tradit* (e) *a parente suo inventam & demonstratam* (f), *inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratissima. Quodsi enim numerum 355 septem cyphris ad obtinendas fractiones decimales auctum per 113 dividas; quotus cum proportione Ludolphina collatus ostendet, eam ne* $\frac{1}{10000000}$ *quidem a vera differre.*

[a] In libro de circulo & adscriptis conf. Fundamenta Arithmetica & Geometrica lib. 6. probl. 2. p. m. 241 & seqq.
[b] In libello de circuli dimensione prop. 2.
[c] In Zetematum Geometricorum Epilogismo Zetem. 2 p. 92.
[d] In inventis de circuli magnitudine prop. 10 p. 13. & prop. 20. p. 40.
[e] In Geometria practica part. 1. c. 10. §. 3. p. m. 89.
[f] in libello adversus quadraturam circuli Simonis a Quercu conscripto.

Problema 59.

429. *Data diametro circuli invenire peripheriam & aream ejus, & data peripheria diametrum.*

Resolutio & Demonstratio.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 426. 427); una data, invenietur altera (§. 302 *Arith.*).
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 410. 392).

E. gr. Sit diameter 56′: erit

100—314—56′	Periph. 17584‴
56	$\frac{1}{4}$Diam. 1400
1884	7033600
1570	17584
Periph. $17^{0}5'8''4'''$	Area $24^{0}61'76''00'''$

Corollarium 1.

430. Si diameter 100; peripheria 314 (§. 426), ideoque area circuli 7850 (§. 429). Est vero quadratum diametri 10000 (§. 370). Ergo hoc ad aream circuli ut 10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785 (§. 181 *Arith.*) quam proxime.

Corollarium 2.

431. Similiter si diameter 113; peripheria 355 (§. 427), ideoque area circuli $10028\frac{1}{4}$ (§. 429). Est vero quadratum diametri 12769 (§. 370). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad $10028\frac{1}{4}$, hoc est, ut 51076 ad 40115 (§. 178 *Arith.*), consequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 181 *Arith.*), quæ Metiana proportio priori accuratior.

Corollarium 3.

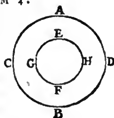
432. Area igitur circuli etiam invenitur, si ad 1000, 785 & quadratum diametri, vel ad 452, 355 & quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302 *Arith.*).

Sit e. gr. diameter 560″, erit quadratum ejus $31^{0}36'00''$. Quare

1000 — $31^{0}36'00''$ — 785	
785	
1568000	
25088	
21952	
$24^{0}61'76''$	Area circuli.

Corollarium 4.

433. Si area circuli minoris GEHF subtrahatur ex area majoris concentrici ADBC; relinquitur annulus ADBCGEHF.



Problema 60.

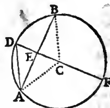
434. *Data area circuli, invenire diametrum.*

Resolutio.

1. Quæratur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus quartus proportionalis 313600 (§. 302 *Arith.*): qui est quadratum diametri (§. 430).
2. Inde extrahatur radix quadrata 560 (§. 269 *Arith.*): quæ est diameter (§. 246 *Arith.* & §. 370 *Geom.*).

Problema 61.

435. *Dato radio circuli* AC *una cum ratione arcus* AB *ad peripheriam, invenire aream sectoris* ACB.



Resolutio.

1. Quæratur ad 100, 314 & radium AC

AC numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*): qui est semiperipheria (§. 426 *Geom.* & §. 181 *Arith.*).

2. Quæratur porro ad 180°, arcum datum AB & semiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*): ut habeatur arcus AB in eadem mensura, in qua radius AC datur.
3. Tandem arcus AB ducatur in semiradium.

Factum exprimet aream sectoris (§. 415. 392).

E. gr. Sit radius 6', arcus 60°.

100 —— 314 —— 600‴

600

Semiperiph. 1884|00

180 —— 1884 —— 60

60) 3 —————— 1

628‴ = AB

300 = ½AC

Area 18'84''|00 = ACB

Problema 62.

436. *Datis altitudine segmenti DE & dimidia basi* AE, *invenire aream ejus.*

Resolutio.

1. Quæratur diameter (§. 328).
2. Describatur circulus (§. 131) & in eo applicetur basis segmenti AB.
3. Ducantur radii AC & BC, & ope instrumenti transportatorii investigetur numerus graduum arcus ADB (§. 152).
4. Dato jam radio AC una cum arcus ADB ad peripheriam ratione, investigetur area sectoris ACB (§. 435) &
5. ex chorda AB atque altitudinis segmenti DE complemento ad radium EC area trianguli ACB (§. 392).
6. Hoc denique ex illo auferatur: residuum erit segmentum ADBEA.

E. gr. Sit AB = 600‴, DE = 80‴; erit DF = 1205‴ (§. 328), arcus AB = 60° (§. 152). Ergo area sectoris ADBC 18'84'' (§. 435). Jam EC = 522½‴, AE = 300‴. Quare Δ ACB = 156750‴, consequenter segmentum AEBDA = 31650‴.

Corollarium.

437. Quodsi segmentum majus BFA quæratur; triangulum BCA sectori BFACB addendum.

Scholion.

438. *Ne pro invenienda area sectoris atque segmenti peripheriam investigari opus sit; arcuum gradus atque scrupula tam prima, quam secunda istiusmodi particulis expressa in tabula subsequente exhibere placet, qualium diameter est* 100000. *Constructio tabulæ intelligitur ex resolutione problematis* 61 (§. 435) *usus talis est. Sit e. gr. ut in casu problematis*

Grad.	Part. per.	Min.	Part. per.
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727
60	52359	sec.	Part. per.
70	61086	2	0
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	$\frac{1}{2}$
100	87266	5	1
110	95993	6	1
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12

tis

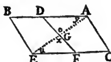
lis citati diameter 1200''', arcus 60°. Cum 60 gradibus in tabula respondeant 52359 particulæ diametri; inferatur:

100000 —— 52359 —— 1200
1200
10471800
52359
628|30800
1|00000

Est ergo arcus 628''', ut supra (§. cit.) eundem reperimus.

PROBLEMA 63.

439. *Parallelogrammum ABEC ex dato puncto D in duas partes æquales dividere.*



RESOLUTIO.

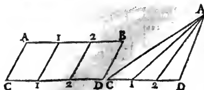
Fiat EF = AD & ducatur recta DF: erit ADFC = DBEF.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE; erit $o = x$ (§. 156) &, ob parallelas AB & EC (§. 102), $y = u$ (§. 233). Sed AD = FE *per const.* Ergo Δ ADG = Δ FGE (§. 252). Est vero Δ ACE = Δ AEB (§. 337). Quare ACFG = DBEG (§. 91 *Arith.*), consequenter ADFC = DBEF (§. 88 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 64.

440. *Parallelogrammum atque triangulum in partes quotcunque æquales dividere.*



RESOLUTIO.

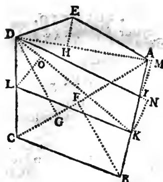
1. Dividatur basis CD in tot partes æquales, in quot figura dividenda (§. 274).
2. In parallelogrammo a punctis divisionum ducantur lateri AC parallelæ 11, 22; in triangulo vero a vertice A ad divisionum puncta rectæ A1, A2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A11C, 1221, 2BD2 inter easdem parallelas AB & CD existunt (§. 102); eandem altitudinem habent (§. 226. 227). Sunt itaque in basium ratione (§. 389), consequenter ob C1 = 12 = 2D *per constructionem*, æqualia. *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonnisi unica duci possit (§. 217); triangula CA1, 1A2, 2AD eandem altitudinem (§. 227), ideoque basium rationem habent (§. 389). Sed bases æquales sunt *per constr.* Ergo & triangula. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 65.



441. *Figuram rectilineam quamcun-*

cunque ABCDE in partes æquales dividere.

RESOLUTIO.

1. Quæratur area figuræ (§. 400) & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, e. gr. in 3.
2. Area partis in nostro casu tertiæ ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED subtrahatur a parte tertia & residuum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendi, ut AEDI sit pars tertia figuræ (§. 394).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipsi AD (§. 258), quæ secabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abscindentem.
5. Pars tertia dimidia sive sexta totius figuræ dividatur per $\frac{1}{2}$ DI, quotus erit altitudo trianguli IKD sextam figuræ partem constituentis (§. 394).
6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipsi ID parallela, ut habeatur punctum K (§. 258).
7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{2}$ KD, ut habeatur altitudo trianguli KLD sextæ itidem parti figuræ æqualis (§. 394).
8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipsi KD parallela (§. 258), ut punctum L determinetur, ducaturque recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL resecabit.
9. Si figura in plures quam tres partes resolvenda; eodem modo ulterius procedendum.

E. gr. Sit AD = 516″, AC = 580″, EH = 154″, DG = 315″, BF = 375″; erit AED = 39732, ADC = 91350 & ABC = 108750 (§. 392), ideoque area figuræ 239832 (§. 400); ejus pars tertia 79944; pars sexta 39972.

Pars III = 79944
AED = 39732
AID = 40212 (155″ + seu 156″ fere = IM
$\frac{1}{2}$ AD = 258) 258
1441
1290
1512
1290
222

Pars VI = 39972 (151″ = KN.
$\frac{1}{2}$ DI = 264) 264
1357
1320
372
264
108

Pars VI = 39972 (139″ = LQ
$\frac{1}{2}$ DK = 287) 287
1127
861
2662
2583
79

SCHOLION 1.

442. *Si AED majus tertia e. gr. parte figuræ; ipsam ab illo subtrahi necesse est, & residuum erit triangulum a triangulo AED auferendum, ut tertiæ parti figuræ æquale evadat. Sæpe etiam consultum est, ut prima pars AEDI per duo triangula, uti cæteræ, determinetur.*

SCHOLION 2.

443. *Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta* I, K, L *per quantitatem rectarum* AI, IK *&* DL *facile determinantur* (§. 126).

Finis Partis Prioris.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS POSTERIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT PRIMUM

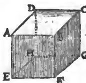
De Principiis Geometriæ ſolidæ.

DEFINITIO 1.

444. *Solidum* ſive *corpus* eſt magnitudo tribus dimenſionibus prædita, ſeu extenſum in longitudinem, latitudinem atque profunditatem.

DEFINITIO 2.

445. Angulus ſolidus B eſt plurium quam duarum linearum AB, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano conſtitutarum ad omnes inclinatio.



COROLLARIUM 1.

446. Ergo angulus ſolidus B pluribus quam duobus angulis planis in eodem plano non conſtitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM 2.

447. Quoniam igitur tres minimum lineæ ad angulum ſolidum conſtituendum requiruntur (§. 445); tres minimum anguli plani ad ſolidum conſtituendum neceſſarii.

SCHOLION 1.

448. *Unde etiam* angulus ſolidus *definitur, quod ſit is, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem plano non conſiſtentibus, ad idem tamen punctum conſiſtentis, continetur.*

COROLLARIUM 3.

449. Ut anguli ſolidi ſint æquales, angulis planis & multitudine & magnitudine æqualibus ac eodem ordine diſpoſitis contineri debent (§. 15 *Arith.*).

SCHOLION 2.

450. *Suppono ſcilicet, ut anguli ſolidi ſalva quantitate ſibi mutuo ſubſtitui poſſint, eos intra ſe invicem poſitos congruere debere; quemadmodum etiam* anguli ſolidi æquales *vulgo definiuntur, quod intra ſe invicem poſiti congruant.*

COROLLARIUM 4.

451. Cum anguli ſolidi diſtingui nequeant niſi per planos, quibus continentur (§. 448), ubi plani & numero, & magnitudine æquales ac eodem ordine diſpoſiti fuerint; ea coincidunt, per quæ a ſe invicem diſtingui debent. Sunt ergo ſimiles (§. 24. *Arith.*), conſequenter anguli ſolidi ſimiles ſunt æquales, & contra (§. 449).

COROLLARIUM. 5.

452. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant ſummam 360 graduum; planum circuli ſternunt (§. 41. 57), ideoque ſolidum angulum non conſtituunt (§. 446). Quare ſumma eorum, quibus ſolidus continetur, quatuor rectis ſeu 360° (§. 144) minor eſſe debet.

DEFINITIO 3.

453. *Corpus regulare* eſt ſolidum planis regularibus & inter ſe æqualibus terminatum. Reliqua corpora dicuntur *irregularia*.

SCHO-

SCHOLION.

454. *Corpora regularia dicuntur etiam* Platonica, *propterea quod* Plato *in* Timæo *corpora, quæ statuit, simplicia, cælum puta, ignem, aërem, aquam atque terram cum iisdem comparat.*

COROLLARIUM.

455. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero, & magnitudine æqualibus contineatur (§. 453); omnes anguli corporis cujuslibet regularis æquales sunt (§. 449).

DEFINITIO 4.



456. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu sibi semper parallelo deorsum feratur; *Prisma* ABCFDE describit, & quidem *rectum*, si linea directrix AE fuerit ad planum describens perpendicularis: *obliquum* vero, si ea ad idem fuerit obliqua. In specie *Prisma* dicitur *triangulare sive trigonum*, si planum describens fuerit triangulum; *quadrangulare*, si fuerit figura quadrilatera, & ita porro.

COROLLARIUM 1.

457. Quodlibet igitur prisma habet duas bases oppositas ABC & EDF æquales, & circumcirca terminatur tot parallelogrammis, quot basis latera habet. Est enim AC ipsi ED parallela atque æqualis *per hypoth.* Ergo & AE parallela ipsi CD (§. 257), consequenter ACDE est parallelogrammum (§. 102). Et idem eodem modo de ceteris planis lateralibus ostenditur.

COROLLARIUM 2.

458. Plana sectionum prismatis basi ACB parallele factarum sunt inter se æqualia. Æquantur enim plano describenti ACB (§. 456 *Geom.* & §. 81 *Arith.*). Ergo & inter se æqualia sunt (§. 87 *Arith.*).

DEFINITIO 5.

459. Si planum describens ABCD (*Vid. Fig.* §. 445.) fuerit quadratum, & linea dirigens AE lateri ejus AB æqualis, atque angulus BAE rectus; *Cubus* describitur.

COROLLARIUM 1.

460. Cubus terminatur (*Vid. Fig.* §. 445.) sex quadratis inter se æqualibus: est enim ABCD ≡ EFGH (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arith.*). Cumque ea eadem ratione AB & EF sint inter se æquales atque parallelæ, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 230), consequenter ABFE quadratum (§. 338), ipsi ABCD æquale (§. 374). Eodem modo ostenditur, reliqua plana terminantia esse quadrata ipsi ABCD æqualia.

COROLLARIUM 2.

461. Plana sectionum basi parallele factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arith.*), consequenter etiam æqualia inter se (§. 87 *Arith.*).

DEFINITIO 6.



462. Si planum describens IKML fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* describitur.

COROLLARIUM 1.

463. Plana sectionum basi parallele factarum sunt parallelogramma ipsi æqualia (§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*), ideoque & æqualia inter se (§. 87 *Arith.*).

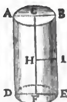
COROLLARIUM 2.

464. Cum LM & NO sint æquales & inter se parallelæ (§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arith.*); etiam MO & LN æquales sunt & parallelæ (§. 257), consequenter LMON parallelogrammum (§. 102). Eodem modo ostenditur, plana terminantia reliqua esse parallelogramma. Terminatur igitur parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum bina opposita inter se æqualia sunt.

DEFINITIO 7.

465. Si circulus AB (*Vid. Fig. seq.*) juxta ductum rectæ AD motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Cylin-*

Cylindrus deſcribitur; *rectus* quidem, ſi recta CF centra baſium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad baſes perpendicularis; *ſcalenus* vero, ſi ad angulos obliquos eiſdem inſiſtat. Quodſi parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus unum CF gyretur; *cylindrum* deſcribit *rectum*.

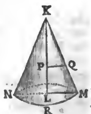


COROLLARIUM.

466. Sunt ergo non modo baſes cylindri AB & DE æquales; verum etiam ſectiones baſibus parallelæ ſunt circuli iiſdem & inter ſe æquales.

DEFINITIO 8.

467. Si recta quædam KM in peripheria circuli NRM ita incedat, ut conſtanter inhæreat puncto fixo K; deſcribetur *Conus* N KM. Recta ex puncto K, qui *vertex* coni dicitur, ad centrum baſis L ducta dicitur *Axis coni*: qui ſi ad circulum NRM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* eſt; ſi vero ad angulos obliquos eidem inſiſtat, *ſcalenus*. Linea deſcribens KM ſeu recta ex vertice in peripheriam baſis ducta vocatur *Latus Coni*. Poſſumus quoque *Coni* geneſin ita concipere, ut dum circellus infinite parvus motu ſibi ſemper parallelo ita deorſum fertur, ut centrum continuo ſit in axe KL; radius PQ axi KP proportionaliter continuo augeatur. Quodſi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur; *Conus* deſcribitur *rectus*.



COROLLARIUM.

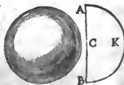
468. Quodſi PQ ipſi LM parallela; per ultimam coni geneſin erit KP : KL = PQ : LM. Quare cum PQ & LM ſint radii circulorum ſibi invicem parallelorum; planum ſectionis baſi coni parallele factæ circulus eſt eadem minor.

SCHOLION.

469. *Ex geneſi ultima coni apparet, in definitionibus geometricis geneticis tanquam entium imaginariorum admitti etiam poſſe miraculoſa. Et quoniam in cono obliquo latus coni non ejuſdem longitudinis in quovis peripheriæ puncto; patet lineam deſcribentem KM, quæ altero ſui extremo peripheriæ* NRM *conſtanter adhæret, per punctum fixum K aliqua ſui parte nunc deorſum, nunc ſurſum, moveri debere.*

DEFINITIO 9.

470. Si ſemicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphæra* deſcribitur, diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphæræ*, centrum C etiam *Centrum Sphæræ*.

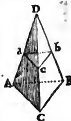


COROLLARIUM.

471. Omnes ergo rectæ ex ſphæræ ſuperficie in centrum ductæ, ſunt inter ſe æquales (§. 40).

DEFINITIO 10.

472. *Pyramis* eſt ſolidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, CDB & BDA in uno puncto D coeuntibus, quot baſis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis, quadrangularis, quinquangularis* &c. ſi baſis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.



Co-

COROLLARIUM 1.

473. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CB, BA basis ACB parallelæ ducantur; erit DC : Dc = CA : *ca* = CB : *cb* (§. 268), ideoque CA : *ca* = CB : *cb* (§ 167 *Arith.*), consequenter cum eodem modo ostendi possit esse CA : *ca* = AB : *ab*, erit triangulum *acb* simile triangulo ACB (§. 207). Quare si piramis triangularis DACB secatur plano basi parallelo; planum istud huic simile erit.

COROLLARIUM 2.

474. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera basis demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secetur; constabit id ex triangulis, quæ singula singulis similia sunt, in quæ resolvitur basis (§. 473), consequenter cum vi demonstrationis primæ problematis 47 (§. 363) pateat, similes esse figuras rectilineas quascunque, quæ ex triangulis similibus eodem ordine inter se junctis componuntur, in quavis pyramide planum sectionis basi parallelum est figura basi similis.

DEFINITIO 11.

475. *Tetraedrum* est solidum quatuor; *Octaedrum* est solidum octo; *Icosaedrum* est solidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehensum; *Dodecaedrum* vero solidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum.

DEFINITIO 12.

476. *Inclinatio plani* KEGL *ad planum* ACDB est angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam sectionis EG perpendiculares.

DEFINITIO 13.

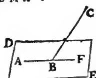
477. *Mensura solidi* est cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica*. Hæc dividitur in *Pedes*, *Digitos*, &c. *cubicos*, hoc est, in cubos, quorum latus pedem, digitum &c. adæquat.

CAPUT II.

De Sectione & Situ Planorum.

THEOREMA 1.

478. *Rectæ lineæ pars quædam AB non est in subjecto plano DE, pars vero BC in sublimi.*

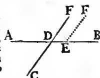


DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri potest, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars vero altera BC in sublimi. Cum linea recta terminata utrinque produci possit (§. 21); producatur AB in F: erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB est pars rectæ ABC *per hypoth.* Punctum igitur rectam describens in B mutat directionem, cum & versus F, & versus C progredi valeat, ubi ad B pervenit: quod cum sit absurdum (§. 19), rectæ lineæ pars una AB non potest esse in subjecto plano DE, pars vero altera BC in sublimi. *Q. e. d.*

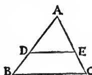
COROLLARIUM 1.

479. Duæ igitur rectæ ADEB & CDEF segmentum commune DE habere nequeunt (§. 478), consequenter duæ rectæ AB & CF se mutuo non intersecant nisi in uno puncto D.



COROLLARIUM 2.

480. Cumque pars rectæ AD esset in subjecto plano, pars vero BD in sublimi, si trianguli ABC pars ADE esset in subjecto plano, pars vero DBCE in sublimi; triangulum ABC erit in eodem plano.



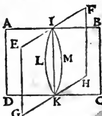
COROLLARIUM 3.

481. Et quoniam rectarum BE & DC se mutuo secantium in A partes AB & AC sunt crura trianguli ABC; erunt eædem in eodem plano (§. 480). Sed in eodem plano est EA, in quo est AB, & AD in eodem est, in quo est AC (§. 478). Ergo lineæ se mutuo secantes EB & DC in eodem sunt plano.



THEOREMA 2.

482. *Si duo plana ABCD & EFHG se mutuo secent; erit communis sectio recta IK.*

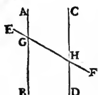


DEMONSTRATIO. Quoniam rectæ AB & EF se mutuo non intersecant nisi in puncto I, nec rectæ DC & GH nisi in puncto K (§. 479); si communis planorum sectio non est recta unica, sed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducantur ergo in plano EFHG recta ILK, & in plano ABCD recta IMK, quod fieri posse patet, si sectio communis planorum ABCD & EFHG non est recta unica IK, utut planum sectionis lineis curvis in punctis I & K coeuntibus terminari sumas (§. 191). Duæ igitur rectæ ILK & IMK, cum earum extrema in I & K coincidant, totæ in punctis reliquis una coincidere debent (§. 170), consequenter communis sectio

ctio esse nequit nisi recta jungens puncta I & K. *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

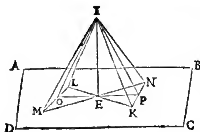
483. *Si duæ rectæ AB & CD fuerint in eodem plano; recta EF eas secans in G & H erit in eodem plano.*



DEMONSTRATIO.

Secet planum aliud planum datum, in quo positæ sunt rectæ AB & CD in punctis G & H: recta transiens per G & H est communis sectio planorum (§. 482). Sed eadem est pars lineæ EF (§. 170), quæ duas AB & CD secat *per hypoth.* Recta igitur EF est in eodem plano, in quo ponuntur duæ AB & CD. *Q. e. d.*

THEOREMA 4.



484. *Si recta IE fuerit perpendicularis ad duas rectas KL & MN in plano ABCD ductas & se mutuo in puncto E secantes; erit ea perpendicularis ad rectam quamvis aliam OP, quæ per punctum E ducitur in eodem plano.*

DEMONSTRATIO.

Fiat ME = EN & LE = EK. Quoniam MEL = KEN (§. 156); erit ML = KN, & angulus EMO = ENP (§. 179). Quare cum etiam sit MEO = PEN (§. 156); erit MO = PN & EO = EP (§. 251). Quia IE perpendicularis ad MN *per hypoth.* erit angulus IEM = IEN (§. 79), consequenter, cum sit ME = EN *per construct.* & IE = IE, etiam IM = IN (§. 179). Eodem modo ostenditur esse IL = IK. Quoniam itaque ML = KN *per demonstrata*; angulus INP = IMO (§. 204), ideoque, ob IN = IM & PN = MO *per demonstrata*, IP = IO (§. 179). Est vero etiam EP = EO *per demonstrata* & IE = IE. Quamobrem angulus IEP = IEO (§. 204), consequenter IE ad OP perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

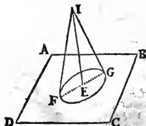
COROLLARIUM.

485. Recta igitur IE ad duas rectas KL & MN in plano ABCD perpendicularis, omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos insistit (§. 78).

SCHOLION.

486. *Hinc* linea recta *IE* ad planum *ABCD* perpendicularis *definitur, quod ad rectas omnes lineas in plano ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit.*

THEOREMA 5.



487. *Si recta IE fuerit ad planum ABCD*

ABCD perpendicularis, & ex E tanquam centro in eodem plano descriptus sit circulus; erunt rectæ IG, IF &c. ab eodem puncto sublimi ad peripheriam ductæ inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex centro E ad puncta peripheriæ F, G &c. radii EF, EG &c. erit EF = EG (§. 40), cumque anguli FEI & GEI sint recti (§. 485), etiam FEI = GEI (§. 145). Quare cum porro sit EI = EI; erit FI = GI (§. 179). *Q. e. d.*

THEOREMA 6.

488. *Ex eodem puncto E ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis EI duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia EQ & per punctum E in plano recta OP, quæ simul sit in eodem plano, in quo rectæ EQ & EI; erit cum EQ, tum EI ad eandem rectam OP perpendicularis (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 213), ex eodem puncto E nonnisi unica perpendicularis ad planum EI erigi potest. *Q. e. d.*

THEOREMA 7.

489. *Ab eodem puncto I* (Vid. Fig. 1. pag. præf.) *in sublimi dato ad idem planum ABCD perpendicularis nonnisi unica IE demitti potest.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur enim, si fieri potest, adhuc alia IG. Jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit IEG triangulum in eodem plano (§. 480). Duo igitur in triangulo ad basin anguli E & G recti sunt (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 218), a puncto I ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis demitti potest. *Q. e. d.*

THEOREMA 8.

490. *Linea perpendicularis IE* (Vid. Fig. 1. pag. præf.) *est brevissima, quæ a puncto extra planum dato ad idem duci potest.*

DEMONSTRATIO.

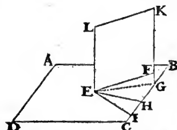
Ducatur enim recta adhuc alia IG & jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit triangulum IEG in eodem plano (§. 480) & angulus ad E rectus (§. 486). Est igitur EI $<$ IG (§. 220). *Q. e. d.*

THEOREMA 9.

491. *Si recta LE* (Vid. Fig. seq.) *duabus rectis FE & HE, vel pluribus FE, HE, IE in eodem puncto E concurrentibus perpendiculariter insistat;*





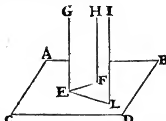


fiat; erunt duæ illæ rectæ FE & HE, *vel plures* FE, HE, IE *&c. in eodem plano* ABCD.

DEMONSTRATIO.

Duas rectas eodem in puncto concurrentes non posse non esse in plano eodem, jam supra demonstratum est (§. 481). Si vero plures fuerint FE, HE, IE &c. cum duæ quælibet eodem in plano existant (*§. cit*); sint IE & HE in plano ABCD, in ipso autem, si fieri potest, non sit recta FE, ducaturque per LE & EF planum LEFK, quod secet productum, si opus fuerit, planum ABCD secundum rectam EG. Quoniam LE perpendicularis est rectis EI & EH *per hypoth.* erit etiam perpendicularis rectæ EG (§. 484), ac proinde angulus LEG rectus (§. 78). Et quia LE, EF & EG in eodem sunt plano *per constr.* erit angulus LEF respectu anguli recti LEG pars vel totum, ac proinde minor vel major angulo recto (§. 84 *Arith.*): quod est *contra hypoth.* Cum igitur quod de recta FE demonstratum, de quacunque alia pari modo demonstrari possit, patet duas vel plures rectas, quibus recta LE in puncto concursus E perpendiculariter insistit, esse in plano eodem. *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

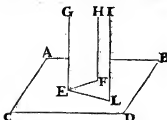


492. *Lineæ rectæ* GE & HF *eidem plano* ABDC *perpendiculares, sunt inter se parallelæ: & si una parallelarum* GE & HF *fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem perpendicularis erit altera.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta EF, & cum GE perpendicularis sit ad planum ABDC *per hypoth.* insistet ea rectis EF & EL in plano isto ductis ad angulos rectos (§. 486). Sumatur EL = EF & moveatur GE juxta ductum rectæ EL, donec in L perveniat, ita ut rectæ EL semper inhæreat ad angulum rectum; erit LI perpendicularis ad EL (§. 78) & ipsi GE parallela (§. 256). Moveatur recta EL cum sua perpendiculari LI, donec ipsi EF congruat (§. 168), consequenter punctum L in F cadat (§. 3). Quoniam LI rectæ EL est perpendicularis *per demonstrata*, ad idem vero punctum F ejusdem rectæ EF nonnisi unica recta perpendicularis esse potest (§. 213); etiam recta LI cadet in rectam FH, ideoque HF erit ad EF perpendicularis, consequenter HF & GE inter se parallelæ. *Quod erat unum.*

Sint jam GE & HF inter se parallelæ



lelæ & GE ad planum perpendicularis. Patet, ut ante, si ponatur perpendicularis ad rectam EL, eam etiam perpendicularem esse debere ad EF. Ad eandem EF igitur etiam perpendicularis est HF (§. 230), consequenter HF perpendicularis ad planum ABDC (§. 486). *Quod erat alterum.*

Corollarium.

493. Rectæ igitur omnes ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares, etiam ad planum ABDC perpendiculares sunt.

Scholion.

494. *Hinc* Euclides planum *definit* ad planum rectum *sive* perpendiculare, *cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum* ABDC *&* GEFH *sectioni* EF *perpendiculares ducuntur in planorum uno* GEFH, *rectæ sunt alteri plano* ABDC.

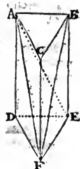
Theorema 11.

495. *Rectæ* AB *&* EF, *quæ sunt eidem rectæ* CD *parallelæ, non tamen in eodem cum ipsa plano, sunt inter se parallelæ.*

Demonstratio.

Ad rectam CD ex quovis puncto H excitetur in plano parallelarum CD & AB perpendicularis HG, atque eodem ex puncto in plano parallelarum CD & EF perpendicularis altera HI, junganturque puncta I & G recta IG; erit triangulum GHI eodem in plano (§. 480), & CD ad planum hoc perpendicularis (§. 484. 486). Quoniam AB & EF parallelæ sunt rectæ CD *per hypoth.* erunt & ipsæ perpendiculares ad planum GHI (§. 492) ac proinde inter se parallelæ (§. *cit.*). *Q. e. d.*

Theorema 12.

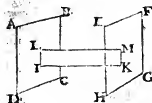


496. *Si duæ rectæ* AC *&* CB *fuerint parallelæ duabus rectis* DF *&* FE, *etiamsi non sint in eodem plano; anguli, quos comprehendunt, æquales sunt.*

Demonstratio.

Fiat CB = FE & CA = FD. Quoniam CB parallela ipsi FE, & CA parallela ipsi FD *per hypothesin*; erit BE ipsi CF, & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 257), consequenter BE parallela (§. 495) & æqualis (§. 87 *Arith.*) ipsi AD, ideoque AB parallela & æqualis ipsi DE (§. 257). Est igitur angulus DFE = ACB (§. 204). *Q. e. d.*

Theorema 13.



497. *Si recta IK duobus planis ABCD & EFGH fuerit perpendicularis; erunt plana inter se parallela.*

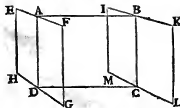
DEMONSTRATIO.

Erigatur in plano ABCD perpendicularis quæcunque LM (§. 502), quæ plano EFGH in M occurrit. Cum etiam recta IK ad planum ABCD sit perpendicularis *per hypoth.* est LM ad IK parallela (§. 492), consequenter plano EFGH ad angulos rectos insistit (§. *cit.*). Quamobrem si puncta L & I recta LI, puncta vero M & K recta MK jungantur; erunt rectæ LI, MK perpendiculares ad parallelas LM, IK (§. 486), consequenter LM = IK (§. 238). Cum eodem modo demonstretur perpendicularem de quovis alio puncto plani ABCD eductam, perpendicularem etiam esse plano EFGH, & æqualem ipsi IK; plana ABCD & EFGH ubivis a se invicem eodem intervallo distare (§. 225) patet. Sunt igitur inter se parallela.

SCHOLION.

498. *Nimirum* planum *ABCD* alteri *EFGH dicitur* parallelum, *perinde ac recta alteri rectæ parallela est* (§. 81), *si ubivis eandem ab eodem distantiam servat.*

THEOREMA 14.

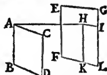


499. *Si planum ADCB secet duo plana parallela EFGH & IKLM; erunt sectiones AD & BC inter se parallelæ.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim sectiones AD & BC non esse inter se parallelas; ergo continuatæ alicubi concurrent (§. 81. 83). Cum igitur, si plana cum ipsis continuentur, totæ in iisdem sint (§. 478); ipsa quoque plana EFGH & IKLM concurrent. Parallela igitur non sunt (§. 498): quod cum sit absurdum, sectiones AD & BC planorum parallelorum EFGH & IKLM parallelæ sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 15.



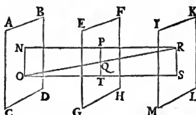
500. *Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes AC & AB duabus aliis se mutuo tangentibus EG & EF fuerint parallelæ; etiam plana ACDB & EGLF, per ipsas ducta, erunt parallela.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AH ad planum EGLF recta, & ex H ducantur HK ac HI rectis EF atque EG parallelæ (§. 258); erunt eædem HK & HI etiam parallelæ rectis AB & AC (§. 495), & AH ad HK & HI perpendicularis (§. 486). Perpendicularis igitur AH etiam perpendicularis est ad AB & AC (§. 230), ideoque ad planum ABDC (§. 484. 486), consequenter planum ABDC parallelum plano EFLG (§. 497). *Q. e. d.*

THEO-

Theorema 16.

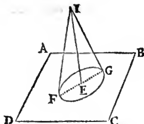


501. *Duæ lineæ rectæ NR & OS a planis parallelis ABDC, EFHG, IKLM proportionaliter secantur, ut nempe sit* RP:PN = ST:TO.

Demonstratio.

Jungantur puncta sectionum N & O, R & S rectis NO & RS, ducaturque recta OR; erit triangulum NOR & similiter triangulum OSR in eodem plano (§. 480) & PQ parallela ipsi NO, QT vero parallela ipsi RS (§. 499). Est igitur RQ:QO = RP:PN, & RQ:QO = ST:TO (§. 268), consequenter RP:PN = ST:TO (§. 167 *Arith.*). *Q.e.d.*

Problema 1.



502. *Ad datum planum ABCD in dato puncto E erigere perpendicularem EI.*

Resolutio.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABCD intervallo quocunque EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI ea lege, ut punctum I quodcunque a peripheriæ punctis quibuscunque F & G æqualiter distet: erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 487).

Corollarium 1.

503. Cum triangulum IEG & quodcunque eodem modo determinatum, veluti IEF, sit rectangulum; evidens est, si crus unum normæ ita ad EG vel EF applicetur, ut vertex anguli recti, quem crura comprehendunt, sit in centro E, fore crus alterum ad planum ABCD in dato puncto E perpendiculare: ut ideo pateat normæ usus in erigendis perpendicularibus ad planum datum in puncto dato.

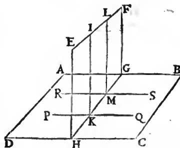
Scholion.

504 *Necesse est ut normæ crura non desinant in aciem tenuem, sed aliquam habeant latitudinem, ne norma ad rectam EG applicata sit ad planum recta, nec oculorum judicium fallat.*

Corollarium 2.

505. Quodsi punctum I extra planum detur, norma super plano erecta, huc illucve promovenda, donec crus erectum idem attingat, si e puncto I perpendicularis IE demittenda. Quodsi crus normæ brevius sit, quam ut punctum I attingere possit, cum filo ex puncto I extenso idem coincidere debet.

Theorema 17.



506. *Si in plano EFGH una recta*

cta EH est ad planum ABCD perpendicularis; omnis recta IK vel LM, ad sectionem HG perpendicularis, est ad planum perpendicularis.

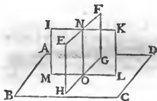
DEMONSTRATIO.

Quoniam recta EH est ad planum perpendicularis *per hypoth.* erit simul perpendicularis ad rectam HG (§. 486). Enimvero etiam IK vel LM perpendicularis est ad HG *per hypoth.* & præterea cum EH in eodem est plano EFGH. Igitur IK vel LM parallela est ipsi EH (§. 256), consequenter perpendicularis ad planum ABCD (§. 492). *Q. e. d.*

SCHOLION

507. *Coincidit hoc theorema cum corollario theorematis* 10 (§. 493.): *unde definitionem plani perpendicularis ad alterum deduximus.*

THEOREMA 18.

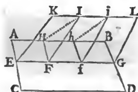


508. *Sectio NO duorum planorum EFGH & IKLM ad idem tertium ADCB perpendicularium est ad idem planum perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendiculare *per hypoth.* ex puncto O duci poterit in plano EFGH recta ad planum ADCB perpendicularis (§. 506). Eodem modo patet, ex eodem puncto O duci posse rectam intra planum IKLM ad planum ADCB perpendicularem. Quare cum ad idem punctum O eidem plano ADCB nonnisi unica perpendicularis insistere possit (§. 488), communis autem planorum IKLM & EFGH sectio NO nonnisi unica recta sit (§. 482); sectio hæc communis NO erit illa perpendicularis, quæ in utroque plano EFGH & IKLM ad planum ADCB duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA 19.



509. *Plani KLGE ad planum ABDC in omnibus punctis F, f &c. inclinatio eadem.*

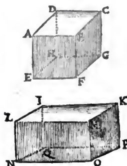
DEMONSTRATIO.

Erigantur ex punctis F & *f* perpendiculares FH & *fh* in plano ABDC & aliæ FI & *fi* in plano EKLG (§. 212), fiatque HF = *hf* & FI = *fi*; erunt HF & *hf*, itemque FI & *fi* parallelæ (§. 256), consequenter etiam H*h* & I*i* parallelæ ipsi F*f* & H*h* = F*f*, itemque I*i* = F*f* (§. 257), ideoque etiam H*h* parallela ipsi I*i* (§. 495) & H*h* = I*i* (§. 87 *Arith.*). Quoniam itaque HI & *hi* inter se parallelæ atque æquales sunt (§. 257); erunt anguli F & *f* æquales (§. 204), ideoque inclinatio plani ad idem planum in singulis punctis eadem (§. 476). *Q. e. d.*

CAPUT III.

De Solidorum Constructione.

PROBLEMA 2.



510. *Cubum ADCBFEHG vel parallelepipedum IKMLNQPO in plano describere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur pro cubo rhombus DABC (§. 340), pro parallelepipedo rhomboides IKML (§. 341).
2. Construantur porro pro cubo quadratum AEFB & rhombus BCGF (§. 338. 340), pro parallelepipedo rectangulum LMON, cujus latus LN altitudini æquale, & rhomboides MKPO (§. 339. 341).

Cum rhombi pro quadratis, & rhomboides pro rectangulis construantur, ut plana lateralia FBCG & MKPO videri possint; erit solidum AG cubus (§. 459): solidum vero LP parallelepipedum (§. 462).

PROBLEMA 3.

511. *Prisma ACB FDE in plano describere.*



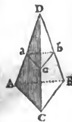
RESOLUTIO.

1. Describatur basis, e. gr. triangulum ACB, si prisma fuerit triangulare.
2. In A excitetur perpendicularis ad AB altitudini æqualis AE (§. 249).
3. Construantur parallelogramma ACDE, BCDF (§. 341).

Erit ACBFDE prisma triangulare (§. 456. 457).

PROBLEMA 4.

512. *Pyramidem DACB in plano describere.*



RESOLUTIO.

1. Describatur basis, e. gr. triangulum ACB, si triangularis fuerit, ita tamen ut latus AB, tanquam a facie aversum, non exprimatur.
2. Super AC & CB construantur triangula ADC & CDB in puncto D coeuntia, seu assumto vel determinato puncto D, ducantur rectæ AD, CD, BD.

Erit DACB pyramis triangularis (§. 472).

PRO-

PROBLEMA 5.

513. *Rete describere, ex quo cubus construi possit.*

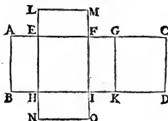
RESOLUTIO.

1. In rectam AB latus cubi quater transferatur.
2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI æqualis (§. 249) & parallelogrammum ACDB compleatur (§. 339).
3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M & O.
4. Denique ducantur rectæ IK, LM & NO, producanturque IK & LM utrinque in E & F atque in G & H, donec fiat EI = IK = KF & GL = LM = MH & agantur rectæ EG, FH.

DEMONSTRATIO.

CK & AI ad AC perpendiculares sunt *per constr.* & AI = CK = AC *per constr.* Ergo ACKI quadratum (§. 338). Non absimili modo ostenditur esse IKML, MLNO &c. quadrata ipsi AK æqualia. Est itaque ADFG rete, ex quo cubus construi potest (§. 460). *Q. e. d.*

PROBLEMA 6.



514. *Rete describere, ex quo parallelepipedum construi potest.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

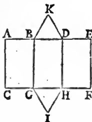
1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo, ex I in K iterum latitudo, & ex K in D longitudo parallelepipedi.
2. Super his lineis tanquam basibus construantur parallelogramma AH, EI, FK & GD, quorum communis altitudo AB altitudini parallelepipedi æqualis.
3. Super EF vero & HI construantur parallelogramma EM & HO, quorum altitudo EL & HN latitudini parallelepipedi æqualis (§. 339).

Quoniam AEHB = GFIK, EHIF = GCDK, ELMF = HNOI (§. 383); ex hoc reti parallelepipedum construere licet (§. 463. 464). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA 7.

515. *Rete pro prismate describere.*

RESOLUTIO.



1. Construatur basis prismatis, e. gr. pro triangulari triangulum KBD.
2. Continuetur latus BD in A & E, donec fiat AB = BK & DE = DK.
3. Super AB, BD & DE construantur parallelogramma AG, BH, DF, quorum altitudo AC altitudini prismatis æqualis (§. 339).

4. Denique ſuper GH triangulum GIH, ipſi BKD æquale (§. 205). Ex hoc reti priſma triangulare, nec abſimili modo multangulare quodcunque conſtruetur (§. 457).

Theorema 20.

516. *Superficies cylindri recti ſecluſis baſibus æqualis eſt rectangulo ſub peripheria & altitudine cylindri.*

Demonstratio.

Concipiatur arcus EF adeo parvus ut pro linea recta haberi poſſit, ducanturque rectæ EG & FH inter ſe parallelæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam arcus EF ipſi GH parallelus (§. 465); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipſi EGHF æqualia, reſolvitur, quorum communis altitudo eſt EG ſeu altitudo cylindri (§. 229), baſes vero junctim ſumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis eſt rectangulo ſub peripheria & altitudine cylindri (§. 388). *Q. e. d.*

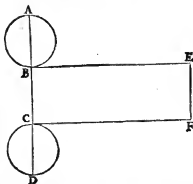
Scholion.

517. *Nimirum arculus in quolibet caſu tam exiguus aſſumitur, ut, ſi ejus differentiale multiplicari ſupponatur per numerum partium, in quas peripheria concipitur diviſa, prodeat particula in dato caſu inaſſignabilis, ideoque contemptibilis parvitatis: quod fieri poſſe patet, quod polygonum circulo inſcriptum continuo appropinquat ad peripheriam. Et idem tenendum eſt in aliis caſibus, ubi de infinite parvo ſermo fuerit. Sed ex inſtituto ea de re diximus in Philoſophia prima.*

Problema 8.

518. *Rete pro cylindro deſcribere.*

Resolutio.



1. Eadem diametro deſcribantur circuli AB & CD.
2. Inveniatur horum peripheria (§. 429).
3. Super BC altitudini cylindri æquali conſtruatur rectangulum (§. 339), ita ut CF ſit peripheriæ inventæ æqualis.

Ex hoc reti conſtrui poteſt cylindrus (§. 516).

Theorema 21.

519. *Superficies coni recti ſecluſa baſi æqualis eſt triangulo, cujus baſis peripheria, altitudo latus coni.*



Demonstratio.

Sit arcus LM infinite parvus, ideoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recte habe-

habebitur: cumque angulus K sit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 240), estque ideo KM ad LM perpendicularis (§. 78), consequenter trianguli KML altitudo (§. 228). Sed coni recti superficies in innumera istiusmodi triangula inter se æqualia resolvitur (§. 467. 251). Ergo integra coni recti superficies æqualis est triangulo, cujus altitudo lateri, basis peripheriæ coni æqualis (§. 389). *Q. e. d.*

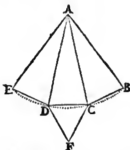
COROLLARIUM.

520. Quoniam superficies cuni recti æquatur sectori circuli latere coni tanquam radio descripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (§. 415), peripheriæ vero sunt inter se ut radii (§. 412); peripheria baseos seu, quod idem est, arcus sectoris ad peripheriam sui circuli eam habet rationem, quam radius basis ad latus coni.

PROBLEMA 9.

521. *Rete pro pyramide describere.*

RESOLUTIO.



Sit e. gr. construenda pyramis triangularis.

1. Radio AB describatur arcus BE & ei applicentur tres chordæ BC, CD & DE inter se æquales.
2. Super DC construatur triangulum æquilaterum DFC, ducanturque rectæ AD & AC.

Ex hoc reti pyramis construi potest (§. 472).

SCHOLION.

522. *Si latera basis pyramidis DC, CF & DF inæqualia fuerint; evidens est fieri debere ED=DF & CB=CF. Nec ideo latet, quid factu opus sit, si basis fuerit polygonum sive regulare, sive irregulare.*

PROBLEMA 10.

523. *Rete pro Cono recto describere.*

RESOLUTIO.

1. Diametro basis AB describatur circulus & diameter producatur in C, donec AC lateri coni æqualis fiat.
2. Quæratur ad 2 AC & AB in numeris determinatas, atque 360° numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arith.*).
3. Radio CA ex centro C describatur arcus DE & ope instrumenti transportatorii fiat angulus DCE, consequenter arcus DE (§. 57) numero graduum invento æqualis.

Erit sector CDE cum circulo AB rete pro cono recto (§. 520).

COROLLARIUM.

524. Quodsi ex A in F transferatur latus coni truncati & radio CF arcus GH describatur, tandemque ad 360°, numerum graduum arcus GH atque FC numerus quartus proportionalis quæratur, & inde diameter circuli IF determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Est enim CDBAE rete pro cono integro, CGFIH pro cono abscisso (§. 523). Ergo DBEHIG pro truncato.

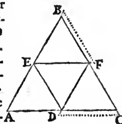
PRO-

Problema 11.

525. *Rete pro Tetraedro describere.*

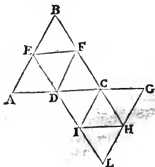
Resolutio.

1. Coſtruatur triangulum æquilaterum DEF (§. 198).
2. Super ſingulis ejus lateribus conſtruantur adhuc alia itidem æquilatera DAE, EBF & FCD (*§. cit.*).



Ex hoc reti tetraedrum conſtrui poteſt (§. 475).

Corollarium.

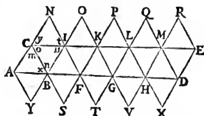


526. Quodſi BC continuetur in H, donec fiat CH = FC, &, ut in reſolutione problematis, conſtruantur triangula æquilatera CHI, CGH, HLI, DCI (§. 198); ex reti octaedrum conſtrui poteſt (§. 475).

Problema 12.

527. *Rete pro Icoſaedro deſcribere.*

Resolutio.



1. Conſtruatur triangulum æquilaterum ABC (§. 198).
2. In baſi AB continuata fiat AB = BF = FG = GH = HD.
3. Per C agatur ipſi AB parallela CE (§. 258) & fiat AB = CI = IK = KL = LM = ME.
4. Ducantur rectæ CS per C & B, NT per I & F, OV per K & G &c.
5. Similiter ducantur aliæ rectæ YO per B & I, SP per F & K, TQ per G & L &c.

Dico ex hoc reti conſtrui poſſe Icoſaedrum.

Demonstratio.

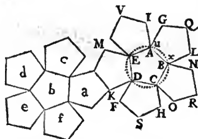
Demonſtrandum eſt, viginti triangula AYB, ABC, CBI, CIN, BSF, BFI, IFK, IKO &c. æquilatera & inter ſe æqualia eſſe (§. 475): id quod ſequenti ratione patescit. Quoniam AB parallela & æqualis ipſi CI *per conſtruct.* atque etiam AC æqualis & parallela ipſi BI (§. 257); erit $o = x$ & $m = n$ (§. 233), conſequenter △ CAB = & ∽ △CBI (§. 251). Eodem modo oſtenditur eſſe △ CBI = & ∽ △BIF = & ∽ △FIK &c. Porro quoniam CI & BF ſunt inter ſe æquales atque parallelæ *per conſtr.* erit

rit NT parallela ipſi CS (§. 257), ideoque $y = u$ & $i = o$ (§. 233), conſequenter ΔCIN=&∽ΔCBI (§. 251). Eodem modo oſtenditur eſſe ΔCBI =&∽ΔIOK=&∽ΔKPL &c.=& ∽ΔAYB=&∽ΔBSF=&∽ΔFTG &c. Sunt itaque omnia triangula inter ſe æqualia & æquilatera. *Q. e. d.*

PROBLEMA 13.

528. *Rete pro Dodecaedro deſcribere.*

RESOLUTIO.



1. Deſcribatur pentagonum regulare ABCDE (§. 352).
2. Applicata regula ad A & D ducantur rectæ AG & DF ipſi AB æquales.
3. Eodem modo ducantur AI & HC, BL & KD, BN & EM &c.
4. Intervallo lateris pentagoni fiat interſectio in Q ex G & L, in R ex N & O, in S ex H & F &c. ducanturque GQ & QL, NR & OR, HS & FS &c.
5. Eodem modo conſtruantur pentagona reliqua a, b, c, d, e, f.

DEMONSTRATIO.

Demonſtrandum eſt pentagona omnia eſſe regularia ipſique ABCDE æqualia (§. 475). Nimirum AB=GA =BL=GQ=QL *per conſtr.* Cumque anguli x menſura ſit arcus dimidius ABCD (§. 324), anguli vero pentagoni E ſimiliter ſit menſura dimidius arcus ABCD (§. 314); erit angulus x angulo pentagoni E æqualis (§. 141). Et quoniam eodem modo oſtenditur, eſſe quoque angulum u angulo pentagoni æqualem; erit ABLQG pentagonum regulare (§. 352), idque, ob latus commune AB, ipſi AEDCB æquale (§. 177. 161). Eadem demonſtratio cum de reliquis pentagonis valeat; evidens eſt, omnia & regularia, & inter ſe æqualia eſſe. *Q. e. d.*

PROBLEMA 14.

529. *Corpora Geometrica conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Delineentur retia in charta ex pluribus foliis compacta (§. 513 & ſeqq.).
2. Delineata exſcindantur, reſecta charta ſuperflua juxta eorum perimetros.
3. Exſciſſa agglutinentur chartæ coloratæ.
4. Hujus ſuperfluum ita reſecetur, ut partibus perimetri alternis margines quidam relinquantur, quemadmodum videre eſt in figura pro reti tetraedri, quæ eſt prima pag. præc.
5. Singula retium intra perimetrum lineamenta, e. gr. EF, FD & DE in reti tetraedri, ſcalpello profundius imprimantur, ut commode complicari queant latera perimetri ſolidi.

6. De-

6. Denique retia complicentur & marginum ope conglutinentur.

THEOREMA 22.

530. *Tetraedrum, Octaedrum, Icosaedrum, Cubus & Dodecaedrum sunt corpora regularia, nec præter hæc quinque aliud possibile.*

DEMONSTRATIO:

Tetraedrum quatuor, Octaedrum octo, Icosaedrum viginti triangulis regularibus, Cubus sex quadratis, Dodecaedrum denique duodecim pentagonis regularibus inter se æqualibus terminatur (§. 460. 475). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 453). *Quod erat unum.*

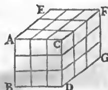
In Tetraedro tres, in Octaedro quatuor, in Icosaedro quinque anguli plani trianguli regularis ad solidum efficiendum concurrunt (§. 525. 526. 527). Quoniam vero summa 6 istiusmodi angulorum est 360° (§. 243); triangulis regularibus nullum corpus præter illa tria contineri potest (§. 452). In Cubo tres anguli quadrati solidum efficiunt (§. 513). Quare cum summa quatuor istiusmodi angulorum sit 360° (§. 98. 144); quadratis nullum corpus continetur nisi Cubus. In Dodecaedro tres anguli pentagoni regularis solidum constituunt (§. 528). Quia vero summa quatuor est 432°, & summa trium in exagono regulari est 360°, atque in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 345), ad angulum vero solidum constituendum minimum tres plani requiruntur (§. 447); pentagonis regularibus nonnisi Dodecaedrum, figuris vero plurium laterum nullum corpus terminari potest. Corpora igitur regularia nonnisi quinque sunt. *Quod erat alterum.*

CAPUT IV.

De Dimensione Solidorum.

PROBLEMA 15.

531. *Superficiem ac soliditatem Cubi determinare.*



RESOLUTIO.

1. Cum superficies cubi ex sex quadratis æqualibus componatur (§. 460); latus cubi in seipsum ducatur & factum per 6 multiplicetur (§. 370).
2. Quodsi idem factum in latus ducatur: prodibit soliditas cubi.

E. gr.

Sit e. gr. latus cubi AB $2^{0}\,7'\,4''$.

```
AB = 2 7 4              Basis = 7 5 0 7 6
     2 7 4              AB    =     2 7 4
   -------              -----------------
   1 0 9 6                     3 0 0 3 0 4
 1 9 1 8                     5 2 5 5 3 2
 5 4 8                     1 5 0 1 5 2
 -------                -------------------
ABDC = 7 5 0 7 6        Solid. 2 0° 5 7 0' 8 2 4''
               6
 ---------
Superf. 4 5° 0 4' 5 6''
```

DEMONSTRATIO.

Cum mensuræ solidorum sint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c, æqualia (§. 477); soliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodsi jam latus in partes quotcunque æquales divisum concipiamus; tot erunt cuborum ordines, quot in latere AB partes, & in quolibet ordine totidem existent, quot in basi ACFE quadrata. Quare si basin ACFE, hoc est, factum ex latere cubi in seipsum (§. 370), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

532. Si latus cubi fuerit 10; erit soliditas 1000: si illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum sit 10 pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 25); pertica cubica est 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo nostro soliditas cubi est $20^{0}570'824''$. Similiter cum pertica Rhenana sit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica est 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare si in nostro exemplo 20570824 dividas per 1728; quotus erit 11904' & 712''. Quodsi 11904' porro dividas per 1728; quotus erit 6^{0} & 1536', ideoque habebis 6^{0}, 1536' & 712''.

SCHOLION.

533. *Patet ideo, quantum divisio mensuræ in 10 partes præstet divisione in 12.*

COROLLARIUM 2.

534. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (§. 259 *Arithm.*) & æquales, si latera æqualia sint.

THEOREMA 23.

535. *Parallelepipeda, Prismata & Cylindri, quorum bases & altitudines æquantur, æqualia sunt.*

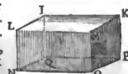
DEMONSTRATIO.

Concipiantur hæc corpora planis eorum basibus parallelis secari in discos crassitiei quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur *per hypoth.* ex uno tot disci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana sectionum basi parallelarum eidem æqualia (§. 463. 458. 466), bases vero illorum corporum inter se æquales sint *per hypoth.* etiam disci singuli unius corporis discis singulis alterius æquantur (§. 87 *Arith.*), consequenter cum disci omnes simul sumti cum corporibus idem sint, corpora tota inter se æqualia sunt (§. 88 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 16.

536. *Metiri superficiem ac soliditatem parallelepipedi.*

RESOLUTIO.



1. Quæratur area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 375. 387).
2. Addantur in unam summam &

 hæc

hæc multiplicetur per 2. Erit factum superficies parallelepipedi (§. 464).

3. Quosi basis ILMK multiplicetur per altitudinem; prodibit soliditas ejusdem.

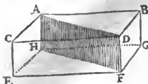
Sit e. gr. LM = 36′, MK = 15′, MO = 12′, & parallelepipedum rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIKM 540	LMON 432	MOPK 180
MO 12	LIKM 540	
	MOPK 180	
1080	1152	
54	2	
Solid. 6°480′	23°04′ Superficies.	

D E M O N S T R A T I O.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonstratio, qua in problem. 15 (§. 531) usi sumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 535); ducta basi in altitudinem habetur quoque soliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

T H E O R E M A 24.



537. *Planum diagonale AHFD dividit parallelepipedum ABDCEFGH in duo prismata ADCEFH & ADBGFH inter se æqualia.*

D E M O N S T R A T I O.

Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia ACD & DBA (§. 337). Habent ergo prismata bases æquales. Quare cum planum ABDC sit parallelum plano HGFE (§. 462. 456); eadem quoque erit utriusque altitudo (§. 498), & ipsa itidem æqualia sunt ((§. 535). *Q. e. d.*

C O R O L L A R I U M.

538. Est ergo prisma triangulare dimidium parallelepipedi super dupla basi, sed ejusdem altitudinis.

P R O B L E M A 17.

539. *Metiri superficiem ac soliditatem prismatis.*

R E S O L U T I O.



1. Quæratur basis (§. 392. 400. 402), & multiplicetur per 2.
2. Quærantur porro areæ parallelogrammorum prisma circumcirca terminantium (§. 370. 375. 387), & earum summa addatur facto antecedenti.

Ita prodibit superficies integra prismatis (§. 457).

3. Quodsi basis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem soliditas.

E. gr.

E.gr. Sit BC = 4°3'2'', AG = 3°5'7'', CD = 8°6'9''

```
½BC = 2 1 6''
 AG = 3 5 7
-------------
     1 5 1 2
   1 0 8 0
   6 4 8
-------------
Basis 7 7 1 1 2''
CD        8 6 9
-------------
   6 9 4 0 0 8
 4 6 2 6 7 2
6 1 6 8 9 6
-------------
6 7°0 1 0'3 2 8'' Soliditas.
```

```
        AC = 4 3 2'
        CD = 8 6 9
-------------------
         3 8 8 8
       2 5 9 2
     3 4 5 6
-------------------
ACDE 3 7 5 4 0 8
-------------------
     1 1 2 6 2 2 4
2ABC   1 5 4 2 2 4
-------------------
Superfic. 1 2 8°0 4'4 8''
```

D E M O N S T R A T I O.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 538). Quodsi vero dupla basis, hoc est, parallelogrammum multiplicetur per altitudinem; soliditas parallelepipedi prodit (§. 536). Ergo si simpla, hoc est, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc est, prismatis soliditas habetur. Omnia prismata reliqua cum in triangularia resolvi possint; eorum quoque soliditas prodit, basi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

S C H O L I O N.

540 *In exemplo nostro assumsimus, prismatis basin esse triangulum regulare. Quodsi vero basis fuerit figura irregularis; parallelogramma lateralia inæqualia sunt, idemque area uniuscujusque sigillatim invenienda.*

P R O B L E M A 18.

541. *Data diametro AB & altitudine cylindri CF, invenire superficiem ac soliditatem ejus.*



R E S O L U T I O.

1. Quæratur peripheria baseos & basis ipsa (§. 429), hæcque multiplicetur per 2.
2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit est superficies seclusis basibus (§. 516).
3. Quare si eidem addatur factum antecedens; habebitur superficies integra.
4. Ducatur quoque basis in altitudinem. Factum erit soliditas cylindri.

E. gr. Sit AB = 5°6', CF = 24°6'; erit peripheria = 1 7 5 8 4'''

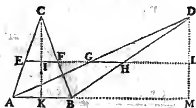
```
peripheria = 1 7 5 8 4'''
        CF =     2 4 6 0 0'''
-----------------------------
         1 0 5 5 0 4 0 0
         7 0 3 3 6
       3 5 1 6 8
-----------------------------
Sup.absque Baf. 4 3 2 5 6 6 4''|00
Dupl. Baf.       4 9 2 3 5 2
-----------------------------
Superfic.       4 8 1°8 0'1 6''

Basis = 2 4 6 1 7 6''
CF =          2 4 6 0''
-----------------------------
     1 4 7 7 0 5 6 0
     9 8 4 7 0 4
   4 9 2 3 5 2
-----------------------------
Solidit. 6 0 5°5 9 2'9 6 0''
```

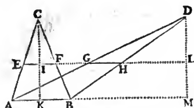
D E M O N S T R A T I O.

Cum circulus æqualis sit triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius (§ 410); cylindrus æqualis erit prismati triangulari eandem cum ipso altitudinem & basin æqualem habenti (§. 535). Ejus ergo soliditas habetur, ducta basi in altitudinem (§. 339). *Q. e. d.*

T H E O R E M A 25.



542. *Pyramides & Coni super eadem*



dem basi & ejusdem altitudinis, sunt æquales.

DEMONSTRATIO.

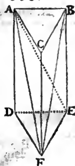
Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ADB vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipsi AB parallela (§. 258); erit IK = LM (§. 226), ideoque ob CK = DM *per hypoth.* CI = DL (§. 91 *Arith.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus secantur pyramides basibus suis parallelorum. Jam cum sit Δ CEF ∽ Δ CAB, & Δ DGH ∽ Δ DAB (§. 268); erit CI : CK = EF : AB, & DL : DM = GH : AB (§. 396). Sed CI = DL & CK = DM *per demonstr.* Ergo EF : AB = GH : AB (§. 167 *Arith.*), consequenter EF = GH (§. 177 *Arith.*). Jam si pyramides secantur planis basi parallelis; plana sectionum basi similia sunt (§. 474), consequenter planum, cujus latus est EF, erit ad basin ut EF^2 ad AB^2, & planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH^2 ad AB^2 (§. 406). Quare cum $EF^2 = GH^2$ *per demonstr.* planum, cujus latus est EF, & planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 168 *Arith.*), consequenter plana ista inter se æqualia sunt (§. 177 *Arith.*). Igitur & disci quantumlibet exiguæ crassitiei in eadem a basi distantia inter se æquantur. Quoniam itaque ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot disci secari possunt, quot ex altera; pyramis una alteri æqualis fit necesse est (§. 88 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Quodsi triangula ACB & ADB fuerint sectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum basi communi parallelorum (§. 468). Cum igitur circuli isti æquales sint (§. 171), eodem, quo ante, modo demonstratur, conos æquales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 26.

543. *Prisma triangulare in tres pyramides æquales dividi potest.*

DEMONSTRATIO.



Quoniam planum ACB parallelum plano DFE (§. 456); pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem (§. 498) atque bases ACB & DFE æquales (§. 457). Sunt ergo æquales (§. 542). Similiter cum BEFC sit parallelogrammum (§. 457); Δ CFB = Δ BFE (§. 337). Habent ideo pyramides ACBF & BEFA æquales bases. Quoniam vero hæ bases in eodem sunt plano, quod per se patet, & verticem communem in A habent, ab eodem vero puncto sublimi A ad idem planum BEFC nonnisi unica perpendicularis

ris duci potest (§. 489); pyramides istæ eandem quoque altitudinem habent, consequenter æquales sunt (§. 542). Quamobrem tres istæ pyramides inter se æquantur (§. 87 *Arith.*). *Q. e. d.*

Scholion.

544. *Si ex ligno paretur prisma & debita ratione secetur; demonstratio captui tironum magis accommodatur. Imo ad bilancem æqualitas ponderum examinari & inde magnitudinis æqualitas colligi potest.*

Corollarium 1.

545. Pyramis triangularis est tertia pars prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis.

Corollarium 2.

546. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia resolvi potest; quælibet pyramis est pars tertia prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 187 *Arith.*):

Corollarium 3.

547. Quia conus pro pyramide infinitangula haberi potest, & cylindrus pro prismate infinitangulo; conus pars tertia est cylindri super æquali basi & ejusdem altitudinis.

Problema 19.

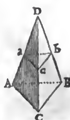
548. *Metiri superficiem ac soliditatem pyramidis & coni.*

Resolutio.

Quæratur soliditas prismatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono basin atque altitudinem habentis (§. 539. 541), inventaque per 3 dividatur: quotus erit soliditas pyramidis vel coni (§. 546. 547).

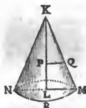
E. gr. Si soliditas prismatis fuerit 67020328''', ut in probl. 17 (§. 539); erit soliditas pyramidis 22336776'''. Si soliditas cylindri fuerit 605592960''', ut in probl. 18 (§. 541); erit soliditas coni 201864320'''.

Superficies pyramidis habetur, si tam basis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA areæ investigentur (§. 392) atque in unam summam colligantur.

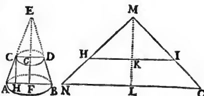


Coni denique recti superficies prodit, peripheria baseos in latus ejus dimidium ducta (§. 519), & basi, qui circulus est, eidem addita.

E. gr. Sit diameter coni NM = 56', erit peripheria 17584''', basis 246176'' (§. 429). Sit altitudo KL = 246'. Quoniam LM = ½ NM = 28' & $KM^2 = KL^2 + LM^2$ = 60516' + 784' = 61300' (§. 417); erit KM = 2475'' (§. 269 *Arith.*), consequenter superficies coni seclusa basi 2176020'', & hinc integra 2422196''.



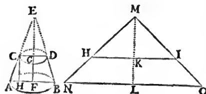
Problema 20.



549. *Metiri superficiem ac soliditatem coni truncati, datis ejus altitudine CH & diametris basium AB & CD.*

Resolutio.

1. Datis diametris basium CD & AB inve-



inveniantur peripheriæ (§. 429).

2. Ad quadratum altitudinis CH addatur quadratum differentiæ radiorum AH & ex aggregato extrahatur radix (§. 269 *Arith.*), ut habeatur latus AC (§. 417).
3. Semiſumma peripheriarum multiplicetur per latus AC: productum erit ſuperficies coni truncati.

Sit e. gr. AB = 8′, CD = 6′, CH = 10′; erit AH = 1′

1 0 0 — 3 1 4 — 8′
8
2 5 1 2‴ Periph. maj.
CH^2 = 1 0 0′
AH^2 = 1
AC^2 = 1 0 1′
Ergo AC = 1 0 0 5‴ fere.
1 0 0 — 3 1 4 — 6′
6
1 8 8 4‴ Periph. min.
2 5 1 2‴ Periph. maj.
4 3 9 6‴ Summa.
2 1 9 8‴ Semiſumma.
1 0 0 5‴ AC
1 0 9 9 0
2 1 9 8 0 0
2 2 0°8 9′9 0‴ Superfic. coni (trunc.

DEMONSTRATIO.

Superficies coni truncati relinquitur, ſi ſuperficies coni minoris ECD a ſuperficie majoris AEB ſubtrahitur. Sed ſuperficies minoris æquatur triangulo, cujus baſis HI peripheria diametro CD deſcripta, altitudo MK, latus EC; ſuperficies majoris vero triangulo, cujus baſis NO peripheria diametro AB deſcripta, altitudo ML, latus AE (§. 519). Cum vero prior ſit pars poſterioris; illa ex hac ſubtracta, relinquitur pro ſuperficie coni truncati trapezium parallelarum baſium HION, cujus quidem baſes HI & NO peripheriis diametris CD atque AB deſcriptis æquales ſunt, altitudo KL vero latus AC exiſtit. Habetur igitur ſuperficies coni truncati ſemiſumma dictarum peripheriarum in AC ducta (§. 400). *Q. e. d.*

Demiſſa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cum etiam ſit axis EF ad eandem in cono recto perpendicularis (§. 467); erunt CH & EF parallelæ (§. 256). Quamobrem cum triangulum EAF ſecet duo plana parallela CD & AB *per hypoth.* erunt ſemidiametri CG & AF parallelæ (§. 499), conſequenter CG = HF (§. 257) & CH = FG (*§. cit.*). Soliditatem igitur coni truncati inventurus

1. Inferat (§. 268): ut differentia ſemidiametrorum AH ad altitudinem coni truncati CH, ita ſemidiameter major AF ad altitudinem coni integri FE, per probl. 33 Arith. (§. 302 *Arith.*) inveniendam.
2. Ex hac inventa ſubducat altitudinem coni truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.

3. Quæ-

3. Quærat soliditatem conorum CED & AEB (§. 548).
4. Denique illam ex hac auferat; residua erit soliditas coni truncati ACDB.

E. gr. Sint omnia, ut ante; erit FE = 40', & hinc EG = 30'.

Periph. major	2512'''
$\frac{1}{4}$ AB	200'''
Basis major	502400'''
EF	4000'''
	2009600000'''
3	
Conus AEB	669866666 $\frac{2}{3}$'''
Periph. minor	1884'''
$\frac{1}{4}$ CD	150'''
	94200
	1884
Basis minor	282600'''
$\frac{1}{3}$ EG	1000'''
Conus CED	282600000
Conus AEB	669866666 $\frac{2}{3}$
Conus truncatus	387266666 $\frac{2}{3}$

THEOREMA 27.

550. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus basis æqualis superficiei, altitudo autem radio sphæræ.*

DEMONSTRATIO.

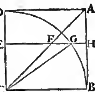
Concipiatur superficies sphæræ in quadratula infinite exigua resoluta, quæ a planis non amplius dissident, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens est sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadrangularibus in centro coeuntibus, quarum altitudines a radiis differunt quantitate inassignabili, hoc est, revera nulla, bases vero simul sumtæ superficiei sphæræ æquantur. Tota igitur sphæra recte habetur pro pyramide, cujus basis superficies, altitudo radius sphæræ. *Q. e. d.*

THEOREMA 28.

551. *Sphæra est ad cylindrum super æquali basi & ejusdem altitudinis ut 2 ad 3.*

DEMONSTRATIO.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inscripto circa latus DC gyretur; ipsum quidem cylindrum (§. 465),



quadrans hemisphærium (§. 470), triangulum conum (§. 467) describit. Altitudo horum corporum cum eadem sit, nempe DC (§. 227); si ea in discos quantumlibet exiguæ crassitiei secentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH semidiameter unius disci cylindri; erit EG semidiameter disci respondentis in hemisphærio, EF semidiameter disci in cono. Cum vero hi disci sint circuli, quod ex genesi patet (§. 131); erunt ipsi inter se ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 408), hoc est (cum sit, ob parallelismum EH & CB *per hypothesin*, EH = CB (§. 238) = CG (§. 40), atque, ob CD : DA = EC : EF (§. 268) & CD = DA (§. 98), EC = EF), ut quadrata rectarum CG, EG & EC. Quare si discum coni a disco cylindri subtrahas; relinquitur discus sphæræ (§. 417). Idem cum valeat de singulis discis ex reliquis divisionibus emergentibus; soliditas sphæræ relinquetur soliditate coni ex soliditate cylindri subducta. Est vero conus $\frac{1}{3}$ cylin-

lindri (§. 547). Ergo ſphæra duas ejuſdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA 29.

552. *Cubus diametri eſt ad ſphæram propemodum ut* 300 *ad* 157.

DEMONSTRATIO.

Si diameter ſphæræ 100; cubus ejus 1000000 (§. 531) & cylindrus eandem cum ſphæra baſin & altitudinem habens 785000 (§. 541), conſequenter ſphæra 1570000:3 (§. 551). Eſt itaque cubus diametri ad ſphæram ut 1000000 ad 1570000:3, hoc eſt, ut 300 ad 157 (§. 181. 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

553. *Dico cubum diametri eſſe ad ſphæram propemodum ut* 300 *ad* 157. *In demonſtratione enim aſſumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam* 100 : 314 (§. 426).

THEOREMA 30.

554. *Superficies ſphæræ eſt quadrupla circuli radio ſphæræ deſcripti.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ſphæra æqualis eſt pyramidi, cujus baſis eſt ſuperficies, altitudo radius ſphæræ (§. 550); ſuperficies ejus habetur, ſi ſoliditas per tertiam ſemidiametri aut ſextam diametri partem dividitur (§. 548). Eſt vero ſoliditas ſphæræ factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum (§. 551. 541). Quare ſi hoc factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividas ſeu, quod perinde eſt, primum per diametrum, ut quotus ſint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc eſt, circuli circa diametrum ſphæræ deſcripti (§. 210 *Arith.*), & deinde per $\frac{1}{6}$ (§. 208. 210 *Arith.*): erit quotus $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 243 *Arith.*), hoc eſt, quadruplus circuli maximi (§. 223 *Arith.*). Sed idem eſt ſuperficies ſphæræ *per demonſtrata*. Ergo ſphæræ ſuperficies circuli maximi quadrupla. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

555. Area circuli maximi eſt factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 429). Ergo quadruplum hujus circuli eſt factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo ſphæræ habetur, peripheria in diametrum ducta, conſequenter rectangulo æqualis eſt, cujus baſis peripheria circuli radio ſphæræ deſcripti, altitudo diameter ſphæræ (§. 375).

PROBLEMA 21.

556. *Data diametro ſphæræ, invenire ſuperficiem ac ſoliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio ſphæræ deſcribendi (§. 429).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum eſt ſuperficies ſphæræ (§. 555).
3. Hoc ſi porro multiplicetur per ſextam diametri partem; prodibit ſphæræ ſoliditas (§. 550. 548).

E. gr. Sit diameter 5600''', erit

Periph. Circuli	17584'''
Diameter	5600
	10550400
	87920
Superf. Sphær.	984704''|00
Diameter	560''
	59082240
	4923520
	551434240''

(91905706$\frac{2}{3}$'' Soliditas Sphær.

ALI-

Aliter.

1. Quæratur cubus diametri 175616000″ (§. 531).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000″ numerus quartus proportionalis 91905706$\frac{2}{3}$‴ (§. 302 *Arith.*), qui erit soliditas sphæræ (§. 552).

Scholion.

557. *Segmenta sphæræ ac sectores inferius in Analysi facilius invenire docemus, quam hoc loco fieri poterat.*

Problema 22.

558. *Metiri soliditatem ac superficiem quinque corporum regularium.*

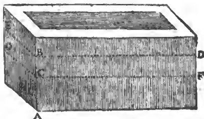
Resolutio.

Cubi soliditas investigatur per probl. 15 (§. 531). Tetraedrum cum sit pyramis & Octaedrum pyramis geminata, Icosaedrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, Dodecaedrum ex duodecim quinquangularibus constet, quarum bases in superficie Icosaedri & Dodecaedri sunt, vertices in centro coeunt (§. 472. 475); horum corporum soliditas habetur per probl. 19 (§. 548). Superficies eorundem prodit, si area figuræ unius ex terminantibus ipsa quæratur (§. 392 & 402) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro Tetraedro per 4, pro Hexaedro seu Cubo per 6, pro Octaedro per 8, pro Dodecaedro per 12, pro Icosaedro per 20 (§. 475).

Problema 23.

559. *Corporis irregularis cujuscunque soliditatem invenire.*

Resolutio.



1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo eique aqua aut arena superfundatur & altitudo aquæ seu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, observetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus basis FCGF, altitudo BC; ejus soliditas invenietur per prob. 16 (§. 536).

Sit e. gr. AB 8′, AC 5′; erit BC 3′. Sit porro DB 12′, BE 4′; erit soliditas corporis 144′.

Scholion 1.

560. *Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, e. gr. si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ut ante.*

Corollarium.

561. Inveniri ergo potest, quot linearum cubicarum sit aliquod lignum, saxum, metallum aut materia alia quæcunque, pendens libram unam.

Scholion 2.

562. *Hinc in usus futuros construi potest Tabula gravitatem diversorum corporum ostendens secundum libras, quas pendit eorum pes cubicus: id quod per*

praxes hydrostaticas aliis adhuc modis fieri potest, uti suo loco ostendemus.

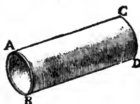
PROBLEMA 24.

563. *Invenire soliditatem corporis cavi.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si corpus cavum in numero Geometricorum non contineatur; resolutio eadem, quæ problematis præcedentis (§. 559).

Casus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, prisma, cylindrus, sphæra, pyramis vel conus; soliditas primum totius corporis cavitate inclusa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere supponitur, per methodos supra traditas (§. 536. 539. 541. 548. 556) inveniatur: hac enim ex illa subducta, relinquitur soliditas corporis cavi.



Sit e. gr. soliditas cylindri cavi ABDC invenienda, sitque diameter totius corporis AB 56'', longitudo AC 2° 4' 6''; erit soliditas cylindri inclusa cavitate 605' 592'' 960'''. Sit diameter cavitatis 500''' ; erit soliditas 482' 775'' 000''': quæ subducta ex supra inventa relinquit soliditatem corporis cavi 122' 817'' 960'''.

CAPUT V.

De Similitudine ac Ratione Solidorum.

THEOREMA 31.

564. *Corpora similia sunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & similia existunt.*

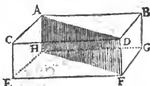
DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concursu gigni posse concipiamus; eodem modo determinantur, si plana terminantia & numero æqualia fuerint & similia (§. 119). Sunt igitur & ipsa similia (§. 120). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

565. Cum in planis similibus anguli homologi sint æquales (§. 175), anguli vero solidi homologi ex concursu planorum homologorum (§. 446) & in corporibus similibus multitudine æqualium oriantur (§. 564); in corporibus similibus anguli solidi homologi æquales sunt (§. 449).

COROLLARIUM 2.



566. Quoniam in planis similibus latera homologa sunt proportionalia (§. 175); si e. gr. juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud simile *abdcehgf* (cujus figuram non adjunximus) poni imaginemur, erit AB : BD = *ab* : *bd* & DB : BG = *db* : *bg*. Quamobrem ex æquo AB : BG = *ab* : *bg* (§. 194 *Arith.*). Cum igitur sit AB : *ab* = BD:

= BD : *bd* & AB : *ab* = BG : *bg* (§. 173 *Arith.*); corporum similium longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db*, itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione existunt.

COROLLARIUM 3.

567. Cubus sex quadratis æqualibus terminatur (§. 460). Sunt vero quadrata omnia similia (§. 98. 175). Ergo cubi omnes sunt similes (§. 564).

COROLLARIUM 4.

568. Quoniam corpora regularia planis regularibus, ideoque similibus (§. 106. 175), & ejusdem quidem speciei numero æqualibus (§. 475) terminantur; corpora quoque regularia ejusdem speciei similia sunt (§. 564).

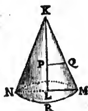
COROLLARIUM. 5.

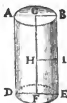
569. Omnia igitur Tetraedra, omnia quoque Octaedra, Dodecaedra & Icosaedra similia sunt (§. 475).

THEOREMA 32.

570. *Conorum & Cylindrorum similium altitudines sunt ut diametri basium; axes sunt itidem ut diametri basium, & iis sub eodem angulo junguntur.*

DEMONSTRATIO.





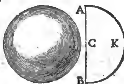
Si Coni & Cylindri similes sunt; ea in iisdem eadem sunt, per quæ a se invicem discerni possunt (§. 24 *Arith.*). Patet vero Conos & Cylindros non posse distingui nisi per rationem axis KL vel CF ad diametrum basis NM vel DE, atque per angulum KLM vel CFE, quem efficit axis cum diametro (§. 465. 467). Axes igitur in Conis & Cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent, & ad eas similiter inclinantur seu ad eundem angulum insistunt. *Quod erat unum.*

Cum in figuris solidis perinde, ac in planis (§. 227), altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in Conis & Cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 465. 467), ideoque patet *per demonstrata* altitudines tum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in ceteris altitudines in triangulis rectangulis subtendunt eosdem angulos obliquos, sub quibus nempe axes ad diametros inclinantur; ideo axibus (§. 267), consequenter etiam diametris basium (§. 167 *Arith.*) proportionales sunt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 33.

571. *Omnis sphæra est alteri similis.*

DEMONSTRATIO.



Omnem semicirculum esse alteri similem, patet ex demonstratione theorematis 1 part. 1 (§. 135). Sed sphæra describitur semicirculo AKB circa diametrum AB in gyrum acto (§. 470): omnes igitur sphæræ eodem modo determinantur (§. 119), ideoque similes sunt (§. 120). *Q. e. d.*

Theorema 34.

572. ***Omnia prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides & coni sunt in ratione composita basium & altitudinum.***

Demonstratio.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 536. 539. 541. 548 *Geom.* & §. 178 *Arith.*): ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 159. *Arith.*). *Q. e. d.*

Corollarium 1.

573. Quare si bases fuerint æquales, altitudinum; si altitudines, basium rationem habent (§. 181 *Arith.*).

Corollarium 2.

574. Cylindrorum & conorum bases sunt circuli (§. 465. 467). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 409). Ergo cylindri & coni quicunque sunt in ratione composita ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 572); & si fuerint æque alti, sunt ut quadrata diametrorum (§. 573).

Corollarium 3.

575. Quare si in cylindris & conis altitudo fuerit diametro basium æqualis; erunt tam coni quam cylindri in ratione triplicata diametrorum basium (§. 159 *Arith.*).

Problema 25.

576. ***Invenire cubum dato corpori, cujus soliditas inveniri potest, æqualem vel qui sit ad hoc in data quacunque ratione, e. gr. ut 3 ad 1, vel ut 1 ad 4.***

Resolutio.

1. Investigetur soliditas corporis per problemata *in cap. præc.* tradita.
2. Ex ea vel ejus multiplo aut submultiplo desiderato, e. gr. triplo aut subquadruplo extrahatur radix cubica (§. 282 *Arith.*), quæ erit latus cubi desiderati (§. 531 *Geom.* & §. 248 *Arith.*).

E. gr. Sit soliditas cylindri 107° 171′ 875″; reperietur latus cubi æqualis 4° 7′ 5″.

Problema 26.

577. ***Dato corpore, cujus soliditas inveniri potest, invenire dimensiones alterius ipsi æqualis dati generis & altitudinis vel baseos datæ.***

Resolutio.

1. Inveniatur soliditas corporis per problemata *in cap. præc.* tradita.
2. Dividatur per basin datam: quotus erit altitudo in prismatis, parallelepipedis & cylindris (§. 530. 536. 541 *Geom.* & §. 210 *Arith.*), tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 548 *Geom.* & §. 210 *Arith.*).
3. Si altitudo detur; soliditas corporis inventa dividatur per eam, ut habeatur basis prismatum, parallelepipedorum & cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur basis pyramidum & conorum (§§. *cit.*).
4. Pro parallelepipedis & prismatis triangularibus & multangularibus area baseos discerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo & altitudo (§. 387. 392. 402. 456. 462), quorum alteruter pro basi prismatis triangularis per 2 multiplicandus (§. 392) & insuper pro multangularis basi alter per numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 402).
5. Pro cylindro & cono ex basi inventa porro quærenda ejus diameter (§. 434).

E. gr.

E. gr. Sit soliditas alicujus corporis $3^{0}456'978''$. Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo $2^{0}4'6'$. Reperietur basis $1^{0}40'53''$ fere, diameter $134''$.

T H E O R E M A 35.

578. *Omnia prismata similia, parallelepipeda, cylindri, pyramides atque coni sunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.*

D E M O N S T R A T I O.

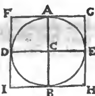
Sunt enim in ratione composita basium & altitudinum (§. 572). Sed bases sunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 406) & altitudines lateribus basium homologis proportionales sunt (§. 566). Ergo corpora ipsa in ratione triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, existunt (§. 159 *Arith.*). *Q. e. d.*

T H E O R E M A 36.

579. *Sphæræ sunt ut cubi diametrorum.*

D E M O N S T R A T I O.

Sit circulo AEB quadratum GFIH circumscriptum (§. 351). Quodsi semicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur; ille sphæram, hoc cylindrum describet, cujus altitudo AB diametro basis IH æqualis (§. 470. 465). Quare si ponamus circulum adhuc alium cum quadrato similiter circumscripto; quoniam ex theorematis 1. Part. 1. demonstratione constat (§. 135), omnem semicirculum esse alteri similem, & AB ad BH utrobique est ut 2 ad 1, ideoque rectangulum unum alteri simile (§. 175); inde generabitur sphæra & cylindrus alteri similis (§. 119. 120). Cum igitur ea utrobique coincidant, per quæ a se invicem corpora in utroque casu genita distingui debebant (§. 24 *Arith.*); erit cylindrus unus ad suam sphæram ut alter ad suam (§. 132 *Arith.*), consequenter sphæræ sunt inter se ut isti cylindri (§. 173 *Arith.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 575), hoc est, ut cubi earundem existunt (§. 259 *Arith.*). *Q. e. d.*



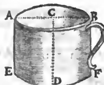
T H E O R E M A 37.

580. *Æqualia parallelepipeda, prismata, cylindri, coni & pyramides reciprocant bases & altitudines.*

D E M O N S T R A T I O.

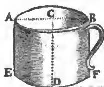
Si enim hæc corpora fuerint æqualia; facta ex basibus in altitudines æqualia sunt (§. 536. 539. 541. 548). Quamobrem altitudo corporis A est ad altitudinem alterius B uti reciproce basis ipsius B ad basin ipsius A (§. 299 *Arith.*). *Q. e. d.*

T H E O R E M A 38.





581. *Cylindrus, cujus altitudo æqua-*



qualis est diametro baseos, est ad cubum diametri propemodum ut 785 *ad* 1000.

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit basis 7850 quam proxime (§. 429). Et quoniam altitudo CD = AB *per hypoth.* soliditas cylindri fere 785000 (§. 541). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 531). Ergo Cylindrus ad cubum diametri propemodum ut 785 ad 1000 (*§.* 181 *Arith.*). *Q. e. d.*

CAPUT VI.

De Stereometria Doliorum.

PROBLEMA 27.

582. *Virgulam construere, cujus ope baud difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus, e. gr. vini, cerevisiæ &c. in vase cylindrico contenti.*

RESOLUTIO.

1. Diameter vasis cylindrici ABFE, (*Vid. Fig.* 1 & 2 *præc.*) uni mensuræ, qua ad fluida mensuranda utimur, æqualis, AB jungatur lineæ indefinitæ A7 ad angulos rectos (*§.* 249).
2. Ex A transferatur in 1 recta A1 rectæ AB æqualis; erit B1 diameter vasis, quod duas mensuras capit, sed eandem cum vase priori altitudinem habet.
3. Fiat A2 = B1; erit B2 diameter vasis tres mensuras capientis, sed ejusdem denuo altitudinis cum vase, quod nonnisi unam capit. Eodem modo inveniuntur diametri vasorum capaciorum A3, A4, A5, A6, A7 &c.
4. In unum virgulæ latus transferantur divisiones inventæ A1, A2, A3, A4 &c. in alterum vero altitudo cylindri uni mensuræ æqualis, quoties fieri potest. Ita virgula constructa est.

ALITER.

Diametri A2, A3, A4, A5, A6, A7 &c. etiam per calculum inveniri in numeris, & in particulis diametri AB per modum scalæ Geome-

metricæ divisæ (§. 277) centesimis aut millesimis determinari possunt. Sit nempe diameter AB=1000; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata (§. 269 *Arith.*), erit A2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur; prodibunt diametri A3, A4, A5 &c. quem in usum constructa est tabula sequens:

Mens.	Diam.	Mens.	Diam.	Mens.	Diam.
1	1.000	17	4.123	33	5.744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5.916
4	2.000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4.690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	39	6.244
8	2.828	24	4.898	40	6.324
9	3.000	25	5.000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	4.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4.000	32	5.657	48	6.928

DEMONSTRATIO.

Cylindri eandem altitudinem habentes sunt inter se ut quadrata diametrorum (§. 574). Ergo quadratum diametri vasis duas, tres, quatuor &c. mensuras capientis est duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vasis mensuram nonnisi unam capientis. Quare si inde radices extrahantur; habebuntur in resolutione altera diametri ipsæ (§. 246 *Arith.*). Quoniam vero in prima AB = A1; erit ipsius B1 quadratum duplum, quadratum ipsius B2 triplum, quadratum ipsius B3 quadruplum &c. quadrati ipsius A1 (§. 417). Unde denuo patet esse rectas A2, A3, A4 &c. diametros vasorum quæsitas. Quodsi itaque has divisiones ad diametrum vasis cylindrici applices; illico constabit, quot mensuras capiat vas cylindricum eandem cum isto basin, sed altitudinem illius habens, quod unam mensuram capit. Quare si porro ope alterius divisionis in virgula factæ investiges, quoties altitudo unius mensuræ in altitudine vasis dati contineatur & per hunc numerum diametrum modo inventam multiplices; prodibit numerus mensurarum cavitatem vasis dati adimplentium. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

583. *E. gr. Sit diameter vasis cylindrici* 8, *altitudo* 12; *erit numerus mensurarum, quas capit*, 96.

SCHOLION 2.

584. *Altitudo cylindri mensuram unam capientis quo minor assumitur, eo diameter basis fit major. Unde tam ipsa, quam diametri cylindrorum plures mensuras capientium postea facilius in suas minutias subdividuntur.* Bayerus (a) *suadet ut altitudo nonnisi unius digiti assumatur.*

SCHOLION 3.

585. *Inveniuntur autem diametri vasorum unam vel plures partes decimas mensuræ capientium, si decima vel plures decimæ partes vasis, unam mensuram capientis, dividantur per hujus altitudinem, ut habeatur basis cylindri circularis* (§. 541): *etenim hac data diameter habetur per probl.* 60 (§. 434). *Eodem modo inveniuntur diametri pro scrupulis vasorum duas & plures mensuras capientium.*

SCHOLION 4.

586. *Quodsi altitudo vasis constanter eadem retineatur; diametri pro mensuris integris earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit e. gr. diameter unius mensuræ* 1 *seu* 1000 *partium decimalium; erit ejus quadratum* 1000000: *cujus pars decima* 100000. *Inde extracta radix quadrata*

(a) In der vollkommenen Visierkunst, c. 25. p. 116.

316 *continet partes decimales diametri unius mensuræ, quæ conveniunt diametro cylindri decimam mensuræ partem continentis, ejusdem tamen cum cylindro integram mensuram capiente altitudinis. Si ex duplo hujus decimæ nempe* 200000 *radix extrahatur; prodit diameter vasis* $\frac{2}{10}$ *unius mensuræ capientis,* 447 *& ita porro. Quodsi quadrato diametri unius mensuræ* 1000000 *adjicias partem decimam* 100000 *& ex summa extrahas radicem quadratam* 1.049*; erit ea diameter vasis, quæ capit* $1\frac{1}{10}$ *mensuræ. Ratio patet per demonstrationem problematis præsentis. Atque sic patet, quomodo virgula pithometrica accuratius construi possit, ut intervalla inter mensuras integras subdividantur in partes decimales.*

Diametri pro menſuris integris & earum partibus decimalibus.

0.1	316	3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
2	447	1	1.761	1	2.469	1	3.016
3	548	2	1.788	2	2.489	2	3.033
4	632	3	1.816	3	2.509	3	3.049
5	707	4	1.844	4	2.529	4	3.066
6	775	5	1.871	5	2.549	5	3.082
7	837	6	1.897	6	2.569	6	3.098
8	894	7	1.923	7	2.588	7	3.114
9	949	8	1.949	8	2.607	8	3.130
		9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.371
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

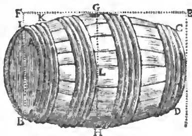
Scholion 5.

587. *Ceterum me non monente patet, cylindrorum mensuram hic constitui cylindrum, quemadmodum supra solidorum omnium mensura assumitus est cubus. Unde & virgula pithometrica sic constructa* Virga cylindrica *appellatur. Similiter hic circulorum mensura constituitur circulus, sicuti supra omnium superficierum mensura quadratum.*

Problema 28.

588. *Invenire soliditatem dolii, hoc est, determinare numerum mensurarum, quas capit.*

Resolutio.



1. Virga pithometrica vi prob. præc. (§. 582) decenter applicata, exploretur tam longitudo dolii AC, quam utraque diameter GH & AB.
2. Cum experientia non invita, rigore licet geometrico repugnante, dolium pro cylindro habeatur, cujus basis inter fundum & ventrem dolii media æquidifferens; inter **AB** & **GH** quæratur numerus medius æquidifferens (*§. 330 Arith.*), qui *diameter æquata* dici solet.
3. Numerus inventus multiplicetur per longitudinem dolii AC, erit factum *vi demonstrationis probl. præced.* (§. 582) numerus mensurarum, quas capit dolium.

Sit e. gr. AB = 8
GH = 12
erit AB + GH = 20
$\frac{1}{2}$ (AB + GH) = 10

AC = 15
$\frac{1}{2}$ (AB + GH) = 10
capac. dolii 150 menſ.

Scho-

SCHOLION 1.

589. *Quodsi contingat, fundum non esse perfecte circularem, sed unam diametrum esse altera longiorem; utramque diametrum metiri & earum semisummam pro diametro circuli fundo dolii æqualis assumere solent.*

SCHOLION 2.

590. *Tabulæ, ex quibus inter se coassatis dolia construi solent, ultra fundum prominent. Pro longitudine igitur dolii non assumenda est recta FE, sed AC, quæ habetur, si quantitas prominentiæ tabularum una cum ejus dimidio, cui fundi crassities æqualis supponitur, a recta FE utrinque subtrahitur. Solent autem quantitates subtrahendas creta notare utrinque in ipsa superficie dolii, e. gr. in K, si quantitas subtrahenda fuerit IK. Eum in finem peculiarem virgulam parant, in partes minutas æquales divisam.*

SCHOLION 3.

591. *Alios decepturi ex tabulis in medio gracilibus, circa extrema crassis & orbibus ligneis pariter crassis dolium construunt: quæ fraus non facile detegitur.*

SCHOLION 4.

592. *Possemus equidem soliditatem cavitatis dolii eodem modo explorare, quo supra corpora cava metiri docuimus (§. 563): si enim per soliditatem unius mensuræ divideretur, prodiret dolii capacitas. Enimvero prolixitas calculi obstat, quo minus ea methodo utamur.*

SCHOLION 5.

593. *Prostat etiam methodus, qua sine ullo calculo capacitas dolii invenitur. Utuntur ea in Bavaria & variis Germaniæ locis. Sed cum supponat, omnia dolia esse inter se similia & longitudinem duplam diametri æquatæ, hoc est, semisummæ diametrorum AB & GH; non tuto ubique adhibetur.* Keplerus (a) *illam omnibus reliquis præfert, quia omnes cautelas mensorum in se continet.* Virga enim, *inquit*, introrsum immissa eliminat crassitiem tabularum, circulorum, qui vincula sunt, viminumque, quibus circuli lignei stringuntur. Eliminat & excessum marginum, quorum in crenis hærent orbes. Hoc autem ratio alia mensurandi una eademque opera præstare nulla potest. *Unde ad privatorum securitatem fraudesque eliminandas suadet*, ut lex illa dolii construendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet describere circulum orbium ligneorum, magistratuum auctoritate diligentiaque conservetur, pœnisque & proscriptione vasorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur. *Ea nimirum proportio in doliis Austriacis observatur.*

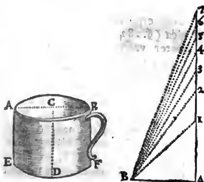
SCHOLION 6.

594. *Sunt, qui assumunt, dolium ex duobus conis truncatis componi, & ejus soliditatem per probl. 20 (§. 549) quærunt. Alii cum aliis corporibus Geometricis id comparant.* Clavius (b) *alia pro duobus conis truncatis, alia pro frusto sphæroidis Archimedeæ habet, quoad prius consentiente, quoad posterius vero contradicente* Keplero (c). Clavio *tamen assentitur* Oughtredus *eumque in finem regulam a se inventam proposuit* (d). Wallisius *pro frusto fusi parabolici habet* (e). *Enimvero cum methodus proposita praxi satis respondeat, reliquæ vero, quæ ab Anglis potissimum proponuntur (f), utut ex profundiori Geometria derivatæ, molestiores sint, nec ex Elementis Geometriæ demonstrari possint; illa contenti esse possumus. Pauca attamen adhuc dicemus de Virgæ mensoriæ a* Keplero *tantopere deprædicatæ fabrica.*

PROBLEMA 29.

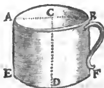
595. *Construere virgulam pithometricam, qua capacitatem dolii sine calculo explorare licet.*

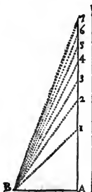
RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.



1. Cum vasa, pro quibus virga hæc paratur, esse debeant cylindri, quorum altitudo CD æqualis diame-

(a) in Stereometria doliorum vinariorum part. 3. art. 3. f. n. 3.
(b) Geom. pract. lib. 5. c. 10. Tom. II. Oper. f. 145.
(c) in Stereometria part. 2. fol. H 3.
(d) in Clave Mathematica c. 19. p. m. 101.
(e) in Algebra c. 81. Vol. II. Oper. f. 350.
(f) vid. The general Gauger by Mr. Dougharty p. 141 & seqq.





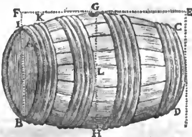
tro AB, si fiat ut 785 ad 1000 ita soliditas unius mensuræ ad numerum quartum proportionalem, per probl. 33 (§. 302 *Arith.*) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam mensuram capientis (§. 581).

2. Inde ergo si extrahitur radix cubica (§. 282 *Arith.*); prodibit diameter vasis cylindrici mensuram unam capientis.

3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE vel CD diametro AB æqualem & diagonalis BE assumatur pro indice capacitatis *per hypoth.* si ex duplo quadrati diametri modo inventæ AB extrahatur radix (§. 269 *Arith.*); prodibit index vasis BE mensuram unam capientis (§. 417).

4. Ut porro inveniantur diagonales similium vasorum, quæ capiunt mensuras duas, tres, quatuor &c. tenendum est, ea esse ut cubos diametrorum (§. 578), consequenter etiam ob similitudinem triangulorum, quale ABE (§. 183), ut cubos diagonalium (§. *cit.* & §. 260 *Arith.*). Quare si diagonalis vasis unam mensuram capientis concipiatur in 1000 partes divisa & ex cubi 1000000000 duplo 2000000000, triplo 3000000000, quadruplo 4000000000 &c. extrahantur radices cubicæ (§. 282 *Arith.*); prodibunt diagonales vasorum, quæ duas, tres, quatuor &c. mensuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis primæ transferatur in virgulam & una dividatur in 1000 partes æquales (§. 277): ita enim ex parata hac scala particulas millesimas diagonalibus reliquis competentes in virgulam transferre licet.



Quoniam itaque dolium in præsente casu habetur pro cylindro gemino, cujus altitudo æqualis est semisummæ diametrorum orbis AB & ventris GH estque $FB = \frac{1}{2}(AB+GH)$, ideoque GB diagonalis in cylindro, cujus diameter semisumma diametrorum AB & GH; capacitas ejus statim innotescit, si per orificium G virgula usque ad B detrudatur. *Q. e. i. & d.*

SCHO-

Scholion 1.

596. *Constructioni virgulæ itaque inservit Tabula sequens.*

Mens.	Diag.	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.
1	1000	16	2519	31	3141	46	3583
2	1259	17	2571	32	3174	47	3608
3	1442	18	2620	33	3207	48	3634
4	1587	19	2668	34	3239	49	3659
5	1709	20	2714	35	3271	50	3683
6	1817	21	2758	36	3301	51	3708
7	1912	22	2802	37	3332	52	3732
8	2000	23	2843	38	3361	53	3756
9	2080	24	2884	39	3391	54	3779
10	2154	25	2924	40	3419	55	3802
11	2223	26	2962	41	3448	56	3825
12	2289	27	3000	42	3476	57	3848
13	2351	28	3036	43	3503	58	3870
14	2410	29	3072	44	3530	59	3892
15	2466	30	3107	45	3556	60	3914

Scholion 2.

597. Virgula *hæc* cubica *appellari solet, quemadmodum præcedens* cylindrica. *Et facile ad alia dolia similia construitur, in quibus longitudo dimidia GF fuerit ad diametrum æquatam FB in quacunque ratione, modo in cylindro* (Vid. Fig. 1. pag. præc.) *unam mensuram capiente altitudo AE ad diametrum AB in eadem fuerit.*

Problema 30.

598. ***Virgam pithometricam construere ad determinandam quantitatem fluidi in dolio non pleno.***

Resolutio.

1. Assumatur dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita, & numerus mensurarum e. gr. per 20 aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum visum fuerit.
2. Dolio beneficio libellæ ACB ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum dolii attingat.



3. Ea quantitate fluidi ex dolio emissa, quæ numero mensurarum per divisionem paulo ante num. 1 invento respondet, in virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigesimam.
4. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigesimis quantitatis fluidi in dolio contenti respondens.
5. Horum decrementorum intervallis in una virgulæ facie notatis, altera dividitur in partes quotcunque minutas inter se æquales, ultra vigesimarum intervalla inæqualia continuandas, e. gr. in 200 aut plures.

Ita virga pro dolio non pleno metiendo constructa est.

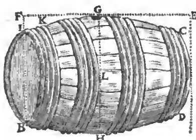
Scholion.

599. *Quodsi in usum domesticum pro eodem dolio istiusmodi virgulam parare volueris; sufficit decrementorum intervalla in una ejus facie notari, nec opus est faciei alterius in partes æquales divisione. Decrementa quoque altitudinis fluidi notantur numeris, qui quantitati ex dolio emissæ respondent, e. gr. si integrum dolium capiat 64 mensuras & una effluxerit, in fine decrementi altitudinis scribitur 63.*

Problema 31.

600. ***Determinare quantitatem fluidi in dolio non pleno.***

RESOLUTIO.



1. Investigetur capacitas totius dolii *per probl.* 28 (§. 588).
2. Dolio libellæ beneficio ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, ne scilicet fluidum in una dolii parte altius sit, quam in altera, virga per problema præcedens (§. 598) parata per orificium dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.
3. Ea rursus extracta notetur, quot partes in facie æqualium vino madidæ sint.
4. Hinc inferatur: ut numerus partium æqualium in altera virgulæ facie profunditati totius dolii GH respondentium ad numerum similium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quæ intervallo scrupulorum vigesimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem, *per probl.* 33 *Arith.* (§. 302) inveniendum.
5. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in virga, quot numerus inventus exprimit & transferatur in scalam scrupulorum vigesimorum, noteturque eorum numerus, quæ ipsi congruunt.
6. Per hunc dividatur numerus mensurarum, quas dolium integrum capit: quotus erit numerus mensurarum, quas fluidum in dolio contentum replere potest. *Q. e. i.*

E. gr. sit GH 160, HL 58, numerus partium æqualium, quæ integro scrupulorum vigesimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique dolii 128 mensurarum.

Fiat: 160 —— 58 —— 120
40) 4 3 3 x2
174 x## (43$\frac{1}{2}$
##

Ponamus partibus 43$\frac{1}{2}$ æqualibus respondere in scala inæqualium $\frac{4}{20}$ sive $\frac{1}{5}$. Quodsi itaque 128 per 5 dividas; quotus 25$\frac{1}{5}$ numerum mensurarum indicabit, quas fluidum in dolio contentum replere potest.

SCHOLION.

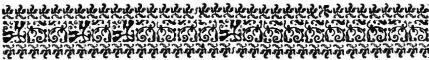
601. *Si dolia omnia essent similia, per methodum propositam satis accurate inveniretur quantitas fluidi in dolio non pleno: sed in dissimilibus eadem exacte reperiri hac ratione nequit. Nondum autem inventa est methodus, & rigori geometrico satisfaciens & praxi respondens. Quam enim* Keplerus *dedit* (a), *ea nec demostrativa, nec praxi adaptata. Unde neque ipsi satisfacit. Et quamvis aliam postea eidem substituerit* (b); *satis tamen intricata est. Intricatiores adhuc sunt, quas* Bayerus (c) *&* Dougharty (d) *tradunt.*

[a] in Stereometria Doliorum f. O 2. b.
[b] *In dem Auszuge der uhralten Messe-Kunst* Archimedis §. 18. f. 55.

[c] In Conometriæ Mauritianæ c. 9 p. 101. & seqq.
[d] The General *Gauger* p. 164. & seqq.

Finis Elementorum Geometriæ.

ELE-



ELEMENTA

TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

PRÆFATIO.



Omenti perquam exigui tironibus videtur Trigonometria, utilitatis prorsus nullius. Enimvero rerum Mathematicarum periti ore unanimi confitentur; quod sublata Trigonometria, maxima eorum pars pereat, quæ in Mathesi admiramur. Certe stellarum magnitudinem, distantiam a Terra, motum, eclipsium tam solarium quam lunarium computum, magnitudinem globi terraquei, & innumera alia prorsus ignoraremus, si nobilissimæ hujus scientiæ auxilio destitueremur. Trigonometria igitur pro arte haberi debet, qua maxime abscondita & a cognitione hominum remota in apricum producuntur. Eam qui nescit, non magnos in Mathesi mixta sentiet progressus: sæpius ipsi in Philosophia naturali hærebit aqua, e. gr. iridis phænomena ad rationes suas revocaturo aliaque meteora emphatica explicaturo. Studium igitur Trigonometriæ addiscendæ afferatur indefessum, nec impatiens sit mora, donec in partibus Matheseos subsequen-

ſequentibus ineffabilis ejuſdem uſus ex his ipſis etiam elementis pateſcat. Fides oculata impediet, quo minus in poſterum judicia de rerum uſu (quod vulgo plerumque fieri ſolet) præcipitemus. Paucis problematibus comprehendi, quæ alias per caſus plures diſtribuuntur: in elementis enim præter neceſſitatem multiplicanda non ſunt, quæ ſpinoſa videntur tironibus, nec culpatur brevitas, quæ perſpicuitati non officit, memoriæ levamen certiſſimum exiſtit. Cumque Trigonometria etiam in Geometria practica uſum habeat, quam cum theoretica conjungi conſultum duximus; ideo hunc uſum ſub finem annectere placuit.



ELE-

ELEMENTA
TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.
CAPUT PRIMUM.

De Constructione Canonis Sinuum, Tangentium, atque Secantium, tam naturalium quam artificialium.

DEFINITIO 1.

1. TRigonometria *plana* est scientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas.

E. gr. Ex duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui A & C cum latere tertio BC.

DEFINITIO 2.

2. *Sinus rectus* AD arcus AE vel AI est chordæ AB arcus dupli AEB vel AIB dimidium. *Sinus totus* est radius HC, seu sinus Quadrantis HE. *Sinus versus* est pars radii ED inter sinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM 1.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§. 291 *Geom.*): consequenter sinus omnes eidem radio insistentes inter se paralleli (§. 256 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

4. Quoniam arcus AE est mensura anguli ACE, & AI ejus contigui ACI (§. 57 *Geom.*), quadrans vero HE mensura anguli recti (§. 143 *Geom.*): AD etiam sinus rectus & ED sinus versus est angulorum ACE & ACI; sinus vero totus est sinus anguli recti.

COROLLARIUM 3.

5. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eundem habent sinum.

COROLLARIUM 4.

6. Angulorum igitur obtusorum sinus iidem sunt, quos habent eorum complementa ad duos rectos (§. 147 *Geom.*).

DE-

Definitio 3.

7. *Tangens* arcus EA est portio rectæ tangentis circulum EF inter rectas, ex centro C per extrema arcus E & A ductas, interceptæ. Recta FC dicitur *secans* ejusdem arcus.

Corollarium 1.

8. Tangens EF ad radium EC perpendicularis est (§. 308 *Geom.*).

Corollarium 2.

9. Est etiam FE tangens, & FC secans anguli ACE, itemque ACI (§. 57 *Geom.*).

Corollarium 3.

10. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eandem habent tangentem atque secantem.

Definitio 4.

11. *Cosinus* est sinus, *Cotangens* tangens, *Cosecans* secans arcus AH, qui est alterius AE complementum ad quadrantem. Ita e. gr. AG, sinus arcus AH, dicitur Cosinus arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes* atque *Secantes complementi*.

Theorema 1.

12. *Sinus arcuum similium ad radios suos eandem rationem habent.*

Demonstratio.

Chordæ enim arcuum similium ad radios eandem rationem habent (§. 290 *Geom.*). Sed sinus sunt chordarum dimidia (§. 2.). Ergo & hi ad radios rationem eandem habent (§. 181. *Arith.*). *Q. e. d.*

Hypothesis.

13. *Sumatur radius pro unitate & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas sinuum, tangentium atque secantium.*

Scholion.

14. *Ex* Ptolemæi *Almagesto discimus, veteres radium in 60 partes, quas gradus vocabant, divisisse, & inde chordas per minuta prima, secunda, tertia &c. hoc est, fractiones radii sexagesimales determinasse, quibus in analysi triangulorum utebantur. Dimidiis chordæ seu sinibus primum usi sunt, quantum constat, Saraceni.* Joannes Regiomontanus *primum radio cum veteribus tribuit* 60 *gradus & sinus singulorum graduum per ejus fractiones decimales determinavit. Enimvero postea animadvertit, commodius fore, si radius sumatur pro unitate, ac ideo hypothesin præsentem in Trigonometriam introduxit. In tabulis sinuum & tangentium ordinarie radius concipitur in* 10000000 *partes divisus, & ultra has fractiones in determinanda sinuum & tangentium quantitate non descenditur. Qui tamen tabulas istas construxerunt, ad fractiones multo minores descenderunt, ne error irreperet in scrupulis primis assignabilis. Secantibus hodie opus non habemus, cum omnia Trigonometriæ problemata absque illarum ope solvi possint.*

Corollarium.

15. Cum latus hexagoni regularis sextam circuli partem subtendat (§. 104. 342 *Geom.*) atque radio æquale sit (§. 356 *Geom.*): sinus graduum triginta est 5000000 (§. 2. *Trigon.* & §. 41. *Geom.*).

Problema 1.

16. *Dato sinu AD, invenire cosinum AG.*

Resolutio & Demonstratio.

Quoniam EC sinus ipsius EH (§. 2) ad HC, & AG sinus arcus AH (§. 2) perpendicularis ad eandem HC (§. 3); erit AG parallela ipsi DC (§. 256 *Geom.*) & ad G angulus rectus (§. 78 *Geom.*), ideoque △ AGC rectangulum (§. 91 *Geom.*). Quare cum AD & HC sint ad EC perpendiculares (§. 3); erit GC = AD (§. 226 *Geom.*). Si ergo

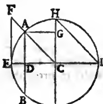
1. Ex

1. Ex quadrato radii AC subtrahatur quadratum sinus AD vel GC; relinquetur quadratum Cosinus AG (§. 417 *Geom.*). Unde si
2. Radix quadrata extrahatur (§. 269. *Arith.*); prodibit Cosinus AG.

E. gr. Sit AC 10000000, AD 5000000: reperietur AG 8660254, sinus 60°.

PROBLEMA 2.

17. *Dato sinu AD arcus AE, invenire sinum arcus dimidii ½ AE.*



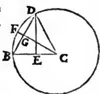
RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§. 423 *Geom.*). Hujus enim dimidium est ejus sinus (§. 2).

E. gr. Sint AC & AD ut in probl. præcedente: reperietur sinus arcus ½ AE seu sinus 15° = 2588190.

PROBLEMA 3.

18. *Dato sinu DG arcus DF, invenire sinum DE arcus dupli DB.*

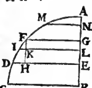


RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti sint (§. 3) & angulus B utrique triangulo BCG & DEB communis; erit BC: CG = BD:DE (§. 267 *Geom.*). Quare cum CG inveniri possit, dato sinu DG (§. 16), & BD sit duplum ipsius DG (§. 2.): invenietur quoque DE (§. 302 *Arith.*). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA 4.

19. *Datis sinibus FG & DE arcuum FA & DA, quorum differentia DF 45′ major non est, invenire sinum quemcunque intermedium IL.*



RESOLUTIO.

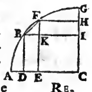
1. Quæratur ad differentiam arcuum FD, quorum sinus dantur, differentiam arcus, cujus sinus quæritur, AI atque arcus AF, sinui dato minori respondentis, IF, & differentiam sinuum datorum DH quartus numerus proportionalis (§. 302 *Arith.*).
2. Is addatur sinui dato minori FG: Erit aggregatum sinus quæsitus IL.

DEMONSTRATIO.

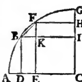
Cum arcus DF & FI paucorum sint minutorum *per hypoth.* pro lineis rectis citra errorem sensibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ sunt (§. 3). Quare si ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§. 216 *Geom.*); erit HE = FG (§. 226 *Geom.*), ideoque DH differentia sinuum datorum FG & DE (§. 64 *Arith.*). Unde ob parallelas IK & DH *per demonstrata*, DF:FI = DH:IK (§. 268 *Geom.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 5.

20. *Datis sinibus BD & FE duorum arcuum quorumcunque AB & AF, invenire sinum arcus semidifferentiæ eorundem ½ BF.*



RESOLUTIO.



1. Sinus minor BD subtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
2. Ex datis sinibus BD & FE inveniantur cosinus BI & FH (§. 16).
3. Cosinus minor FH subtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
4. Ex summa quadratorum differentiarum BK & FK extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arith.*); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium est sinus quæsitus (§. 2.). *Q. e. i.*

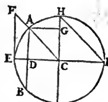
DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, tum AC, BI & FH inter se parallelæ sunt, & illæ ad AC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3), consequenter FH = KI & BD = KE (§. 226 *Geom.*) & angulus BKF rectus (§. 230. 78 *Geom.*). Quamobrem FK differentia sinuum BD & FE, BK vero differentia cosinuum FH & BI, atque FKB triangulum rectangulum (§. 91 *Geom.*). Ergo cum sit $BF^2 = FK^2 + BK^2$ (§. 417 *Geom.*); reperietur chorda BF, cujus dimidium est sinus quæsitus (§. 2), si ex summa quadratorum differentiæ sinuum FK & differentiæ cosinuum BK radix quadrata extrahitur (§. 246 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 6.

21. *Invenire sinum 45 graduum.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

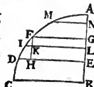


Sit HI circuli quadrans; erit HCI angulus rectus (§. 143 *Geom.*), ideoque Δ cognomine rectangulum (§. 91 *Geom.*), consequenter $HI^2 = HC^2 + CI^2$ (§. 417 *Geom.*) $= 2 HC^2$ (§. 40. 374 *Geom.*). Quare cum HC sinus totus (§. 2) sit 10000000 (§. 14); si ex $2HC^2$ quadrato 200000000000000 extrahatur radix 14142136 (§. 269 *Arith.*); prodibit chorda HI (§. 246 *Arith.*), cujus dimidium 7071068 sinus 45° desideratus. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

22. *Inferius in Analysi docebimus, quomodo ex dato radio latus pentagoni regularis, hoc est, chordæ* 72° (§. 342 Geom.), *consequenter sinus* 36° (§. 2) *inveniatur.*

PROBLEMA 7.



23. *Dato sinu unius minuti seu 60″ FG, invenire sinum unius vel aliquot secundorum MN.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF sunt admodum exigui; AMF pro linea recta haberi potest citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus sinus exprimimus, assignabilem, hoc est, arcus AM & AF sinibus eorum proportionales assumere licet. Quare cum MN sit ipsi FG parallela

lela (§. 3); erit AF:FG = AM:MN (§. 268 *Geom.*). Datis ergo AF, FG & AM *per hypoth.* invenitur MN (§. 302 *Arith.*). *Q. e. i. & d.*

Scolion.

24. *Eadem ratione, si opus foret, inveniri possent sinus aliquot scrupulorum tertiorum.*

Problema 8.

25. *Datis sinibus* 30 (§. 15), 15 (§. 17), 45 (§. 21) *&* 36 *graduum* (§. 22), *canonem omnium sinuum construere, nonnisi unico minuto aut denis secundis, imo unico secundo inter se differentium.*

Resolutio & Demonstratio.

1. Ex sinu 36 graduum inveniatur sinus 18°, 9°, 4° 30′, 2° 15′ (§. 17); sinus 54°, 72°, 81°, 85° 30′, 87° 45′ (§. 16): porro sinus 27°, 13° 30′, 6° 45′, 40° 30′, 20° 15′, 42° 45′ (§. 17): inde sinus 63°, 76° 30′, 83° 15′, 49° 30′, 69° 45′, 47° 15′ (§. 16): ulterius sinus 31° 30′, 15° 45′, 38° 15′, 24° 45′ (§. 17): hinc sinus 58° 30′, 74° 15′, 51° 45′, 65° 15′ (§. 16): denique sinus 29° 15′ (§. 17) & ejus cosinus 60° 45′ (§. 16).
2. Ex sinu 45° inveniantur sinus 22° 30′ & 11° 15′ (§. 17), sinus 67° 30′ & 78° 45′ (§. 16), sinus denique 33° 45′ (§. 17) & 56° 15′ (§. 16).
3. Ex sinu 30° & sinu 54° inveniatur sinus 12° (§. 20).
4. Ex sinu 12° inveniantur sinus 6°, 3°, 1° 30′, 45′ (§. 17), sinus 78°, 84°, 87°, 88° 30′, 89° 15′ (§. 16): porro sinus 39°, 19° 30′, 9° 45′, 42°, 21°, 10° 30′, 5° 15′, 43° 30′, 21° 45′, 44° 15′ (§. 17): ulterius sinus 51°, 70° 30′, 80° 15′, 48°, 69°, 79° 30′, 84° 45′, 46° 30′, 68° 15′, 45° 45′ (§. 16): inde sinus 25° 30′, 12° 45′, 35° 15′, 24°, 34° 30′, 17° 15′, 39° 45′, 23° 15′ (§. 17): hinc sinus 64° 30′, 77° 15′, 54° 45′, 66°, 55° 30′, 72° 45′, 50° 15′, 66° 45′ (§. 16): hinc porro sinus 32° 15′, 33°, 16° 30′, 8° 15′, 27° 45′ (§. 17): inde ulterius sinus 57° 45′, 57°, 73° 30′, 81° 45′, 62° 15′ (§. 16): porro sinus 28° 30′, 14° 15′, 36° 45′ (§. 17) & horum cosinus 61° 30′, 75° 45′, 53° 45′ (§. 16): denique sinus 30° 45′ (§. 17) & ejus cosinus 59° 15′ (§. 16).
5. Ex sinu 15° inveniantur sinus 7° 30′ & 3° 45′ (§. 17): hinc sinus 75°, 82° 30′, 86° 15′ (§. 16): inde 37° 30′, 18° 45′, 41° 15′ (§. 17) & horum cosinus 52° 30′, 71° 15′, 48° 45′ (§. 16): denique sinus 26° 15′ (§. 17) & ejus cosinus 63° 45′ (§. 16).
6. Quodsi sinus hac ratione inventi in ordinem redigantur, numero 120, & differentiam inter duos immediate sibi mutuo succedentes 45′ deprehendes: quemadmodum ex Tabula, quam eum in finem hic apponimus, primo intuitu apparet.

1	0° 45'	21	15° 45'	41	30° 45'	61	45° 45'	81	60° 45'	101	75° 45'
2	1. 30	22	16. 30	42	31. 30	62	46. 30	82	61. 30	102	76. 30
3	2. 15	23	17. 15	43	32. 15	63	47. 15	83	62. 15	103	77. 15
4	3. 0	24	18. 0	44	33. 0	64	48. 0	84	63. 0	104	78. 0
5	3. 45	25	18. 45	45	33. 45	65	48. 45	85	63. 45	105	78. 45
6	4. 30	26	19. 30	46	34. 30	66	49. 30	86	64. 30	106	79. 30
7	5. 15	27	20. 15	47	35. 15	67	50. 15	87	65. 15	107	80. 15
8	6. 0	28	21. 0	48	36. 0	68	51. 0	88	66. 0	108	81. 0
9	6. 45	29	21. 45	49	36. 45	69	51. 45	89	66. 45	109	81. 45
10	7. 30	30	22. 30	50	37. 30	70	52. 30	90	67. 30	110	82. 30
11	8. 15	31	23. 15	51	38. 15	71	53. 15	91	68. 15	111	83. 15
12	9. 0	32	24. 0	52	39. 0	72	54. 0	92	69. 0	112	84. 0
13	9. 45	33	24. 45	53	39. 45	73	54. 45	93	69. 45	113	84. 45
14	10. 30	34	25. 30	54	40. 30	74	55. 30	94	70. 30	114	85. 30
15	11. 15	35	26. 15	55	41. 15	75	56. 15	95	71. 15	115	86. 15
16	12. 0	36	27. 0	56	42. 0	76	57. 0	96	72. 0	116	87. 0
17	12. 45	37	27. 45	57	42. 45	77	57. 45	97	72. 45	117	87. 45
18	13. 30	38	28. 30	58	43. 30	78	58. 30	98	73. 30	118	88. 30
19	14. 15	39	29. 15	59	44. 15	79	59. 15	99	74. 15	119	89. 15
20	15. 0	40	30. 0	60	45. 0	80	60. 0	100	75. 0	120	90. 0

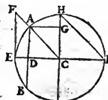
Inveniantur ergo ſinus intermedii per probl. 4 (§. 19).

7. Denique ſinus ſcrupulorum ſecundorum ab 1 uſque ad 60 inveniantur per probl. præc. (§. 23).

Ita Canon ſinuum erit conſtructus. *Q. e. f.*

Problema 9.

26. *Dato ſinu AD arcus AE, invenire tangentem EF & ſecantem FC ejuſdem arcus.*



Resolutio & Demonstratio.

Quia ſinus AD & tangens FE ad radium EC perpendicularis (§. 3.8); erit ille huic parallelus (§. 256 *Geom.*). Quare ut coſinus DC, inventus *per problem.* 1 (§. 16), ad ſinum AD, ita ſinus totus ad tangentem EF: item ut coſinus DC ad ſinum totum AC ita ſinus totus EC ad ſecantem CF (§. 268 *Geom.*). Invenietur ideo per illationem primam tangens EF, per alteram ſecans FC (§. 302 *Arith.*). *Q. e. i. & d.*

Scholion.

27. *Conſtructo igitur Canone ſinuum* (§. 25), *haud difficilis eſt conſtructio Canonis tangentium atque ſecantium. Uterque junctim ſumtus Canon triangulorum naturalis dici ſolet, quia triangulorum analyſi inſervit. Equidem paſſim apud Auctores theoremata non inelegantia occurrunt, quibus multi ſinus facilius inveniuntur, quam expoſita hactenus methodo.* Urſinus (a) *præſertim docet, quomodo ex ſinu Canonis omnium primi, e. gr. unius ſecundi, per ſolam quaſi additionem & ſubtractionem totus Canon derivetur. Enimvero cum ab aliis jam dudum conſtructus ſit; ſufficit utcunque oſtendiſſe, quomodo conſtrui potuerit.*

Problema 10.

28. *Invenire ſinus cujuſcunque dati logarithmum.*

Re-

(a) Trigon. lib. 2. c. 5. p. 164.

Resolutio.

Ut logarithmi eo accuratiores inveniantur; assumendi sunt sinus ad radium 10000000000 constructi. Multiplicantur nempe sinus in Canone *Pitisci* majore 4 ultimis notis. Cum ideo sinus sint numeri 10 ut plurimum notis constantes, in canone autem logarithmorum, qui prostat, maximo numeri naturales ultra 5 notas non ascendunt; logarithmi eorum inveniuntur *per probl.* 37 *Arith.* (§. 349). Utendum vero est canone logarithmorum majore.

E. gr. Sit inveniendus logarithmus sinus 23°, qui apud *Pitiscum* 3907311284. Resectis versus sinistram quinque notis 39073, ipsis respondens logarithmus est 4.5918768, consequenter logarithmus numeri 3907300000 est 9.5918768. Differentia tabularis est 111. Quare infertur: ut 100000 ad 111 ita notæ residuæ sinus dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12: qui si addatur logarithmo 9.5918768, prodit logarithmus quæsitus 9.5918780, qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

Problema 11.

29. *Invenire logarithmum tangentis, dato logarithmo sinus & cosinus.*

Resolutio.

1. Logarithmus sinus addatur logarithmo sinus totius.
2. A summa subtrahatur logarithmus cosinus. Residuum est logarithmus tangentis (§. 26 *Trigon.* & §. 359 *Arith.*).

E. gr. Inveniri debet logarithmus tangentis 23°.

Addantur Log. Sin. 23° =	9.5918780
Log. Sin. tot. =	10.0000000
a summa =	19.5918780
subtrahatur Log. Cos. =	9.9640261
relinquitur Log. tang. =	9.6278519

Problema 12.

30. *Invenire logarithmum secantis arcus cujuscunque, dato logarithmo sinus complementi ejusdem.*

Resolutio.

1. Logarithmus sinus totius multiplicetur per 2.
2. Ab ejus duplo subtrahatur logarithmus sinus complementi datus. Residuus fiet logarithmus secantis (§. 26 *Trigon.* & §. 359 *Arith.*).

E. gr. Quærendus est Logarithmus secantis arcus 23°. Calculi typus talis est:

Log. sin. tot. =	10.0000000
Ejus duplum =	20.0000000
Log. Sin. Compl. =	9.9640261
Log. Secant. 23° =	10.0359739

Scholion.

31. Joannes Neperus, *qui primus logarithmos in Trigonometriam introduxit, sinus totius logarithmum facit 0. Hinc crescunt logarithmi sinuum, sinibus decrescentibus, & tangentium atque secantium sinu toto majorum logarithmi sunt defectivi seu nihilo minores.* Neperus *logarithmos cosinuum* Antilogarithmos; *logarithmos vero tangentium* differentiales; Keplerus *etiam* Mesologarithmos *vocat. Dicuntur quoque hi logarithmi* Sinus & Tangentes artificiales.



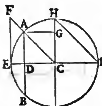
CA-

CAPUT II.

De Analysi Triangulorum.

THEOREMA 2.

32. *Tangens* 45° *EF æquatur radio EC.*

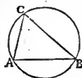


DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45° *per hypothesin*; erit quoque angulus ACE 45° (§. 59 *Geom.*), consequenter angulus F 45° (§. 241 *Geom.*). Quare EF = CE (§. 253 *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

33. *In omni triangulo ABC latera sunt ut sinus oppositorum angulorum.*



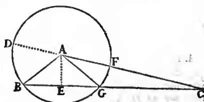
DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inscriptibile sit (§. 297 *Geom.*); erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 38 *Geom.*), consequenter latera dimidia sinus arcuum dimidiorum (§. 2). Sed arcus dimidii sunt mensuræ angulorum oppositorum B, A & C (§. 314 *Geom.*). Ergo ut latus AC ad sinum anguli sibi oppositi B, ita latus BC ad sinum anguli sibi oppositi A, ita etiam AB ad sinum anguli sibi oppositi C. *Q. e. d.*

SCHOLION.

34. *Ut vero evidentius appareat, in triangulo obtusangulo pro sinu anguli obtusi utendum esse sinu anguli acuti, qui eidem deinceps ponitur, & quem esse etiam sinum anguli obtusi supra annotavimus (§. 6), sequens addere lubet theorema.*

THEOREMA 4.



35. *In triangulo obtusangulo AGC est, ut latus angulo obtuso G oppositum AC ad sinum anguli acuti AGE eidem deinceps positi, ita latus angulo obtuso adjacens GA ad sinum anguli eidem oppositi C.*

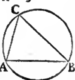
DEMONSTRATIO.

Demittatur ex A in basin continuatam CG perpendicularis AE; erunt AEG & AEC triangula rectangula (§. 78. 91 *Geom.*). Cum itaque sit ut sinus totus ad AC ita sinus anguli C ad AE, & ut AG ad sinum totum ita AE ad sinum anguli AGE (§. 33); erit etiam ut AG ad AC ita sinus anguli C ad sinum anguli AGE (§. 201 *Arith.*), consequenter latus angulo obtuso adjacens GA est ad sinum anguli eidem

dem oppositi C sicuti latus angulo obtuso oppositum AC ad sinum anguli acuti eidem deinceps positi AGE (§. 173 *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 13.

36. *Datis duobus angulis A & C, una cum latere uni eorum C opposito AB, invenire latus alteri A oppositum BC.*



RESOLUTIO.

Inferatur (§. 33):
ut sinus anguli C
ad latus sibi oppositum datum AB:
Ita sinus anguli alterius A ad latus quæsitum BC.

Invenietur ideo Logarithmorum ope BC *per probl.* 42 *Arith.* (§. 359).

E. gr. Sit C = 48° 35', A = 57° 28', AB = 74'. Calculus talis erit:

Log. Sin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. Sin. A	9.9258681
Sum. Log. AB & Sin. A	11.7950998
Log. BC	1.9200856,

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus respondent 83'. Cum vero logarithmus in tabulis non exactus reperiatur; inveniri possunt numeri inventi 83' fractiones decimales, hoc est, in casu nostro digiti, si sub characteristica 2. post 830'' denuo logarithmus ipsius BC evolvatur: cui proxime respondet numerus 831''. Quodsi præter digitos etiam lineas desideres; eundem logarithmum quære post 8310''' & ei quam proxime respondere deprehendes 8319'''. Imo si canon major ad manus sit; ipsa scrupula quarta expiscari licet, si logarithmus inventus post 83190'''' evolvatur: ubi eidem quam proxime respondet logarithmus numeri 83192''''. Est ergo BC 8° 3' 1'' 9''' 2'''' (§. 355 *Arith.*).

SCHOLION.

37. *Quid facto opus sit, si logarithmi characteristica fuerit 3, in Arithmetica loco citato docuimus.*

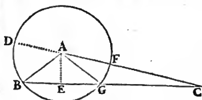
PROBLEMA 14.

38. *Datis duobus lateribus AB & BC una cum angulo C uni eorum opposito, invenire angulos reliquos A & B.*

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 33):
ut latus unum AB
ad sinum anguli dati sibi oppositi C:
Ita latus alterum BC
ad sinum anguli quæsiti sibi oppositi A.

Invenietur ideo logarithmus sinus anguli A utendo logarithmis *per probl.* 42 *Arith.* (§. 359).

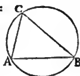


II. Quodsi latus AG vel AB dato angulo C oppositum, fuerit minus latere AC, quod opponitur angulo quæsito; quæsitus angulus & obtusus esse potest G, & acutus B (§. 234 *Geom.*), ideoque constare debet, utrum triangulum datum sit obtusangulum, an acutangulum. In casu posteriori satisfacit numerus graduum, qui sinui reperto respondet; in priori pro angulo obtuso sumitur ejus complementum ad 180° (§. 35).

III. Quodsi angulus datus G in triangulo GAC fuerit obtusus & datis præterea cruribus AG & AC quæratur acutus; in solutione pro sinu obtusi anguli AGC sumitur deinceps positi acuti AGE sinus (§. 35).

E. gr.

E. gr. Sit AB = 94′, BC = 69′, C = 72° 15′.



Log. AB	1.9731279
Log. Sin. C	9.9788175
Log. BC	1 8388491
Sum. Log. Sin. C & BC	11.8176666
Log. Sin. A	9.8445387,

cui in canone proxime respondent 44° 21′. Quodsi Canon major non fuerit ad manus & præter scrupula prima etiam secunda desiderentur, *vi probl.* 4 (§. 19) hunc in modum inveniuntur.

A logarith. invento 9.8445387 subtrahe
Tabul. prox. min. 9.8445018

& notetur Differ. I. 369

Simil: ex prox. maj. 9.8446310 subduc
prox. min. 9.8445018

& notetur Diff. II. 1292

Inferatur: 1292 : 60 = 3 6 9
2) 646 : 30   3 0
1.1.0 7 0 (17
6 4 6 :
4 6.1.0
4 5 2 2
8 8

Est ergo angulus A = 44° 21′ 17″
sed C = 72 15 0

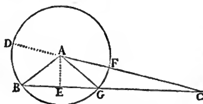
Quare A + C = 116° 36′ 17″
Quoniam A + C + B = 179 59 60

erit B = 63° 23′ 43″

Similiter dentur in triangulo rectangulo præter rectum A hypothenusa BC & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49′, AC 36′. Calculus talis erit:

Log. BC	1.6901961
Log. Sin. tot.	10.0000000
Log. AC	1.5563025
Log. Sin. B	9.8661064,

cui in canone proxime respondent 47° 16′. Ergo C = 42° 44′ (§. 241 *Geom.*).



Quodsi AG = 349″, AC = 382″, angulus C = 57° 25′; erit

Log. AG	2.5428254
Log. Sin. C	9.9256261
Log. AC	2.5820634
Sum. Log. Sin. C & AC	1 2. 5. 0 7.6 8 9 5
Log. Sin. G	9.9648641,

cui in Canone proxime respondent 67° 15′. Est igitur angulus acutus G in triangulo ABG 67° 15′: quem si subtraxeris ex 180°; relinquentur pro obtuso AGC 112° 45′.

Detur denique in triangulo obtusangulo AGC angulus obtusus G 165° 17′, una cum cruribus AG 179″ & AC 223″; pro acuto C ita inferatur (§. 35):

Log. AC	2.3483049
Log. Sin. AGE	9.4049009
Log. AG	2.2528530
Sum. Log. Sin. G & AG	1 1.6 5.7 7 5. 3 9
Log. Sin. C	9.3094490,

cui in Canone respondent quam proxime 11° 46′.

Lemma.

39. ***Si a semisumma duarum quantitatum subtrahatur semidifferentia, relinquitur quantitas minor: si vero illi hæc addatur, prodit major.***

Demonstratio.

Numerus major componitur ex minore & differentia (§. 64 *Arith.*): ergo summa ex minore bis sumto & differentia, consequenter semisumma ex minore & semidifferentia. Quare si a semisummæ subtrahatur semidifferentia; minor quantitas relinquitur (*§. cit. Arith.*). *Quod erat unum.*

Quod-

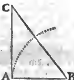
Quodsi vero semisummæ semidifferentia addatur; aggregatum erit compositum ex quantitate minore & differentia (§. 61 *Arith.*), ideoque numerus major *per demonstr. Quod erat alterum.*

PROBLEMA 15.

40 *Datis duobus lateribus BA & AC cum angulo intercepto A, invenire angulos reliquos.*

RESOLUTIO.

I. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; assumto crure uno circa rectum AB pro radio, erit alterum CA tangens anguli oppositi B (§. 78). Inferatur ergo:

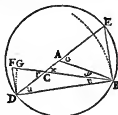


ut crus unum AB
ad alterum AC:
Ita sinus totus
ad tangentem anguli **B.**

E. gr. Sit BA 40′, AC 52′; erit

Log. BA	1.6020600
Log. AC	1.7160033
Log. Sin. tot.	10.0000000
Log. Tang. B	10.1139433, cui

in Canone respondent quam proxime 52° 26′. Ergo angulus C 37° 34′ (§. 241. *Geom.*),



II. Si angulus A fuerit obliquus;
1. inferatur:
ut summa laterum datorum AB & AC
ad differentiam eorundem:
Ita tangens semisummæ angulorum quæsitorum C & B
ad tangentem semidifferentiæ eorundem.

2. Addatur semidifferentia ad semisummam; aggregatum erit angulus major C. Eadem a semisumma subtrahatur; residuus fiet angulus minor B.

E. gr. Sit AB 75′, AC 58′, A 108° 24′; erit

AB 75	AB 75	A + B + C 179° 60′
AC 58	AC 58	A 108 24
Sum. 133	Diff. 17	B + C 71 36
		$\frac{1}{2}$(B + C) 35 48

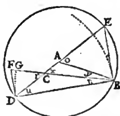
Log. AB + AC	2.1238516
Log. AB — AC	1.2304489
Log. Tang. $\frac{1}{2}$(B + C)	9.8580694
Summa Logg.	11.0885183
Log. Tang. $\frac{1}{2}$(C — B)	8.9646667, cui

in tabulis proxime respondent 5° 16′.

$\frac{1}{2}$(B + C) = 35° 48′	$\frac{1}{2}$(B + C) = 35° 48′
$\frac{1}{2}$(C — B) = 5 16	$\frac{1}{2}$(C — B) = 5 16
C = 41° 4′	B = 30° 32′

DEMONSTRATIO.

Crure majore dato AB ex vertice anguli dati A describatur circulus (§. 131 *Geom.*) & crus minus AC utrinque continuetur (§. 21 *Geom.*), donec circulo in E & D occurrat. Erit, ob AE = AB = AD (§. 40 *Geom.*), CE summa laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter (§. 39 *Geom.*); erit EBD semicirculus (§. 135 *Geom.*), consequenter angulus EBD rectus (§. 317 *Geom*), ideoque EB ad BD perpendicularis (§. 78 *Geom.*). Quare si BD sumatur pro sinu toto; erit

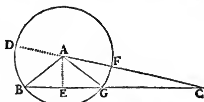


EB tangens anguli EDB (§. 7. 8). Eſt vero $o = x + y$ (§. 239 *Geom.*), & inde ob $u = \frac{1}{2} o$ (§. 313 *Geom.*), $u = \frac{1}{2}(x+y)$. Ergo EB tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum x & y. Quoniam $x = u + n$ (§. 239 *Geom.*); erit n ſemidifferentia angulorum x & y (§. 39). Sumto itaque DB denuo pro radio ſi deſcribatur arcus DG (§. 131 *Geom.*) & in D excitetur perpendicularis DF (§. 249 *Geom.*); erit DF tangens anguli n (§. 7. 8), hoc eſt, ſemidifferentiæ angulorum quæſitorum x & y *per demonſtrata*. Jam cum anguli EBD & FDB ſint recti *per demonſtr.* & hinc FD & EB parallelæ (§. 256 *Geom.*), ideoque BED & FDE æquales (§. 233 *Geom.*), item verticales ad C æquales (§. 156 *Geom.*); erit CE : BE = DC : DF (§. 267 *Geom.*), conſequenter & CE : DC = BE : DF (§. 173 *Arith.*). Data itaque per tangentem DF angulorum quæſitorum ſemidifferentia, reliqua in reſolutione manifeſta ſunt per lemma præcedens (§. 39). *Q. e. d.*

PROBLEMA 16.

41. *Datis tribus lateribus AB, BC & CA, invenire angulos A, B & C.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.



1. Ex vertice anguli A latere minimo AB deſcribatur circulus (§. 131 *Geom.*); erit, ob AD = AB (§. 40 *Geom.*), CD ſumma crurum AC & AB, CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§. 333 *Geom.*):
   ut baſis BC
   ad ſummam crurum CD,
   Ita differentia crurum CF
   ad ſegmentum baſis CG.
2. Inventum ideo ſegmentum CG (§. 302. *Arith.*) ſi ſubtrahatur a baſi CB; relinquitur chorda GB.
3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 216 *Geom.*), erit BE = EG = $\frac{1}{2}$GB (§. 291 *Geom.*). Datis ideo in triangulo rectangulo AEB lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B & C (§. 38), atque hinc angulus A (245 *Geom.*). *Q. e. f. & d.*

E. gr. Sit AB = 36′, AC = 108′, BC = 132′; erit

AC = 108 AC = 108′
AB = 36 AB = 36
AC + AB = 144 FC = 72

Log. BC	=	2.1205739
Log. AC + AB	=	2.1583625
Log. FC	=	1.8573325
Sum. Log. AC + AB & FC	=	4.0156950
Log. CG	=	1.8951211;

cui

cui in tabulis quam proxime respondent 78′.

BC = 132′	EG = 27′
CG = 78	CG = 78
BG = 54	CE = 105
BE = 27	

Log. AB	= 1.5563025
Log. Sin. tot.	= 10.0000000
Log. EB	= 1.4313638
Log. Sin. EAB	= 9.8750613, cui

in tabulis quam proxime respondent 48° 35′, ideoque angulus ABE 41° 25′ (§ 241 *Geom.*).

Log. AC	= 2.0334238
Log. Sin. tot.	= 10.0000000
Log. CE	= 2.0211893
Log. Sin. EAC	= 9.9877655, cui

in tabulis quam proxime respondent 76° 28′. Ergo ACE 13° 32′ (§. 241 *Geom.*), & CAB 125° 3′ (§. 86 *Arith.*).

CAPUT III.

De Usu Trigonometriæ Planæ in Geometria Practica.

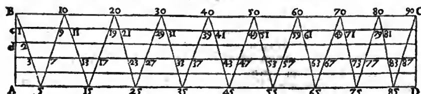
PROBLEMA 17.

42. *Construere instrumentum transportatorium rectilineum, hoc est, scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtensæ arcuum ad radium.*

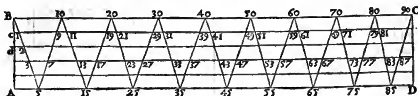
RESOLUTIO.

1. Ex communi canone sinuum excerpantur sinus arcuum 2° 30′, 5°, 7° 30′, 10°, 12° 30′ &c. nempe in progressione arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia est $2\frac{1}{2}$. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5°, 10°, 15°, 20°, 25° &c. (§. 2): ut hic in tabella factum vides.

Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.	Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	642.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414



2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 212 *Geom.*) pro arbitrio in quinque, decem, viginti &c. partes æquales dividenda, prout vel solos gradus, vel gradus dimidios, vel



vel partes quartas &c. indicare debent subtensæ.

3. Per singula divisionum puncta agantur rectæ ipsi AD parallelæ (§. 258 *Geom.*).

4. In lineam AD, incipiendo semper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5, 15, 25, 35 &c. respondentes ex scala Geometrica in particulas minutissimas divisa (§. 277 *Geom.*): in linea vero superiori BC eodem modo designentur particulæ chordarum respondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quodsi scala Geometrica non continet particulas adeo minutas, quales desiderantur; utendum est chordis dimidiis: quod perinde ac si particulæ in scala bifariam dividerentur. Negligenda autem est nota puncto a reliquis separata, vel si major fuerit, ejus loco addenda est unitas ultimæ earum, quæ retinentur. E. gr. loco 258. 8 assume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.

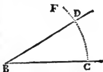
5. Ducantur transversæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20, ex 20 in 25 &c.

Cum enim A 5, B 10 &c. sint chordæ 5, 10 &c. graduum, & chordæ a quinis ad quinos gradus fere arcubus proportionaliter crescant; erit c 1 subtensa arcus 1°, d 2 subtensa 2 &c. graduum (§. 268 *Geom.*).

Corollarium 1.

43. Quia subtensa 60° est radius (§. 356 *Geom.*); anguli quantitatem investigaturus intervallo B 60 describat ex vertice anguli intra crura ejus arcum, qui est mensura ipsius (§. 57 *Geom.*), & ejus chordam ad scalam applicet, quæ, si e. gr. ex *c* in 41 pertingat; ostendit angulum esse 41°.

Corollarium 2.



44. Angulus datæ quantitatis construetur, si radio B 60 describatur ex centro B arcus CF, & subtensa gradus dati, e. gr. 23, in scala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC mensura anguli B (§. 57 *Geom.*), ideoque tot graduum, quot arcus continet (§. 59 *Geom.*).

Scholion.

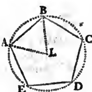
45. *Hujus instrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in scrupulis satis accurate explorari, experientia loquitur.*

Problema 18.

46. *Circulo polygonum regulare inscribere & circumscribere.*

Resolutio & Demonstratio.

1. Assumto radio 10000 partium, quales in Canone triangulorum habere supponitur, inde excerpatur



tur sinus ejus arcus, qui prodit, peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni, aut (quod perinde est) semiperipheria, hoc est 180°, per numerum laterum polygoni divisa. Illius enim duplum est chorda arcus dupli (§. 2), ideoque latus AB polygoni circulo inscribendi (§. 342 *Geom.*).

2. Quodsi radius circuli, cui e. gr. pentagonum inscribendum, detur juxta certam aliquam mensuram, e. gr. 345″; latus polygoni in eadem mensura invenitur per regulam trium (§. 302 *Arith.*), inferendo nempe

```
1000 —— 1176 —— 3450‴
            3450
     ——————————————
           58800
          4704
         3528
        ——————————
        4057|200 ( 4° 0′ 5″ 7‴ Lat.
           1|000 (    Pentagoni.
```

3. Dato radio describatur circulus & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri potest (§. 342 *Geom.*).

4. Polygono regulari circulo inscripto simile circumscribetur (§. 355 *Geom.*).

Scholion

47. *Ne molesta sit rationis lateris polygoni ad radium ex canone sinuum investigatio, in tabula hic exhibemus latera polygonorum ejusmodi particulis expressa, qualium radius habet* 10000000. *In praxi tot notæ versus dexteram resecantur, quot per circumstantias singulares superfluæ judicabuntur.*

Num. Laterum.	Quantitas Lateris.	Num. Laterum.	Quantitas Lateris.
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

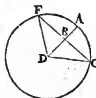
Problema 19.

48. *Super data recta AB polygonum regulare describere: & dato polygono regulari ABCDE circulum circumscribere.*

Resolutio.

Non alia re opus est, quam ut ratione lateris ad radium ex tabula præcedente assumta quæratur radius in ea mensura, in qua datur latus AB (§. 302 *Arith.*): dato enim latere AB & radio AL, polygonum describi potest (§. 342 *Geom.*). Si vero intervallo radii ex A & B super latere polygoni uno fiat intersectio in L; habebitur centrum L circumscribendi circuli (§. 37 *Geom.*).

Problema 20.

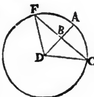


49. *Datis sinu verso AB & sinu BC in mensura communi, non in particulis radii decimalibus, invenire arcum FC in gradibus.*

Resolutio & Demonstratio.

1. Quæratur ex his datis semidiameter AD (§. 328 *Geom.*).
2. Datis jam in triangulo DBC præter rectum B (§. 3) lateribus BC & DC,

& DC, invenitur angulus ADC (§. 38): qui indicat numerum graduum in arcu A C (*§.* 59 *Geom.*), cujus duplus est arcus FC (*§.* 291 *Geom.*). *Q. e. i. & d.*

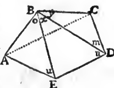


SCHOLION.

50. *Hujus problematis usus est in inveniendo segmento circuli* (§. 436 Geom.).

PROBLEMA 21.

51 *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA & angulis* o & y, *invenire diagonales.*



RESOLUTIO.

1. In Δ ABE datis duobus lateribus AB & AE una cum angulo *o*, invenitur primum angulus A (*§.*38), dein diagonalis BE (*§.* 36).
2. Eodem modo resoluto triangulo BCD invenitur diagonalis BD. *Q. e. f.*

PROBLEMA 22.

52. *Datis in figura rectilinea quacunque duobus lateribus AB & BC, una cum diagonalibus BE & BD atque angulis* o, x *&* y, *invenire latera reliqua CD, DE & EA.*

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABE duobus lateribus AB & BE cum angulo intercepto *o*, invenitur primum angulus *u* (*§.* 40) & deinde porro AE (§. 36).
2. Eodem prorsus modo in triangulis reliquis BED & BCD investigantur latera ED & DC. *Q. e. f.*

PROBLEMA 23.

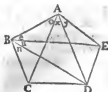
53. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA, & tot angulis C & D, quot sunt latera, demtis tribus, invenire diagonales BD & BE.*

RESOLUTIO.

1. In triangulo BCD datis lateribus BC & CD cum angulo intercepto C, investigetur angulus *m* (*§.* 40), quo ex angulo D subducto relinquitur angulus *n*, atque porro diagonalis BD (§. 36).
2. Datis jam in triangulo BDE lateribus BD & DE cum angulo intercepto *n*, eodem prorsus, quo ante, modo reperitur diagonalis BE. *Q. e. f.*

PROBLEMA 24.

54. *Datis in figura rectilinea quacunque latere AB una cum angulis* o, x, y, e, u *&* n, *invenire diagonales AC, AD, BD & BE una cum lateribus BC & AE.*



RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABC angulis *o* & B ($=e+u+n$) una cum latere AB, inveniuntur latus BC & diagonalis AC (*§.* 36).

2. Si-

2. Similiter datis in triangulo ABD angulis $o + x$ & $e + u$ una cum latere AB, inveniuntur diagonales BD & AD (§ *cit.*).
3. Denique datis in triangulo ABE angulis A ($= o + x + y$) & e una cum latere AB, inveniuntur latus AE & diagonalis BE (§. *cit.*). *Q. e. f.*

SCHOLION.

55. *Cum ichnographiæ arearum optime perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus* (§. 363 Geom.); *horum problematum in planimetria usus est non contemnendus. Qui tamen praxi operam dant molestias calculi fugiunt; lucro magis quam accurationi intenti.*

PROBLEMA 25.



56. *Metiri distantiam duorum locorum BC ex eodem tertio A accessorum.*

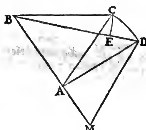
RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium assumto (§. 152 *Geom.*), nec non rectarum AB & AC (§ 126 *Geom.*).
2. Datis in △ BAC duobus lateribus BA & AC cum angulo intercepto A, inveniatur primum angulus B (§. 40), & hinc porro distantia BC (§. 36). *Q. e. f.*

SCHOLION.

57. *Exempla non addimus, cum problemata, quibus triangula in hac trigonometriæ applicatione solvuntur, jam in superioribus fuerint exemplis illustrata. Ut tamen de commoda stationis electione A judicari possit, quædam adhuc addenda sunt. Nimirum lineas AB & AC, quæ sunt latera trianguli resolvendi BAC, satis accurate in campo metiri licet* (§. 126 Geom.): *sed in metiendo angulo facile aliquot scrupulis primis vel in excessu, vel in defectu peccamus: cum tamen hoc angulo erroneo in calculo utamur tanquam vero, fieri omnino non potest quin distantia erronea obtineatur. Quamobrem de quantitate erroris admittendi hic nobis dispiciendum.*

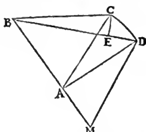
THEOREMA 5.



58. *Si error aliquot scrupulorum in quantitate anguli A admittatur, laterum vero BA & AC magnitudo fuerit accurata; erit arculi CD errorem CAD metientis quantitas ad DE differentiam distantiæ veræ BC ab erronea per calculum producta BD, ut sinus totus ad sinum anguli BCA, qui lateri AB opponitur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si in angulo BAC metiendo peccetur, ut prodeat tantillo major BAD; ob rectarum AC & AD æqualitatem *per hypoth.* triangulum BAC degenerat in alterum BAD. Describatur ex A intervallo AC tanquam radio arcus CD, qui per punctum



ctum D ob AC = AD (§. 40 *Geom.*) necessario transit. Quoniam angulus CAD nonnisi aliquot scrupulorum est; arcus exiguus CD, qui eum metitur (§. 57 *Geom.*), pro recta haberi, &, si ejus ad peripheriam detur ratio, in eadem mensura determinari potest, in qua datur latus AC (§. 435 *Geom.*). Describatur similiter ex centro B intervallo BC arcus CE, qui ex eadem ratione pro recta haberi poterit, eritque, ob BC = BE (§. 40 *Geom.*), ED differentia inter distantiam veram BC & erroneam BD: anguli vero ACD, BCE & CED sunt recti (§. 309 *Geom.*), consequenter BCE = ACD (§. 145 *Geom*), ideoque BCA = ECD (§. 91 *Arith.*). Est vero ut sinus totus ad CD ita sinus anguli ECD (sive BCA *per demonstr.*) ad ED (§. 33): ergo etiam ut sinus totus ad sinum anguli BCA ita CD ad ED (§. 173 *Arith.*). *Q. e. d.*

Corollarium 1.

59. Eodem ergo manente errore CD in angulo A metiendo admisso, error in distantia admissus ED major est, si angulus BCA major fuerit: minor autem, si hic quoque minor fuerit (§. 205. 206 *Arith.*).

Corollarium 2.

60. Statio itaque in A ea eligenda, quæ acutum valde efficit angulum BCA (§. 59): quod obtinetur, si angulus A fuerit major recto (§. 240 *Geom.*) & latus AC > AB (§. 189 *Geom.*).

Corollarium 3.

61. Cum angulus BAD major sit angulo BMD (§. 188 *Geom.*); præstat eligi stationem A viciniorem, quam remotiorem (§. 59).

Scholion.

62. *Supponimus hic parti lateris AB congruere semidiametrum Instrumenti goniometrici, dum angulum metimur, lateri vero AC respondere regulam mobilem* (§. 152 Geom.).

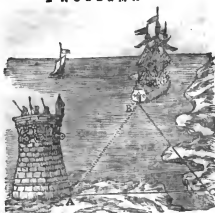
Corollarium 4.

63. Quoniam error ED in distantia definienda admissus major est, si quantitas arcus CD major fuerit (§. 58), quantitas autem arcus CD major prodeat, eodem errore CAD admisso, si latus AC longius, quam si brevius fuerit, ideo hinc quoque patet, stationem viciniorem præstare remotiori.

Scholion.

64. *Ceterum hinc apparet, praxes accuratissimas esse, quæ solis lineis in campo mensuratis nituntur, ubi in earum positione ob errorem in angulorum quantitate commissum aberrari nequit. Dedimus hic specimen aliquod eorum, quæ circa praxin Geometriæ accuratam expendi merentur, ut ostenderemus, theoriam accuratam parere praxin accuratam, & ad theoriam perfecte addiscendam excitemus, qui olim praxi operem daturi. Falluntur enim, qui sibi persuadent, per theoriam addisci non posse certas praxium accuratarum circumstantias, tum demum observandas, ubi manum praxi admoveris. Etenim plerumque tantum confuse observantur, per theoriam vero accurate determinantur.*

Problema 26.



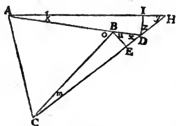
65. *In-*

65. *Invenire distantiam duorum locorum AB, quorum unus A tantum accessibilis.*

Resolutio.

1. Investigetur quantitas angulorum A & C, statione in C electa (§. 152 *Geom.*), itemque rectæ AC (§. 126 *Geom.*).
2. Inveniatur AB (§. 36). *Q. e. f.*

Theorema 6.



66. *Si in distantia AB ex duobus angulis A & ACB una cum latere AC investiganda nonnisi in angulo uno ACB metiendo aberretur; arcus BE, qui errorem BCD in angulo admisso metitur, erit ad BD differentiam inter distantiam veram AB & erroneam AD, ut sinus anguli tertii* o *distantiæ stationum AC oppositi ad sinum totum.*

Demonstratio.

Illud per se patet, in hoc casu distantiam erroneam calculo productam AD continuo in directum jacere veræ AB, consequenter latus CD terminans angulum erroneum ACD secare distantiam veram in præsente casu productam in D. Describatur ergo ex centro C radio CB arcus BE, qui est mensura erroris BCD (§. 57 *Geom.*), cumque *ex hypoth.* nonnisi paucorum minutorum sit, pro linea recta haberi potest. Quamobrem cum anguli BED & CBE sint recti (§. 309 *Geom.*); erunt anguli *o* & *u* (§. 147 *Geom.*), itemque *u* & *x* æquales recto (§. 241 *Geom.*), consequenter $o + u = x + u$ (§. 145 *Geom.*), ideoque $o = x$ (§. 91 *Arith.*). Est vero ut sinus anguli *x* (sive *o per demonstr.*) ad arcum BE ita sinus totus ad BD (§. 33). Ergo BE est ad BD ut sinus anguli *o* ad sinum totum (§. 173 *Arith.*). *Q. e. d.*

Corollarium 1.

67. Cum sinus anguli *o* majorem habeat ad sinum totum rationem, si major, quam ubi minor fuerit (§. 203 *Arith.*); eodem errore in metiendo angulo ACB admisso, hoc est, arcu BE existente eodem, minor erit error in distantia determinanda admissus BD, ubi angulus *o* major, quam ubi minor fuerit (§. 206 *Arith.*).

Corollarium. 2.

68. Unde consequitur, talem hoc in casu fieri debere stationum A & C electionem, ut anguli A & C sint admodum obliqui, angulus vero *o* evadat recto proximus: id quod obtinetur si anguli A & C junctim sumti tantillo excedant rectum (§. 240 *Geom.*).

Corollarium 3.

69. Anguli obtusi eundem sinum habent cum acutis, qui ipsis deinceps ponuntur (§. 5). Quamobrem si recto fuerint multo majores, perinde est in præsenti casu, ac si angulus *o* esset valde acutus. Quodsi autem angulum *o* in electione stationum obtusum desideres; tantillo rectum excedere debet, consequenter anguli A & C simul a recto tantillo deficiant necesse est.

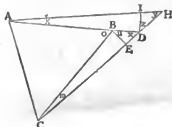
Corollarium 4.

70. Si angulus *o* fuerit rectus; arcus BE cum ipsa BD coincidit, ideoque errori in distantia admisso æqualis reperitur, ubi in eadem mensura determinatur, in qua datur distantia stationum AC ex radio nempe CB (§. 435 *Geom.*).

COROLLARIUM 5.

71. Errore ideo in angulo C existente eodem, qui in distantia admittitur minimus omnium est, ubi angulus o fuerit rectus.

THEOREMA 7.



72. *Si in dimetienda distantia locorum AB ex duobus angulis A & C & uno latere AC error etiam in altero angulo metiendo A admittatur præter eum, qui in angulo C committitur; erit errorem in angulo A commissum metiens arcus DI, distantia uno errore implicita AD tanquam radio descriptus, ad errorem inde in distantia productum IH, ut sinus anguli tertii* o *quantitate erroris primi* m *diminuti ad ejus cosinum.*

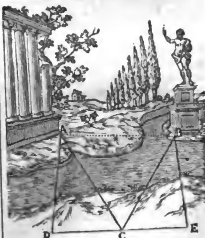
DEMONSTRATIO.

Etenim si AH fuerit recta positione data, in quam ob errorem in angulo A metiendo admissum promovetur distantia AB, recta errorem primum *m* terminans CD continuanda, donec illi in H occurrat, eritque AH distantia ex duplici errore *m* & *k* admisso. Jam distantia uno errore implicita AD tanquam radio describatur arcus DI mensura erroris *k* (§. 57 *Geom.*); erit is tum ad AD, tum ad AI perpendicularis (§. 308 *Geom.*), consequenter anguli DIH & ADI recti (§. 78 *Geom.*), cumque arcus DI sit paucorum minutorum (§. 59 *Geom.*), pro recta haberi potest. Hinc porro ut in demonstratione præcedente colligitur esse $y = x = o - m$ (§. 239 *Geom.*). Est vero ut sinus anguli *y* ad DI ita sinus anguli *z* ad IH (§ 33). Ergo DI ad IH ut sinus anguli *y* ad sinum anguli *z* (§. 173 *Arith.*), sive cosinum anguli *y* (§. 241 *Geom. &* §. 11 *Trigonom.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

73. *Si in dimetiendo angulo peccetur in defectu; error in distantia admissus eodem modo determinatur, nisi quod tum fiat subtractivus, atque ideo unus alterum imminuere, imo prorsus compensare possit, ubi alter additivus, alter subtractivus fuerit. Sed plura non addimus ob rationem paulo ante dictam.*

PROBLEMA 27.



74. *Invenire distantiam duorum locorum inaccessorum AB.*

RESOLUTIO.

1. Statione commoda in C electa investigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§. 152 *Geom.*), punctis D & E cum C in eadem linea designatis (§. 125 *Geom.*).
2. Investigetur etiam quantitas rectarum DC & CE (§. 126 *Geom.*).
3. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E subtrahatur ex 180°, ut relinquantur anguli ACD (§. 148 *Geom.*) & CBE (§. 140 *Geom.*): eodemque modo inveniatur angulus DAC.
4. Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in altero, inveniuntur AC & CB (§. 36), & hinc porro angulus CAB (§. 40), tandemque AB (§. 36).

PROBLEMA 28.

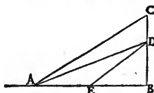


75. *Invenire altitudinem accessibilem AB.*

RESOLUTIO.

1. Statione in E electa instrumentoque (§. 284 *Geom.*) rite collocato, investigetur quantitas anguli ADC (§. 152 *Geom.*).
2. Quæratur porro distantia stationis ab altitudine DC (§. 126 *Geom.*), quæ erit ad AC perpendicularis (§. 227 *Geom.*).
3. Cum ideo C sit rectus (§. 78 *Geom.*); in triangulo ACD invenietur AC (§. 36).
4. Huic si addatur CB; prodibit altitudo integra AB. *Q. e. i.*

THEOREMA 8.



76. *Si in quantitate anguli A investiganda aberretur; erit altitudo vera BD ad falsam BC ut tangens anguli veri DAB ad tangentem anguli erronei CAB.*

DEMONSTRATIO.

Assumto AB pro sinu toto, erit DB tangens anguli DAB, CB autem tangens anguli CAB (§. 7). Sunt itaque altitudines BD & BC ut tangentes angulorum DAB & BAC. *Quod erat unum.*

Eodem modo se habet demonstratio, si angulus erroneus sit minor vero. *Quod erat alterum.*

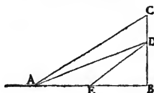
COROLLARIUM 1.

77. Quoniam posita eadem quantitate anguli veri atque erronei eadem est ratio altitudinis veræ ad erroneam (§. 76); error plurium pedum committitur in altitudine majore quam in minore.

COROLLARIUM 2.

78. Quia tangentes angulorum majorum & valde exiguorum, seu recto vel minuto proximorum minorem rationem inter se habent, quam tangentes mediocrium seu semirecto vicinorum, minore nempe ad majorem relata, Canone tangentium teste: si idem error committitur in angulo majore aut valde exiguo & mediocri; error in altitudine admissus major erit in casu priore, quam in posteriore.

SCHOLION.

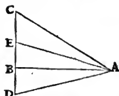


79. *Sit e. gr. angulus verus DAB 30°, AB 67': erit altitudo vera 3° 8' 6". Ponamus assumi angulum erroneum BAC 31°: is producet altitudinem erroneam BC 4° 0' 2" (§. 36). Sit in distantia minore EB angulus DEB recto proximus 86° & assumatur per errorem angulus 87°: reperietur altitudo erronea 5° 1' 6", quæ erroneam supra inventam excedit 1° 1' 4".*

COROLLARIUM 3.

80. Quoniam itaque in distantia minore EB angulus E major est quam DAB in majore AB (§. 188 *Geom.*), in distantia autem valde remota difficulter anguli admodum exigui quantitas exacte determinatur: in metiendis altitudinibus distantia stationis ab altitudine assumenda est mediocris, ita ut angulus DEB non multum abeat a semirecto.

THEOREMA 9.



81. ***Si instrumentum in A non fuerit horizontaliter collocatum, sed vel quantitate anguli BAD versus horizontem inclinatum, vel quantitate anguli EAB ab eodem reclinatum; erit altitudo vera ad falsam ut tangens anguli veri CAB ad tangentem erronei CAD vel CAE.***

DEMONSTRATIO.

Sumto enim AB pro radio, CB est tangens anguli veri CAB (§. 7). Inferendum ergo: ut sinus totus ad tangentem CAB ita AB ad altitudinem veram. Infertur autem per errorem: ut sinus totus ad tangentem CAD ita AB ad altitudinem erroneam. Quamobrem ut tangens CAB ad tangentem CAD ita altitudo vera ad erroneam (§. 196 *Arith.*). *Quod erat primum.*

Idem eodem modo ostenditur, si instrumentum quantitate anguli EAB a situ horizontali reclinetur. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

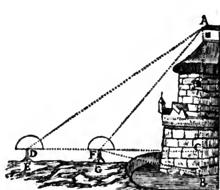
82. *Eadem ergo hic locum habent corollaria, quæ modo theoremati præcedenti subjecimus. Ceterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vitioso nempe situ tam lineæ AC quam AB commissum.*

PROBLEMA 29.

83. *Metiri* (Vid. Fig. seq.) *altitudinem inaccessam AB.*

RESOLUTIO.

1. Eligantur duæ stationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 125 *Geom.*) tanto intervallo DF distantes, ut angulus FAD non sit nimis exiguus, nec alte-



altera ſtatio G nimis vicina altitudini AB (§. 78. 80).

2. Inveſtigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 152 *Geom.*), itemque diſtantiæ FD longitudo (§. 126 *Geom.*).

3. Inveniatur primum in triangulo AFD ex datis angulo D *per obſervationem*, & angulo AFD (§. 239 *Geom.*) & latere FD, latus AF (§. 36): dein ex notis in triangulo ACF præter rectum C angulo F & latere AF, latus AC itemque CF (§. 36): tandem ex cognitis in triangulo FCB præter rectum C angulo CFB & latere CF, latus CB (§. 36).

4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quæſita AB (§. 86 *Arith.*). *Q. e. f.*

Finis Trigonometriæ Planæ.



ELE-

ELEMENTA

ANALYSEOS MATHEMATICÆ

TAM FINITORUM QUAM INFINITORUM.

PRÆFATIO.



Picem totius eruditionis humanæ conſcendimus Analyſin tradituri: eſt enim ars per calculum quantitatum generalem proprio Marte inveniendi veritates in Matheſi non minus pura, quam applicata. Elementis Arithmeticæ communis atque Geometriæ hactenus expoſitis inſtructus & Analyſi adjutus multa inveniet, quæ ex aliorum ſcriptis non ſine tædio alias haurire deberet, imo omnibus adhuc ignorata deteget. Ea vero perfectiſſima eſt ſtudiorum noſtrorum ratio, quæ paucis memoriæ mandatis aptos reddit ad inveniendum quodlibet eo maxime tempore, quo ejus cognitione opus. Nec major intellectus perfectio concipitur promptitudine ex datis quibuſdam alia incognita eliciendi. Accedit, in moderna Analyſi artis ratiocinandi perfectiſſima occurrere exempla. Notiones enim ſignis expreſſæ imaginationi præſentia ſiſtunt, quæ alias ultra ejus ſphæram aſcenderent: longa ratiociniorum ſeries, quibus non ſine multa attentione ac circumſpectione notionum nexus detegitur, in artem ſignorum combinatoriam

toriam

toriam convertitur, constanter eandem & principiis paucis ac manifestis superstructam. Illud autem prorsus mirabile existit, ope Analyseos unica sæpius linea tot veritates exprimi, quas juxta communem methodum exponendas ac demonstrandas volumina integra non caperent. Hinc unius lineæ intuitu integras fere disciplinas paucorum minutorum spatio addiscere licet, quibus juxta communem methodum comprehendendis anni complures vix sufficerent. Solidam ergo in Mathesi eruditionem consecuturus Analysi studeat opus est. Ne autem, non tam difficultate (ea enim revera nulla est) quam novitate rei deterritus a præstantissimo studiorum genere arceatur; Arithmeticam speciosam familiarem sibi reddat, neglectis sub initium regularum rationibus, sicubi difficultatem facessant, & exemplis numericis in locum earundem substitutis. Ubi ad exempla Algebraica pervenerit, non inutile judicamus, ut tirones data per numeros variis modis explicent & idem problema in casibus specialibus aliquoties solvant: ita enim futurum, ut calculo facilius adsuescant & ejus rationes simplices perspiciant. Neque vero putandum est, integram Analysin jamdum esse inventam; quin potius tenendum, plurima adhuc subsidia deesse posterorum industria detegenda. Certe quæ in Elementis Geometriæ docuimus, per modernam analysin non omnia eruuntur, inprimis si a linearum & superficierum situ pendent. Quamobrem *Leibnitius*, vir in omni eruditione summus, pro ea, quæ ipsi est, ingenii perspicacitate novam quandam *Analysin situs* excogitavit, peculiari calculi generi (quem *Calculum* situs appellat) superstructam, a calculo magnitudinum, quo in nostra Analysi utimur, toto cælo differentis. Imo qui hactenus reperta animo comprehenderit & ad solvenda problemata cum cura adhibuerit: pluribus regulis inveniendi artem ipse locupletabit. Ceterum quæ vel in Arithmetica, vel in Geometria elementari studio prætermissa, ea per Analysin eruimus, ex Geometria quoque sublimiori investigantes, quæ præ reliquis scitu necessaria.

ELE-



ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ.

PARS PRIMA

ELEMENTA ANALYSEOS FINITORUM TRADIT.

Sectio Prima

DE ARITHMETICA SPECIOSA.

CAPUT PRIMUM

De Arithmetica Rationalium.

DEFINITIO I.

1. *Analysis Mathematica* est methodus resolvendi problemata mathematica.

DEFINITIO 2.

2. *Arithmetica speciosa* est, quæ computum quantitatum seu numerorum indeterminatorum docet. Vocatur etiam *Logistica speciosa*.

HYPOTHESIS I.

3. *Quantitatum datarum signa sint literæ Alphabeti priores*, a, b, c, d &c. *quæsitarum postremæ* z, y, x &c. *Quantitates æquales eadem litera indigitentur.*

SCHOLION 1.

4. *Nempe cum quantitates datæ ac quæsitæ tanquam distinctæ intellectui repræsententur per diversas notiones; eædem quoque tanquam distinctæ repræsentandæ sunt imaginationi per signa diversa.*

SCHOLION 2.

5. *Nos* Cartesium *sequimur in Geometria. Angli nonnulli exemplo* Harrioti *in Artis analyticæ praxi incognitas quantitates vocalibus; cognitas consonantibus designant.* Vieta *hujus logisticæ inventor usus est literis majoribus; qui eam primus perfecit* Harriotus *& ipsum secutus* Cartesius *literas minores substituerunt.*

HYPOTHESIS 2.

6. *Si quantitatum denominandarum quædam relationes mutuæ dantur, aut aliunde tanquam cognitæ supponi possunt; eas quoque in denominatione exprimi consultum est.*

E. gr. Si fuerint duæ quantitates quæsitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x, major rectius dicetur $3x$, quam y. Similiter cum quantitas major sit aggregatum ex semisumma duarum quantitatum & earundem semidifferentia; minor vero differentia inter semisummam & semidifferentiam earundem quantitatum (§. 39 *Trigonom.*); consultum sæpius est, ut semisumma dicatur x & semidifferentia y, atque hinc quantitas major $x+y$, minor $x-y$, quam ut ipsa major x & minor y vocetur.

SCHOLION.

7. *Quinam fructus ex commoda quantitatum denominatione exspectandi, ex subsequentibus patebit. Breviatur calculus idemque facilitatur: resolutiones problematum sæpe magis genuinæ inveniuntur. Alii suo loco sese offerent. Plura circa denominationem moneri possent, nisi consultius judicaremus ea per exemplum, quam per præcepta doceri.*

HYPOTHESIS 3.

8. *Signa operationum arithmeticarum retineantur, quæ in Arithmetica communi tradidimus (§. 63. 65. 68. 71. 254. 295), nisi quod quantitates se mutuo dividentes, ubi commodum fuerit, instar fractionum scribantur.*

E. gr. $\frac{a}{b}=a:b$; $\frac{3}{4}=3:4$:

(a) In Quadratura circuli & Hyperbolæ part. 2. p. m. 58.

SCOLION.

9. *Vulgo multiplicationis signum est* $\times$. *E. gr.* ab *scribitur* $a\times b$. *Sed cum hoc signum facile cum litera* x *a typothetis confundatur; usus ejus merito improbatur.*

HYPOTHESIS 4.

10. *Si vel unus, vel ambo factores ex pluribus literis componuntur; compositi parenthesi ( ) includuntur.*

E. gr. factum ex $a+b-c$ in d ita scribitur: $(a+b-c)d$. Similiter factum ex $a+b-c$ in $d-g$ hunc in modum exaratur: $(a+b-c)(d-g)$.

SCHOLION.

11. *Vulgo hæc facta ita scribunt:* $d\times\overline{a+b-c}$ & $\overline{a+b-c}\times\overline{d-g}$. *Sed cum hæc scriptio typothetis molestias creet, inprimis si ex alio capite linearum supra literas ducendarum numerus multiplicatur; signis Leibnitianis utendum esse judicamus, quæ non inutiliter in Actis Eruditorum Lipsiensibus usurpantur & ab admodum* R. P. Guidone Grando (a) *in Italia primum introducta.*

HYPOTHESIS 5.

12. *Si quantitatum se mutuo dividentium una vel ambæ ex literis pluribus componuntur; signo parentheseos ( ) similiter utimur, nisi circumstantiæ singulares suadeant, eas fractionum instar scribi.*

E. gr. Quotus ex $a+b$ per c ita scribitur, $(a+b):c$. Quotus vero ex $a+b$ per $c-d$ ita exprimitur, $(a+b):(c-d)$. Similiter $a:(a+b)$ designat quotum ipsius a per $a+b$ divisæ. Iidem quoti communiter ita scribuntur, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{a}{a+b}$.

HYPOTHESIS 6.

13. *Exponentes indeterminati tam rationum, quam dignitatum indicentur per m, n, r, s, t &c.*

E. gr. x^m, y^m, z^r &c. designant potentias indeterminatas diversi generis (§. 254 *Arithm.*): mx, ny, rz multipla vel submultipla diversa quantitatum x, y, z, prout m, n, r vel numeros integros, vel fractos designant (§. 136 *Arith.*).

HY-

HYPOTHESIS 7.

14. *Si radix ex pluribus literis componitur; parenthesi includitur & exponens ipsi suffigitur, ut ante.*

E. gr. $(a+b-c)^2$ designat quadratum ex $a+b-c$; $(a+b-c)^m$ potentiam quamlibet seu indeterminatam ipsius $a+b-c$.

SCHOLION.

15. *Communiter ita scribunt*, $\overline{a+b-c}^{\,2}$. $\overline{a+b-c}^{\,m}$.

DEFINITIO 3.

16. *Quantitas* signo + affecta dicitur *positiva*, item *affirmativa* atque *nihilo major*: quæ vero signo — afficitur, *privativa*, item *negativa* atque *nihilo minor*, a nonnullis *absurda*.

COROLLARIUM I.

17. Quoniam + est signum additionis (§. 63 *Arith.*), — vero signum subtractionis (§. 65 *Arith.*): quantitas positiva prodit, si vera aliqua nihilo additur, e. gr. $0+3=+3$, $0+a=+a$; privativa relinquitur, si quantitas aliqua vera ex nihilo subtrahitur, e. gr. $0-3=-3$, $0-a=-a$.

SCHOLION.

18. *Ponamus, te habere nummorum nihil tibique donari* 100: *habebis ergo* 100 *nummos, ideoque plus nihilo. Plus nempe habes quam ante. Hi nummi quantitatem positivam constituunt. Ponamus e contrario, te nihil habentem solvere debere* 100 *nummos;* 100 *ergo nummorum debitum contrahes, ideoque, antequam solutio fiat, minus nihilo habebis. Solvendi enim sunt* 100 *nummi, ut nihil habeas. Hoc debitum quantitas negativa est. Notandum vero quantitates positivas initio vel solitarie positas signo nullo affici. Cur vero positivæ dicantur nihilo majores, negativæ nihilo minores; ex corollario patet.*

COROLLARIUM 2.

19. Sunt igitur quantitates privativæ verarum, per quas intelliguntur, defectus; consequenter non quantitates veræ.

SCHOLION 2.

20. *Defectum per eam quantitatem metimur, quæ deficit, & sic intelligibilis evadit.*

COROLLARIUM 3.

21. Si residuo additur, quod fuerat ablatum; ea prodit quantitas, ex qua subtractio facta (§. 106 *Arith.*). Ergo $-a+a=0$, $-3+3=0$ (§. 17), hoc est, $-a$ & $+a$, itemque -3 & $+3$ se mutuo destruunt.

COROLLARIUM 4.

22. Quoniam defectus unus alterum excedere potest (e. gr. si 7 deficiunt, plura desunt, quam ubi 3 deficiunt), quantitates vero privativæ sunt verarum defectus (§. 19); ideo quantitas una privativa aliquoties sumta alteram superare potest. Quamobrem quantitates privativæ inter se homogeneæ sunt (§. 32 *Arith.*).

COROLLARIUM 5.

23. Sed quia defectus positivæ quantitatis aliquoties sumtus positivam superare nequit, cum potius multo magis ab ea deficiat (§. 17); quantitates privativæ positivis heterogeneæ sunt (§. 32 *Arith.*).

COROLLARIUM 6.

24. Cum ideo quantitates privativæ positivis heterogeneæ (§. 23), privativis homogeneæ sint (§. 22); inter privativam & positivam ratio intercedere nequit, inter privativas vero ratio datur (§. 126 *Arith.*). E. gr. $-3a:-5a=3:5$.

SCHOLION 3.

25. *Non mirum videri debet inter quantitates privativas* $-3a$ *&* $-5a$ *eandem esse rationem, quæ est inter positivas* $+3a$ *&* $+5a$. *Quod enim quantitates quatuor, quarum binæ binis heterogeneæ sunt, proportionales esse possint, cum ex rationum doctrina intelligitur, tum ex Geometria manifestum est, in qua eandem rationem inter lineas esse demonstravimus, quæ inter superficies datur. E. gr. Parallelogramma æqualium basium rationem altitudinum habent* (§. 389 Geom.), *& in praxi regulæ trium pretia sumuntur ut mercium quantitates, licet pretia mercibus heterogenea sint. Falluntur autem, qui inter* $+1$ *&* -1, *atque inter* -1 *&* $+1$ *rationem eandem esse sibi persuadent* (§. 24).

THEOREMA I.

26. *Quantitas quælibet pro unitate assumi potest.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in se una est (§. 3 *Arith.*), nec ad aliam

 deter-

determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (§. 13 *Arith.*). Ergo ipsa pro unitate assumi potest (§. 4. *Arith.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

27. *Quantitates tam eodem quam diversis signis affectas addere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ eodem signo afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur ut in Arithmetica communi (§. 96 *Arith.*).
2. Si signis diversis afficiuntur; additio mutatur in subtractionem, & residuo præfigitur signum majoris.
3. Quantitates diversis literis notatæ invicem junguntur retentis signis, quæ ipsis jam sunt præfixa vel præfixa supponuntur (§. 3).

$$\begin{array}{ll} 4a+2b-2c-5d-g & c \\ 5a-2b+6c+2d-3g & a-b \\ \hline 9a+4c-3d-4g. & c+a-b \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate assumi possit (§. 26); erit $a + a + a + a = 4a$, consequenter $4a + 5a = 9a$ (§. 96 *Arith.*). Eodem modo patet esse $-g - 3g = -4g$. *Quod erat unum.*

Quoniam $6c = 4c + 2c$ *per demonstr.* erit $6c - 2c = 4c + 2c - 2c$ (§. 91 *Arith.*). Sed $2c - 2c = 0$ (§. 21). Ergo $6c - 2c = 4c$. Similiter $-5d = -3d - 2d$ *per demonstrata*. Sed $-5d + 2d = -3d - 2d + 2d$ (§. 88 *Arithm.*), & $-2d + 2d = 0$ (§. 21). Ergo $-5d + 2d = -3d$. *Quod erat alterum.*

Tertium per se patet (§. 8).

SCHOLION.

28. *Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus* a *denotare thalerum,* b *grossum,* c *nummum; habebimus*

$$\begin{array}{l} 7a-9b+5c = 7\text{th.}-9\text{gr.}+5\text{num.} \\ 3a+5b-9c = 3\quad +5\quad -9 \\ \hline 10a-4b-4c = 10\text{th.}-4\text{gr.}-4\text{num.} \end{array}$$

Atque per idem exemplum facilius quoque capitur ratio, cur in casu diversitatis signorum additio in subtractionem mutetur & residuo signum majoris quantitatis relinquatur. Nimirum in summa 10 thalerorum deficiunt 9 grossi: quamobrem si quinque addantur, defectus minuitur & ad 4 reducitur. Quoniam vero non 5 grossi integri, sed demtis 9 nummis, summæ adjiciendi; summa 10 th. — 4 gr. excedit genuinam 9 nummis, qui ideo auferendi. Jam cum in numero superiori, cui inferior additur, occurrant 5 nummi, hi quidem actu auferri possunt: qui vero adhuc desiderantur 4, tanquam defectus notandi. Et hac quidem ratione regula a primo inventore detecta.

THEOREMA 2.

29. *In subtractione quantitatum compositarum signa subtrahendæ mutantur in contraria, nempe + in —, & — in +.*

DEMONSTRATIO.

Si $c + d$ fuerit subtrahenda ex $a + b$; differentiam esse debere $a + b - c - d$, ideoque signa + in quantitate subtrahenda in — mutari, ex hypoth. 3 (§. 8) patet. Sed si $c - d$ subtrahenda ex $a + b$ & integrum c subtrahitur; quantitas major subducta, quam fieri debebat. Ergo, quod plus justo subtractum est d, iterum addendum. Prodit ergo $a + b - c + d$. *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

30. *Quantitates tam eodem quam diver-*

diverſis ſignis affectas a ſe invicem ſubtrahere.

Resolutio.

1. Si quantitates eadem litera notatæ ſigna eadem habent & minor e majore ſubtrahenda; ſubtractio ut in Arithmetica communi (§. 103 *Arith.*) abſolvitur.
2. Si vero major e minori ſubducenda; contraria ratione minor e majore ſubtrahitur & reſiduo præfigitur ſignum —, ſi quantitates ſigno + afficiuntur; ſignum vero +, ſi ſigno — gaudent.
3. Si quantitates diverſa ſigna habent; in additionem mutatur ſubtractio, & aggregato præfigitur ſignum ejus quantitatis, ex qua ſubtractio facta eſt.
4. Si quantitates diverſis literis notatæ, ſigna ſubtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$$\begin{array}{l} 8a - 5c + 9d = 8\text{ th.} - 5\text{ gr.} + 9\text{ num.} \\ 6a - 8c - 7d = 6 \quad - 8 \quad - 7 \\ \hline 2a + 3c + 16d = 2\text{ th.} + 3\text{ gr.} + 16\text{ num.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9b + 15c - 7d + 8e - f \\ 6b + 20c - 9d - 9e + 7f \\ \hline 3b - 5c + 2d + 17e - 8f \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b - c \\ d - e + f \\ \hline a + b - c - d + e - f \end{array} \qquad \begin{array}{l} a + d \\ c - e - g \\ \hline a + d - c + e + g \end{array}$$

Demonstratio.

Cum quantitates eadem litera notatæ ſint vel unitates eædem, vel ejuſdem unitatis multiplæ aut ſubmultiplæ (§. 26); erit $8a - 6a = 2a$ (§. 35. 103 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ ſubtrahenda; erit reſiduum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§. 29). Sed $15c - 20c = -5c$, & $-7d + 9d = 2d$ (§. 27). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = -5c + 2d$. *Quod erat alterum.*

Si $-9e + 7f$ ſubtrahi debent ex $8e - f$; erit reſiduum $8e - f + 9e - 7f$ (§. 29). Sed $-f - 7f = -8f$, & $8e + 9e = 17e$ (§. 27). Ergo $8e - f + 9e - 7f = 17e - 8f$. *Quod erat tertium.*

Quartum patet per theorema 2 (§. 29).

Aliter.

1. Signa quantitatis ſubtrahendæ mutentur in contraria (§. 29): quo facto
2. Additio fiat (§. 27) ſeu, quæ ſe mutuo deſtruunt, deleantur.

E. gr. ſi ex $9b + 15c - 7d + 8e - f$ ſubtrahi debet $6b + 20c - 9d - 9e + f$, fiat (§. 29) $-6b - 20c + 9d + 9e - f$; erit (§. 27) reſiduum $3b - 5c + 2d + 17e - 2f$. Nimirum $+6b - 6b$, $+15c - 15c$, $-7d + 7d$, ſe mutuo deſtruunt (§. 21).

Scholion.

31. *Mirum videri poterat, quod cum quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ ſint (§. 23), heterogeneæ autem nec addi (§. 61 Arith.), nec a ſe invicem ſubtrahi poſſint (§. 64 Arith.), privativæ tamen poſitivis addantur & ab iis ſubtrahantur. Enimvero rem accuratius perpendens animadvertes proprie loquendo, privativam nunquam addi poſitivæ, nec ab eadem ſubtrahi: ſed in additione ſubtrahi, quod plus juſto fuerat additum (§. 27); in ſubtractione addi, quod plus juſto fuerat ſubductum (§. 30).*

Theorema 3.

32. *Si quantitas poſitiva per poſitivam*

tivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit positiva.

DEMONSTRATIO.

Est enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 66. *Arith.*). Sed uterque factor est positivus *per hypoth.* Ergo & factum positivum esse debet (§. 24). *Quod erat unum.*

Si $+a$ ducitur in $+b$; factum est $+ab$ *per demonstrata*. Ergo si $+ab$ dividitur per $+a$; quotus erit $+b$: si per $+b$; quotus $+a$ (§. 210 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 4.

33. *Si quantitas negativa per positivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit negativa.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem est ac quantitatem aliquam aliquoties sibimetipsi addere (§. 67 *Arith.*). Est vero summa quantitatum negativarum negativa (§. 27). Ergo factum ex negativa in positivam negativum est. *Quod erat unum.*

Factum ex $-a$ in $+b$ est $-ab$ *per demonstrata*. Ergo si $-ab$ dividitur per $+b$, quotus est $-a$ (§. 210 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 5.

34. *Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur; quantitas positiva prodit.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit (§. 66 *Arith.*): id quod ipsa notio quantitatis privativæ insinuat (§. 19), utpote quæ repugnat actui positivo, qualis est iterata ejusdem quantitatis additio, in qua multiplicatio consistit (§. 67 *Arith.*). Quare hæc multiplicatio proprie tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur, ita ut addi rursus debeat, quod plus justo fuerat subtractum: id quod evidentissime ita demonstramus.

Sit ACDB parallelogrammum rectangulum & in eo $AC = a$, $CD = b$. Ducatur EF ipsi CD parallela (§. 258 *Geom.*); erit ob angulos rectos ad E & F (§. 230 *Geom.*) & $EF = AB$, itemque $AE = BF$ (§. 238 *Geom.*), ABFE rectangulum (§. 100 *Geom.*). Eodem modo ostenditur, ducta HG ipsi BD parallela, fore GHBD & & BHIF, consequenter AEIH rectangula. Sit ergo $AE = c$, $GD = d$; erit $EC = a - c$, $CG = b - d$, atque hinc $ACDB = ab$, $AEIH = bc - dc$ & $HGDB = ad$ (§. 375 *Geom.* & §. 33 *Analys.*). Quodsi areas rectangulorum AI, & HD subtrahas ab area rectanguli AD; relinquitur area rectanguli ECGI, hoc est, factum ex $a - c$ in $b - d$ (§. 375 *Geom.*). Reperitur ideo $(a-c)(b-d) = ab - ad - bc + cd$ (§. 30).

Un-

Unde apparet, factum ex $-c$ in $-d$ esse $+cd$. *Quod erat unum.*

In divisione quærimus, quoties quantitas una in altera contineatur (§. 69 *Arith.*). Divisurus ergo quantitatem privativam per privativam quærit, quoties defectus unus in altero contineatur (§. 19): quotus ideo, qui idem indicat (§. 69 *Arith.*), utique quantitas positiva esse debet. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

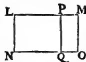
35. *Possunt etiam theorema 3 & 4 ope rectanguli demonstrari.*

THEOREMA 6.

36. *Si quantitas positiva per negativam multiplicatur aut dividitur; quantitas privativa prodit.*

DEMONSTRATIO.

Cum in multiplicatione quantitas multiplicanda toties sibimetipsi addatur, quoties multiplicans unitatem continet (§. 66 *Arith.*), quantitas vero privativa sit defectus alicujus quantitatis (§. 19): proprie loquendo positiva per privativam multiplicari nequit. Hinc denuo multiplicatio tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur, ita ut subtrahatur, quod plus justo fuit additum: id quod ita demonstramus. Sint LMON & PMOQ rectangula & in iis $NO = a$, $MO = b$, $QO = c$; erit $NQ = a - c$, area $PQOM = bc$, $LNOM = ab$ (§. 375 *Geom.*), consequenter $LNQP = b\,(a - c) = ab - bc$. Ergo b ductum in $-c$ efficit $-bc$. *Quod erat unum.*



Factum ex $-c$ in $-d$ est $+cd$ (§. 34). Ergo si $+cd$ dividis per $-c$, quotus esse debet $-d$ (§. 210 *Arith.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 7.

37. *In multiplicatione ac divisione eadem signa efficiunt* $+$, *diversa* $-$.

DEMONSTRATIO.

Si quantitates se mutuo multiplicantes aut dividentes fuerint positivæ vel privativæ; quantitas prodit in utroque casu positiva (§. 32. 34): si vero altera privativa, altera positiva; quantitas prodit privativa (§. 33. 36). Ergo eadem signa efficiunt $+$, diversa $-$. *Q. e. d.*

PROBLEMA 3.

38. *Quantitates tam eodem quam diversis signis affectas in se invicem ducere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 111 *Arith.*), nisi quod notetur regula: *eadem signa faciunt* $+$, *diversa* $-$ (§. 37).

$$\begin{array}{r} a + c \\ b + d \\ \hline + ad + cd \\ ab + bc \\ \hline ab + ad + bc + cd \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b - d \\ a - b - d \\ \hline - ad - bd + dd \\ - ab - bb + bd \\ aa + ab - ad \\ \hline aa - bb - 2ad + dd \end{array}$$

10

$$\begin{array}{rl} 10 = & 8 + 4 - 2 \\ 2 = & 8 - 4 - 2 \\ \hline & -16 - 8 + 4 \\ & -32 - 16 + 8 \\ & 64 + 32 - 16 \\ \hline 20 = & 64 \quad -48 \quad +4 \end{array}$$

Item
$$\begin{array}{rl} 8 = & 10 - 2 \\ 7 = & 10 - 3 \\ \hline & -30 + 6 \\ & 100 - 20 \\ \hline 56 = & 100 - 50 + 6 = 50 + 6 \end{array}$$

SCHOLION.

39. *Exemplum posterius demonstrationem exhibet oculorem multiplicationis per digitos. Nimirum 2 & 3 sunt distantiæ factorum a denario per digitos in utraque manu erectos repræsentari solitæ; quod relinquitur, factis ex distantiis istis in denarium a 100 subductis, indicatur digitis residuis in utraque manu &, ut ab erectis distinguantur, depressis, singulis nempe pro totidem denariis sumtis. Ita in nostro casu in altera manu deprimuntur digiti 2, in altera 3, simul 5, ideoque quinque numerantur decades. Summæ adjicitur factum ex digitis in utraque manu erectis in se invicem.*

PROBLEMA 4.

40. *Quantitates compositas dividere.*

RESOLUTIO.

Si quantitas una per alteram actu dividi potest, orta nempe ex divisore in aliam (§. 210 *Arith.*); divisio instituitur ut in numeris (§. 117 *Arith.*), notata tamen regula: *eadem signa faciunt* +, *diversa* — (§. 37).

In aliis casibus tantum observanda, quæ supra præcepimus (§. 8).

E. gr. dividere jubemur $aa - bb - 2ad + dd$ per $a - b - d$:

$$\begin{array}{l} a - b - d)\; aa - bb - 2ad + dd \;(a + b - d) \\ \quad aa - ab - ad \\ \hline \quad + ab - bb - ad + dd \\ \quad + ab - bl - bd \\ \hline \qquad + bd - ad + dd \\ \qquad - ad + bd + dd \\ \hline \qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

PROBLEMA 5.

41. *Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 236. 237 *Arith.*).

E. gr. sint fractiones addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductæ ad eandem denominationem erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$ (§. 235 *Arith.*). Ergo summa $\frac{ad + bc}{bd}$ (§. 27).

Similiter sit fractio $\frac{a}{b}$ subtrahenda ex $\frac{c}{d}$. Reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante. Ergo differentia $\frac{bc - ad}{bd}$ (§. 30).

PROBLEMA 6.

42. *Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.*

RESOLUTIO.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arithmetica communi (§. 239. 243 *Arith.*).

E. gr. Sint fractiones se mutuo multiplicaturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; erit factum $\frac{ac}{bd}$.

Sint fractiones se mutuo divisuræ $\frac{ac}{bd}$ & $\frac{a}{b}$; erit quotus $\frac{ac.b}{bd.a} = \frac{acb}{abd} = \frac{c}{d}$ (§. 231 *Arith.*).

COROLLARIUM I.

43. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§. 59 *Arith.*); erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc est, ex integra quantitate in fractam, $\frac{c.a}{d.1} = \frac{ac}{d}$. Unde patet, numeratorem

fra-

fractæ multiplicandum esse per integram, si fractio per integrum multiplicari debet: quemadmodum fit in Arithmetica communi (§. 242 *Arith.*).

Corollarium 2.

44. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a, hoc est, ex quantitate fracta per integram divisa, $\frac{c}{d} : a = \frac{c}{ad}$.

Unde patet, denominatorem dividendi multiplicandum esse per divisorem, & factum subscribendum numeratori immutato, si fractio per integrum dividenda.

Problema 7.

45. *Quantitatem quamcunque per divisorem compositum dividere, utut divisionem exactam non admittat.*

Resolutio.

Divisio instituatur ut in Arithmetica communi (§. 117 *Arith.*), tamdiu continuanda, donec quotus legem manifestet, juxta quam termini ejus in infinitum progrediuntur, observata subtractionis, itemque multiplicationis ac divisionis lege de signorum mutatione (§. 29. 37).

E. gr. Sit quantitas dividenda b, dividens $a + c$, erit:

$$a+c)\; b \;\left(\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} \text{ \&c. in infin.}\right.$$

$$b + \frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$$

$$+\frac{bc^2}{a^2}$$

$$+\frac{bc^2}{a^2} + \frac{bc^3}{a^3}$$

$$-\frac{bc^3}{a^3} \text{ \&c. in infin.}$$

Nimirum si b per a dividitur; quotus est $\frac{b}{a}$ (§. 8). Factum ex $\frac{b}{a}$ in $a + c$ est $\frac{ab}{a} + \frac{bc}{a}$ (§. 43), hoc est, $b + \frac{bc}{a}$ (§. 223 *Arith.*): quod ex dividenda b subductum relinquit $-\frac{bc}{a}$ (§. 30). Si porro $-\frac{bc}{a}$ per a dividitur; erit quotus $-\frac{bc}{a^2}$ (§. 44). Factum ergo ex $a + c$ in $-\frac{bc}{a^2}$, hoc est, $-\frac{abc}{a^2} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§. 43. 37), seu $-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$ (231 *Arith.*), ex dividenda $-\frac{bc}{a}$ subtractum relinquit $+\frac{bc^2}{a^2}$ (§. 30). Unde patet quomodo divisio continuanda. Inventis autem vel quinque terminis, tum quotus, tum ipsa divisionis ratio insinuat, quotum constare ex infinita terminorum serie, quorum numeratores sunt potentiæ ipsius c, quarum exponentes a numero ordinis unitate differunt, per b multiplicatæ; denominatores vero potentiæ ipsius a, quarum exponentes æquantur numero ordinis terminorum. E. gr. in termino tertio potentia ipsius c in numeratore secunda est, potentia vero ipsius a in denominatore tertia.

Corollarium 1.

46. Si $b = 1$ & $a = 1$, substituto valore hoc in quoto, prodit $1 - c + c^2 - c^3$ &c. in infin. Quare $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3$ &c. in infin.

Corollarium 2.

47. Quodsi termini in quoto continuo decrescant; series dat quotum vero quantumlibet propinquum. E. gr. si $b = 1$, $c = 1$ & $a = 2$; valoribus his substitutis in serie generali, aut divisione ut in exemplo universali instituta, reperietur $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. Ponamus jam seriem terminari in termino quarto; in defectu quidem peccabitur, sed qui minor quam $\frac{1}{32}$. Si eadem terminetur in sexto; denuo peccabitur in defectu, sed qui minor quam $\frac{1}{128}$. Series igitur quo longius continuatur, eo propius ad verum quotum accedit.

Scholion.

48. *Similiter invenitur* $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. in infin. $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4}$

$- \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$ &c. in infin. $\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$ &c. in infin. *En legem constantem, juxta quam omnes fractiones, quarum numerator unitas, per series infinitorum terminorum exprimere licet. Sunt nempe illæ series progressionis geometricæ decrescentes, ita quidem ut numerator semper sit unitas, denominator termini primi, qui simul exponens est rationis, unitate differat a denominatore fractionis resolvendæ.*

Corollarium 3.

49. Si termini in quoto continuo crescunt; series a quoto tanto magis discedit, quo longius continuatur, nec quoto æqualis fit, nisi terminetur, ultimumque residuum sub signo suo adjiciatur. E. gr. Sit $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; reperietur quotus $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128$ &c. Terminus unus 1 superat $\frac{1}{3}$ excessu $\frac{2}{3}$: termini duo deficiunt $\frac{4}{3}$. Termini tres excedunt $\frac{8}{3}$; quatuor deficiunt $\frac{16}{3}$. Et ita porro. Ponamus seriem terminari in -8; erit $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$. Sed $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$. Ergo $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$. Similiter si fit $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$; reperietur quotus $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. Ubi termini numero pares, eorum summa $= 0$, ac proinde deficiunt continuo $\frac{1}{2}$; termini autem numero impares conficiunt 1, consequenter excessus $= \frac{1}{2}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$, vel $= 0 + \frac{1}{2}$. Ponamus seriem universalem (§. 46) terminari in $-c^3$; erit $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} = \frac{1 + c - c - c^2 + c^2 + c^3 - c^3 - c^4 + c^4}{1+c}$ (§. 235 *Arith.*) $= \frac{1}{1+c}$ (21).

Scholion 1.

50. Tirones hoc problema cum suis corollariis sub initium prætermittere possunt, donec inferius ad illud provocetur.

Scholion 2.

51. Quoniam si $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ in seriem resolvitur, quotus a fractione proposita, quantumlibet continuatus, continuo differt $\frac{1}{2}$ (§. 49); resolutio in præsenti casu irrita evadit. Unde patet fons erroris, quem commisit Guido Grandus *in Tractatu de quadratura circuli & hyperbolæ cor. 3. prop. 7. part. 1. p. m. 29, ubi infert ob $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. in infinitum $= 0$ summam infinitarum nullitatum esse $\frac{1}{2}$. Nec veritatem attigisse liquet* Leibnitium *in Actis Eruditorum Tom. 5. Supplement. p. 264. & seqq.*

Definitio 4.

52. Series, *quæ ad verum valorem continuo appropinquant, dicuntur* convergentes: *quæ ab eodem continuo recedunt*, divergentes.

Corollarium 1.

53. Ergo series fractionum continuo decrescentium (§. 47. 48) sunt convergentes: ceteræ vero, quarum termini continuo crescunt (§. 49), divergentes.

Problema 8.

54. *Potentiam quamcunque per aliam ejusdem radicis multiplicare vel dividere.*

Resolutio.

I. In multiplicatione addantur exponentes; summa est exponens facti.

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & y^m & y^m & a^m & x^n \\ x^4 & y^m & y^n & a^r & x^s \\ \hline x^7 & y^{2m} & y^{m+n} & a^{m+r} & x^{n+s} \end{array}$$

II. In divisione exponens dignitatis dividentis subtrahatur ab exponente dividendæ; residuum est exponens quoti.

$$\begin{array}{c} x^7 \\ x^4 \end{array}\Big(x^3 \qquad \begin{array}{c} y^{m+n} \\ y^n \end{array}\Big(y^m \qquad \begin{array}{c} a^m x^n \\ a^r x^s \end{array}\Big(a^{m-r} x^{n-s}$$

Demonstratio.

Cum exponentes dignitatum in progressione Arithmetica a cyphra sive 0 incipiente (§. 251. 333 *Arith.*), dignitates in Geometrica, cujus terminus primus unitas (§. 250. 332 *Arith.*), progrediantur; illi pro harum Logarithmis recte habentur (§. 334 *Arith.*). Ergo summa exponentium, quos habent dignitates se mutuo multiplicantes, est exponens facti (§. 337 *Arith.*):

Arith.) : differentia exponentium, quos habent dignitates se mutuo dividentes, est exponens quoti (§. 343 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

55. *Progressiones istæ hæ sunt:*

$x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$ &c.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c.

Nempe $x : x = x^1 : x^1 = x^0$ (§. 54). *Sed* $x : x = 1$ (§. 69 Arith.). *Ergo* $x^0 = 1$ (§. 87 Arith.).

PROBLEMA 9.

56. ***Potentiam quamcunque datam ad aliam dati exponentis evehere, aut ex eadem dati similiter exponentis radicem extrahere.***

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data intuitu ejus, ad quam evehenda, radix est (§. 246 *Arith.*), & exponentes logarithmi dignitatum existunt *per demonstr. in probl. præc.* (§. 54); exponens potentiæ novæ habebitur, potentiæ datæ exponente in exponentem ejus, ad quam evehi debet, ducto (§. 341 *Arith.*).

E. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem n est x^{mn}. Potentia y^3 evecta ad dignitatem 2 est y^6.

II. Non absimili modo liquet, exponentem radicis haberi, si exponens dignitatis datæ dividatur per exponentem radicis datum (§. 341 *Arith.*).

E. gr. Radix quadrata ex x^6 est x^3. Radix n ex x^{mn} est x^m. Radix n ex x^m est $x^{m:n}$.

COROLLARIUM.

57. Est itaque $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$, $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 341 *Arith.*), consequenter quantitates irrationales ad expressionem rationalem reduci possunt.

SCHOLION.

58. *Quantum in Analysi commodi afferat hæc reductio, ex capite subsequente elucescet. Etenim si quantitates irrationales ad formam rationalium reducantur: peculiari pro iis calculo opus non est, sed rationalium instar tractari possunt: quemadmodum primi docuerunt* Leibnitius *atque* Nevvtonus.

CAPUT II.

De Arithmetica Irrationalium.

PROBLEMA 10.

59. ***Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.***

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ & $\sqrt[s]{y^r} = y^{r:s}$ (§. 57); diversitas denominationis ab exponentibus diversis pendet, exponentes vero fractiones sunt, quæ ad alias ipsis æquales, sed ejusdem denominationis reduci possunt (§. 235 *Arithm.*). Ergo quantitates surdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit ideo $x^{n:m} = x^{ns:ms}$ & $y^{r:s} = y^{mr:ms}$, seu $x^{n:m} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $y^{r:s} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$ (§. 57).

 E. gr.

E. gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5}$. Quooiam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§. 57); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§. 235 *Arith.*), hoc est, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 57), seu, 2 actu ad potentiam tertiam, & 5 ad secundam evehendo, $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

SCHOLION

60. *Quodsi quis ægre admiseris reductionem ad eandem denominationem in exponentibus quantitatum irrationalium factam; is easdem formulas, quas ejus ope elicnimus, per algebram investigare potest, quemadmodum inferius docebimus* (§. 146).

PROBLEMA 11.

61. *Quantitates irrationales ad simpliciorem expressionem reducere.*

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Quoniam ea æqualis est ipsi $a^{n:m} x^{m:m}$ (§. 57) & $x^{m:m} = x$ (§. 56); erit $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$. Locum ergo habet reductio, si quantitas sub signo radicali per istiusmodi potentiam, quæ eundem cum radicali signo exponentem habet, divisibilis. Divisio nempe actu instituenda, quoto sub signo radicali relicto & divisoris radice eidem præfixa.

E. gr Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2}$. Quoniam 8 est cubus perfectus, cujus radix 2: habebimus $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$. Eodem modo reperitur $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

COROLLARIUM 1.

62. Si quantitates irrationales ejusdem gradus ad simpliciorem expressionem reductæ sub signis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter se ut quantitates rationales signis præfixæ (§. 178 *Arith.*), consequenter quantitates irrationales inter se commensurabiles esse possunt (§. 160. *Arithm.*).

E. gr. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$, & $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$. Ergo $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2:3$, hoc est, $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2:3$. In casu reliquo sunt incommensurabiles.

SCHOLION 1.

63. *Istud quantitatum irrationalium genus* communicantium *nomine venire solet.*

COROLLARIUM 2.

64. Per præsens igitur problema iovenitur ratio rationalis irrationalium, si qua datur.

COROLLARIUM 3.

65. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m} = x\sqrt[m]{a^n}$ (§. 61); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis ad pure irrationalem reducitur, si quantitas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens signo radicali suprapositus & dignitas per quantitatem sub signo radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$, & $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

SCHOLION 2.

66. *Quodsi quæsiveris, quomodo in resolutione innotescat, utrum quantitas sub signo radicali posita per potentiam aliquam requisitam sit divisibilis, nec ne, & quænam sit ista potentia; in divisores resolvenda est, inter quos locum obtineant necesse est omnes potentiæ a prima usque ad requisitam, si cum numeris nobis res fuerit. E. gr. Quæritur an* $\sqrt[4]{368}$ *sit divisibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Resoluturus numerum* 368 *in suos divisores, reperies*

2	184
4	92
8	46
16	23

tentando nempe divisionem per numeros minores & quotos majores a latere ponendo. Invenies hic 2 *potentiam primi gradus,* 4 *potentiam secundi,* 8 *potentiam tertii &* 16 *potentiam quarti. Ergo* 16 *est divisor quæsitus, consequenter* $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$.

PROBLEMA 12.

67. *Quantitates irrationales addere, aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Si quantitates irrationales fuerint communicantes, ideoque reductæ (§. 61) fuerint commensurabiles (§. 62);

62); quantitates rationales extra vinculum adduntur & a se invicem subtrahuntur, ibique summa, hic differentia denuo præfigitur signo radicali. Reliqua omnia sunt ut in additione & subtractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ (§. 61) $= 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ (§. 65), & $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, & $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum sint incommensurabiles (§. 62); summa erit $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (§. 27), & differentia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (§. 30).

Hinc & intelliguntur exempla in compositis tum in additione

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5} \\ \sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5} \\ \hline \end{array}$$

Summa $5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5}$
hoc est, $\sqrt{3.25} + \sqrt{2.16} + \sqrt{7.100} + \sqrt{5.16}$
seu $\sqrt{75} + \sqrt{32} + \sqrt{700} + \sqrt{80}$

tum in subtractione

$$\begin{array}{l} 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10} \\ 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10} \\ \hline \end{array}$$

Differentia $2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10}$
hoc est, $\sqrt{2.4} - \sqrt{3.144} + \sqrt{10.289}$
seu $\sqrt{8} - \sqrt{432} + \sqrt{2890}$

DEMONSTRATIO.

Omnia manifesta sunt ex demonstratione probl. 1 & 2 (§. 27. 30).

PROBLEMA 13.

68. *Quantitates irrationales per irrationales multiplicare ac dividere.*

RESOLUTIO.

Multiplicentur aut dividantur quantitates sub signo radicali; ibi facto, hic quoto præfigatur signum idem radicale cum suo exponente. Quodsi radicales quantitates fuerint diversæ denominationis; ante omnia reducantur ad eandem (§. 59).

E. gr. in multiplicatione $\sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{15}$, & $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$. Item in compositis

$$\begin{array}{r} \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \hline -\sqrt{6} - 2 \\ 3 + \sqrt{6} \quad\quad \\ \hline 3 - 2 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \hline +\sqrt{6} + 3 \\ 2 + \sqrt{6} \quad\quad \\ \hline 2\sqrt{6} + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\sqrt{3} - 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{8} + 3\sqrt{6} \\ \hline + 21\sqrt{18} - 15\sqrt{12} \\ 35\sqrt{24} - 100 \quad\quad\quad\quad \\ \hline 35\sqrt{24} + 21\sqrt{18} - 15\sqrt{12} - 100 \end{array}$$

h. e. $70\sqrt{6} + 63\sqrt{2} - 30\sqrt{3} - 100$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{32} \\ \sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{32} \\ \hline +16 + 8 + 32 \\ +4 + 2 + 8 \quad\quad \\ 8 + 4 + 16 \quad\quad\quad \\ \hline 8 + 8 + 34 + 16 + 32 = 98 \end{array}$$

Similiter in divisione $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$, & $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$. Item in compositis

$$\begin{array}{l} \sqrt{3}\ )\ \sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{12}\ (\sqrt{5} - \sqrt{2} + 2 \\ \quad\quad \sqrt{15} \\ \quad\quad \overline{\quad\quad - \sqrt{6} + \sqrt{12}} \\ \quad\quad\quad\quad - \sqrt{6} \\ \quad\quad\quad\quad \overline{\quad\quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2\sqrt{3} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overline{\quad\quad 0} \end{array}$$

SCHOLION 1.

69. *Interdum etiam divisio locum habet, si divisor compositus est. Sed cum rarissimus sit ejus usus & ea divisione ignorata maxime præclaros in Analysi progressus facere detur, nec difficultate res careat; eam hic exponi superfluum judicamus. Docet ipsam* Ozanamus *in Novis Elementis Algebræ* (a).

SCHOLION 2.

70. *Ceterum ex tradito hactenus calculo liquet, si quantitatem duplici signo radicali affici contingat, e.* gr.

(a) Nouveaux Elemens d'Algebre lib. 1. probl. 4. & seqq. p. 7. & seqq.

gr. si fuerit $(3+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}}$, *operationes omnes eodem modo peragi, dummodo noteur, quantitatem sub primo vinculo eodem modo tractari debere, quo rationalem in antecedentibus tractavimus. E. gr.*

$$\sqrt{(8\sqrt{3})} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})}\ (\S.\ 61)$$
$$\sqrt{(9\sqrt{12})} = \sqrt{(2.9\sqrt{3})} = 3\sqrt{(2\sqrt{3})}$$
$$\overline{\sqrt{(8\sqrt{3})}+\sqrt{(9\sqrt{12})} = 5\sqrt{(2\sqrt{3})}}$$
$$= \sqrt{(50\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{\sqrt{7500}}.$$

Similiter in multiplicatione

$$3+\sqrt{2}$$
$$\sqrt{\sqrt{2}}$$
$$\overline{3\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{(2\sqrt{2})}}$$
h.e. $\sqrt{(9\sqrt{2})}+\sqrt{(2\sqrt{2})}$
seu $\sqrt{\sqrt{162}}+\sqrt{\sqrt{8}}$

$$\sqrt{\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{(5\sqrt{5})}$$
$$\overline{5+\sqrt{(5\sqrt{10})}}$$
seu $5+\sqrt{\sqrt{250}}$

$$\sqrt{(3+\sqrt{2})}$$
$$\sqrt{(5-\sqrt{3})}$$
$$\overline{-3\sqrt{3}-\sqrt{6}}$$
$$15+5\sqrt{2}$$
$$\overline{\sqrt{(15+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6})}}$$

$$\sqrt{(3+\sqrt{2})}$$
$$\sqrt{(3-\sqrt{2})}$$
$$\overline{-3\sqrt{2}-2}$$
$$9+3\sqrt{2}$$
$$\overline{\sqrt{7}}$$

Dicuntur istiusmodi Radices, *qualis est* $\sqrt{(3+\sqrt{2})}$, universales.

SCHOLION 3.

71. Radices *vero* imaginariæ *dicuntur, si quantitas sub signo radicali fuerit negativa, veluti* $\sqrt{-2}$, *cum quadratum* -2 *sit quantitas impossibilis, propterea quod omne quadratum sit positivum* (§. 246 Arith. & §. 37 Anal.). *Facile autem patet additionem & subtractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium.* Ita $\sqrt{-18}+\sqrt{-8} = 3\sqrt{-2}+2\sqrt{-2} = 5\sqrt{-2} = \sqrt{-50}$, & $\sqrt{-18}-\sqrt{-8} = \sqrt{-2}$. *Quoniam vero quantitas privativa sub signo radicali consideratur instar positivæ; in multiplicatione signum non mutatur, sed facto perinde ac factoribus præfigitur signum* $-$, *alias enim factores imaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum. Quamobrem regula de signis tantummodo observatur respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali positarum.*

E. gr. $\sqrt{-5}-\sqrt{-7}$
$$\sqrt{-3}$$
$$\overline{\sqrt{-15}-\sqrt{-21}}$$

$$\sqrt{-3}+\sqrt{-2}$$
$$\sqrt{-3}$$
$$\overline{-3+\sqrt{-6}}$$

$$\sqrt{-8}+\sqrt{-2}$$
$$\sqrt{-8}-\sqrt{-2}$$
$$\overline{+4+2}$$
$$-8-4$$
$$\overline{-6}$$

Nimirum $\sqrt{-2}.\sqrt{-2} = -2$, & $+1.-1 = -1$. *Ergo* $-1.-2 = +2$.

$$3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3}$$
$$3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2}$$
$$\overline{-6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6}}$$
$$-45+6\sqrt{-15}$$
$$\overline{-45-6\sqrt{-10}+6\sqrt{-15}-4\sqrt{-6}.}$$

CAPUT III.

De Usu Calculi Literalis in Inveniendis Theorematis.

PROBLEMA 14.

72. *Invenire, qualis numerus prodeat ex parium additione, subtractione, ac multiplicatione.*

Quoniam numerus par per 2 dividi potest (§. 72 *Arith.*), dicatur $2a$. Similiter alius numerus par sit $= 2c$. Erit

$2a$	$2a$	$2a$
$2c$	$2c$	$2c$
Sum. $2a+2c$	Diff. $2a-2c$	Fact. $4ac$

Theorema: Summa, item differentia atque factum duorum numerorum parium est numerus par.

PROBLEMA 15.

73. *Invenire, qualis numerus prodeat,*

eat, si parem impari addas, vel parem ab impari subtrahas, vel denique parem per imparem multiplices.

Numerus par sit $2a$ (§. 72 *Arith.*), impar $2c+1$ (§. 73 *Arith.*). Erit

$$\begin{array}{r} 2c+1 \\ 2a \\ \hline \text{Sum. } 2a+2c+1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2c+1 \\ 2a \\ \hline \text{Differ. } 2c+1-2a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2c+1 \\ 2a \\ \hline \text{Factum } 4ac+2a \end{array}$$

Theorema: Si parem impari addas, aut unum ex altero subtrahas; ibi aggregatum, hic differentia est numerus impar. Si vero numerus par & impar se mutuo multiplicent; factum est numerus par.

PROBLEMA 16.

74. *Invenire, qualis prodeat numerus, si impar impari addatur, aut unus ex altero subtrabatur, aut si impar imparem multiplicet.*

Sint numeri impares $2a+1$ & $2b+1$ (§. 73 *Arith.*): erit

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline \text{Sum. } 2a+2b+2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline \text{Differ. } 2a-2b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline +2a+1 \\ 4ab+2b \\ \hline \text{Factum } 4ab+2a+2b+1 \end{array}$$

Theorema: Si numerus impar impari additur, aut ab eo subtrahitur; ibi summa, hic differentia est numerus par. Si vero impar imparem multiplicet; factum est numerus impar.

PROBLEMA 17.

75. *Invenire, qualis numerus prodeat, si meros numeros pares, aut numeros impares multitudine pari, aut denique numeros impares multitudine impari addas.*

Sint numeri pares $2a$, $2b$, $2c$, $2d$ &c. erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. numerus par (§. 72 *Arith.*).

Theorema: Summa numerorum parium quotcunque est numerus par.

Sint numeri impares $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. (§. 73 *Arith.*), numerus eorundem $2m$ (§. 72 *Arith.*). Erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m$, numerus par (§. 72 *Arith.*). Tot scilicet sunt unitates, quot termini.

Theorema: Summa numerorum imparium quotcunque multitudine pari est numerus par.

Sint numeri impares ut ante $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. numerus eorundem $2m+1$. Erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m+1$, numerus impar (§. 73 *Arith.*).

Theorema: Summa numerorum imparium quotcunque, si numero impares fuerint, est numerus impar.

SCHOLION.

76. *Notetur in his problematibus denominandi artificium, quod consistit in analytica expressione numeri paris & imparis, qua eorum definitiones repræsentat.*

PROBLEMA 18.

77. *Invenire qualis sit numerus, per quem impar parem metitur.*

Quodsi numerus impar parem metitur; erit par factum ex impari per parem (§. 74 *Arith.* & §. 73 *Anal.*), ideoque $(2a+1)2b = 4ab+2b$. Est igitur $(4ab+2b):(2a+1) = 2b$ (§. 210 *Arith.*).

Theorema: Impar metiens parem eum metitur per parem.

COROLLARIUM I.

78. Patet simul, numerum, qui metitur parem per imparem, esse parem.

Co-

COROLLARIUM 2.

79. Et quoniam $(2ab+b):(2a+1)=b$; liquet porro, si impar metiatur parem, illum quoque hujus dimidium metiri.

PROBLEMA 19.

80. *Invenire qualis sit numerus, per quem impar imparem metitur.*

Quodsi impar imparem metitur; erit hic factum ex impari in imparem (§. 74 *Arith.* & §. 74 *Anal.*), ideoque $(2a+1)(2b+1)$ seu $4ab+2a+2b+1$. Est igitur $(4ab+2a+2b+1):(2a+1)=2b+1$ numerus impar (§. 210 *Arith.*).

Theorema: Impar metiens imparem eum metitur per imparem.

PROBLEMA 20.

81. *Determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt.*

Sit radix una $=n$; erit altera $n+1$,

quadratum majoris	n^2+2n+1	(§. 246
minoris	n^2	*Arith.*)
Differentia	$2n+1$	

Theorema: Differentia duorum quadratorum, quorum radices unitate differunt, est numerus impar duplo radicis minoris unitate aucto aequalis, seu summa radicum.

COROLLARIUM 1.

82. Facillime ergo construuntur Tabulae numerorum quadratorum pro radicibus in serie naturali progredientibus. Summa nempe radicis antecedentis & consequentis continuo additur quadrato antecedenti, ut prodeat consequens.

COROLLARIUM 2.

83. Si $n=1$, erit $2n+1=3$: si $n=2$, erit $2n+1=5$: si $n=3$, erit $2n+1=7$: si $n=4$, erit $2n+1=9$ &c. Differentiae itaque numerorum quadratorum sunt numeri impares in continua serie progredientes: unde ex continua numerorum imparium additione nascuntur numeri quadrati.

Radic.	Num. impar.	Num. Quadr.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

PROBLEMA 21.

84. *Determinare differentiam duorum cuborum, quorum radices unitate differunt, & cuborum trium in serie naturali differentias secundas.*

Sint radices n & $n+1$: erit (§. 248 *Arith.*)

Cubus major	n^3+3n^2+3n+1
minor	n^3
Differentia	$3n^2+3n+1$

hoc est, $n^2+2n+1+2n^2+n$. Sed $n^2+2n+1=(n+1)^2$. Ergo differentia inventa $(n+1)^2+2n^2+n$.

Theorema 1: Differentia duorum numerorum cubicorum, quorum radices unitate differunt, est aggregatum ex quadrato radicis majoris, duplo quadrato minoris & radice minore.

Sit jam radix tertia $n+2$: erit (*§. cit.*)

Cubus	$n^3+6n^2+12n+8$
praecedens major	n^3+3n^2+3n+1
Differentia	$3n^2+9n+7$
Differentia praecedens	$3n^2+3n+1$
Differentia secunda	$6n+6$

Theorema 2: Differentia secunda trium cuborum in serie naturali est aggregatum ex sextuplo radicis primae & senario, seu productum ex radice secunda in senarium.

Quodsi

Quodsi jam $n=1$; erit $6n+6=6+6=12$: si $n=2$; $6n+6=12+6=18$: si $n=3$; $6n+6=18+6=24$: si $n=4$; $6n+6=24+6=30$ &c.

Theorema 3: Differentiæ secundæ cuborum in serie naturali progredientium est progressio arithmetica, cujus terminus primus 12, differentia terminorum 6.

COROLLARIUM.

85. Constructo itaque numerorum quadratorum canone (§. 82), per solam additionem inde porro construitur canon numerorum cubicorum per theorema primum, nondum constructo per tertium, quemadmodum ex sequente Tabula liquet.

Rad.	Cubi	Diff. I.	Diff. II.
1	1	1	
2	8	7	6
3	27	19	12
4	64	37	18
5	125	61	24
6	216	91	30
7	343	127	36
8	512	169	42
9	729	217	48
10	1000	271	54

PROBLEMA 22.

86. *Determinare quantitatem rectanguli ex summa duarum quantitatum in majorem vel in minorem, itemque in differentiam earundem.*

Sit quantitas major Q, minor q; erit summa $Q+q$, differentia $Q-q$. Hinc (§. 375 *Geom.*)

$$\begin{array}{ccc} Q+q & Q+q & Q+q \\ Q & q & Q-q \\ \hline Q^2+Qq & Qq+q^2 & -Qq-q^2 \\ & & Q^2+Qq \\ \hline & & Q^2-q^2 \end{array}$$

Theorema: Rectangulum ex summa duarum quantitatum (e. gr. linearum) in alterutram, æquatur rectangulo partis unius in alteram, atque quadrato partis alterutrius. Rectangulum vero ex summa in differentiam æquale est differentiæ quadratorum partium.

COROLLARIUM.

87. Quodsi rectangula Q^2+Qq & $Qq+q^2$ addantur; prodit $Q^2+2Qq+q^2$ quadratum ipsius $Q+q$ (§. 261 *Arith.*). Quare rectangula ex toto in partem alterutram simul æquantur quadrato totius.

PROBLEMA 23.

88. *Si totum sit divisum in duas partes æquales & in duas inæquales; determinare rectangulum partium inæqualium.*

Sint partes æquales a & a, differentia inter partem æqualem & inæqualem b; erit inæqualium major $a+b$, minor $a-b$ (§. 39 *Trigon.*), consequenter $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Ergo si addatur b^2, habebitur a^2.

Theorema: Si totum sit divisum in duas partes æquales & inæquales; erit rectangulum partium inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali, æquale quadrato partis æqualis.

COROLLARIUM.

89. Quoniam $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ & $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (§. 261 *Arith.*); erit summa $2a^2+2b^2$, hoc est, summa quadratorum partium inæqualium æqualis est duplo quadrato partis dimidiæ & duplo quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

PROBLEMA 24.

90. *Determinare alia rectangula ex partibus duabus, in quas totum aliquod divisum.*

Sint partes Q & q; erit totum $Q+q$, hujus quadratum $Q^2+2Qq+q^2$. Quodsi Q^2 addas; prodibit $2Q^2+2Qq+q^2=2Q(Q+q)+q^2$.

Theorema: Quadratum totius una cum quadrato partis unius æquale est rectangulo ex duplo ejusdem partis in totum atque quadrato partis alterius.

Quodsi $2Q+q$ in seipsum ducas; prodibit $4Q^2+4Qq+q^2$.

Theorema: Quadratum ex toto & parte una æquatur quadrato partis alterius una cum quadruplo quadrato partis illius & quadruplo rectangulo partium in se invicem.

PROBLEMA 25.

91. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in partes tres inæquales diviso atque parte una.*

Sit totum $a+b+c$; erit $(a+b+c)c = ac+bc+c^2$.

Theorema: Rectangulum ex toto in tres partes inæquales diviso in partem unam æquatur quadrato ejusdem partis atque rectangulo ex eadem in summam duarum reliquarum.

PROBLEMA 26.

92. *Determinare quantitatem rectanguli ex linea in partes quotcunque divisa & insecta altera.*

Sint partes lineæ sectæ a, b, c &c. erit linea secta $= a+b+c$ &c. Sit porro linea insecta $= d$: erit $(a+b+c$ &c.$)d = ad+bd+cd$ &c.

Theorema: Si linea recta fuerit in partes quotcunque divisa & præterea alia insecta; erit rectangulum sub iis comprehensum æquale rectangulis sub insecta & singulis sectæ partibus contentis.

PROBLEMA 27.

93. *Determinare quantitatem rectangulorum ex toto in duas partes diviso in partes singulas.*

Sit totum $= a+b$; erit $(a+b)a = a^2+ab$, & $(a+b)b = ab+b^2$. Ergo summa $= a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ (§. 261 *Arith*).

Theorema: Si recta secta sit utcunque; erunt rectangula sub tota & partibus comprehensa quadrato totius æqualia.

PROBLEMA 28.

94. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in duas partes æquales diviso & adjecto in adjectum.*

Sit totum in duas partes æquales divisum $= 2a$ & adjectum $= c$; erit compositum $= 2a+c$, consequenter $(2a+c)c = 2ac+c^2$. Sed $(a+c)^2 = a^2+2ac+c^2$. Ergo differentia $= a^2$.

Theorema: Rectangulum sub toto & adjecto in adjectum una cum quadrato partis dimidiæ est æquale quadrato compositi ex dimidio & adjecto.

PROBLEMA 29.

95. *Invenire theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo.*

Sit $a+b$ radix binomia. Ducatur ea in se ipsam, erit $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ &c. (§. 250 *Arith.*): ceu videre est ex Tabula, quam hic exhibemus.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

Ex tabulæ hujus consideratione manifestum est, terminos potentiarum componi ex quibusdam factis literalibus & numeris præfixis, quos *Uncias* cum *Oughtredo* (a) vocant. Patet autem ulterius, facta reperiri, si fiant duæ progressiones Geometricæ, quarum prima a potentia desiderata partis primæ radicis incipiat & in unitate desinat, altera vero ab unitate incipiat & in desiderata potentia partis secundæ radicis desinat, atque termini ejusdem ordinis in utraque serie in se invicem ducantur. E. gr. quærenda potentia sexta: scribe

$a^6,\ a^5,\ a^4,\ a^3,\ a^2,\ a,\ 1,$ series I.
$1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,\ b^6,$ series II.

erunt $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$ facta, ex quibus componitur potentia sexta ipsius $a + b$.

Apparet denique, uncias reperiri, si exponentes potentiarum secundæ seriei seu ipsius b sub exponentibus potestatum primæ seriei seu ipsius a scribantur & nota prima ex serie superiore sumatur pro numeratore, prima ex inferiore pro denominatore fractionis, quæ vicem subit unciæ termini secundi potestatis; similiter factum ex nota prima in secundam ex serie superiore sumatur pro numeratore, factum ex prima in secundam ex serie inferiori pro denominatore fractionis, quæ unicæ termini tertii potentiæ æqualis &c. E. gr. pro potentia sexta erit

$$\frac{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}$$

Hinc $\frac{6}{1} = 6$ uncia termini secundi potentiæ sextæ; $\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = \frac{30}{2} = 15$ uncia termini tertii; $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{120}{6} = 20$ uncia termini quarti; $\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = \frac{30}{2} = 15$ uncia termini quinti; $\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{6}{1} = 6$ uncia termini sexti; $\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 1$ uncia termini ultimi.

Habemus igitur methodum datam radicem binomiam ad quamcunque potentiam determinatam evehendi. Quodsi vero regulam pro potentia indeterminata desideres, non alia re opus est, quam ut exponens dicatur m: ita habebimus

$a^m,\ a^{m-1},\ a^{m-2},\ a^{m-3},\ a^{m-4},\ a^{m-5}$
$1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5$ &c.

ideoque $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5$ &c. quæ sunt facta pro terminis potentiæ indeterminatæ in infinitum continuandæ. Similiter inveniuntur unciæ ut ante. Cum enim exponentes sint

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6}$$ &c. erit

$\frac{m}{1}$ uncia termini secundi potentiæ,

$\frac{m.m-1}{1.2}$ uncia tertii,

$\frac{m.m-1.m-2}{1.2.\ 3}$ uncia quarti,

$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.\ 3.\ 4}$ uncia quinti,

$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.\ 3.\ 4.\ 5}$ uncia sexti,

$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$ uncia septimi (&c.

Quare si has uncias in facta ipsis respondentia & paulo ante reperta ducas; prodibit formula binomii ad potentiam indeterminatam elevati:

(a) Clavis Mathematicæ cap. 12. §. 6. p. m. 36.

$$a^m$$
$$+\frac{m}{1}a^{m-1}b$$
$$+\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}a^{m-5}b^5$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}a^{m-6}b^6$$

&c. in infinitum.

Quoniam vero $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a^2$, $a^{m-3} = a^m : a^3$, $a^{m-4} = a^m : a^4$, $a^{m-5} = a^m : a^5$ &c. in infinit. (§. 54); his valoribus substitutis (§. 15 *Arith.*), formula in sequentem degenerat:

$$a^m$$
$$+\frac{m.a^m b}{1.a}$$
$$+\frac{m.m-1.a^m b^2}{1.2.a^2}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.a^m b^3}{1.2.3.a^3}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.a^m b^4}{1.2.3.4.a^4}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^m b^5}{1.2.3.4.5.a^5}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^m b^6}{1.2.3.4.5.6.a^6}$$

&c. in infinitum.

Quodsi jam porro cum viro summo, *Isaaco Newtono* (a) ponamus $a = P$, & $b : a = Q$; erit $a^m = P^m$, $b^2 : a^2 = Q^2$, $b^3 : a^3 = Q^3$, $b^4 : a^4 = Q^4$, $b^5 : a^5 = Q^5$ &c. consequenter his valoribus substitutis formula

$$P^m$$
$$+\frac{m}{1}P^m Q$$
$$+\frac{m.m-1}{1.2}P^m Q^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}P^m Q^3$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}P^m Q^4 \text{ \&c.}$$

Ponatur porro $P^m = A$; erit

$$\frac{m}{1}P^m Q = \frac{m}{1}AQ.$$

Sit $\frac{m}{1}P^m Q = B$; erit $\frac{m.m-1}{1.2}P^m Q^2 = \frac{m-1}{2}BQ.$

Sit $\frac{m-1}{2}BQ = C$; erit $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}P^m Q^3 = \frac{m-2}{3}CQ.$

Sit $\frac{m-2}{3}CQ = D$; erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}P^m Q^4 = \frac{m-3}{4}DQ.$

Sit $\frac{m-3}{4}DQ = E$; erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4.}\frac{m-4}{5}P^m Q^5 = \frac{m-4}{5}EQ.$

Sit $\frac{m-4}{5}EQ = F$; erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4.}\frac{m-4.m-5}{5.6}P^m Q^6 = \frac{m-5}{6}FQ$

&c. in infinitum

Habetur ergo tandem

$$(a+b)^m = (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}FQ \text{ \&c. in infinit.}$$

SCHOLION I.

96. *Equidem hoc theorema nonnisi per inductionem eruimus, quae inter demonstrandi methodos locum minime habet: sed cum haec inductio fundetur in obser-*

(a) In epistola A. 1676. ad *Leibnitium* data apud *Wallisium* Operum Vol. III. f. 622.

observatione legis constantis atque necessariæ, in inveniendo tuto adhibetur, etsi consultum sit, reperta alio postea modo demonstrari.

SCHOLION 2.

97. *Ut vero theorema facilius intelligatur, exemplo numerico id illustrare lubet. Ponamus ergo inveniri debere dignitatem quartam radicis* 18 *seu* 10+8: *erit* $m=4$, $P=10$, $Q=8:10=\frac{4}{5}$, *consequenter*

$$P^m=10^4=10000=A$$

$$\frac{m}{1}AQ=4.10000.\tfrac{4}{5}=\frac{160000}{5}=32000=B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ=\tfrac{3}{2}.32000.\tfrac{4}{5}=\tfrac{6}{5}.32000=6.6400=38400=C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ=\tfrac{2}{3}.38400.\tfrac{4}{5}=\tfrac{8}{15}.38400=\frac{307200}{15}=20480=D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ=\tfrac{1}{4}.20480.\tfrac{4}{5}=\tfrac{1}{5}.20480=\frac{20480}{5}=4096=E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ=0.4096.\tfrac{4}{5}=0.$$

10000	= A
32000	= B
38400	= C
20480	= D
4096	= E
104976	Dignitas quarta ipsius 18.

Eadem dignitas invenitur, si 18 *in duas quascunque partes alias, e. gr. in* 6 *&* 12 *secetur: quo in casu erit* $P=6$ & $Q=12:6=2$, *consequenter*

$$P^m=6^4=1296=A$$

$$\frac{m}{1}AQ=4.1296.2=8.1296=10368=B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ=\tfrac{3}{2}.10368.2=3.10368=31104=C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ=\tfrac{2}{3}.31104.2=\tfrac{4}{3}.31104=\frac{124416}{3}=41472=D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ=\tfrac{1}{4}.41472.2=\tfrac{2}{4}.41472=\frac{41472}{2}=20736=E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ=0.20736.2=0.$$

1296	= A
10368	= B
31104	= C
41472	= D
20736	= E
104976	Dignitas quarta ipsius 18.

Patet igitur seriem terminari, si m *explicetur per numerum determinatum.*

COROLLARIUM I.

98. Si m explicetur per numerum fractum; series $P^m+\frac{m}{1}AQ+\frac{m-1}{2}BQ$ &c. exprimet radicem indeterminatam ipsius $P+PQ$ (§. 57), ideoque idem theorema extractioni radicis inservit. E. gr. Sit ex $aa-xx$ extrahenda radix quadrata; erit $m=\frac{1}{2}$ (§. cit.), $P=a^2$ & $Q=-x^2:a^2$. Unde

$$P^m=a^{2:2}=a=A$$

$$\frac{m}{1}AQ=\tfrac{1}{2}a.-x^2:a^2=-\frac{x^2}{2a}=B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ=(\tfrac{1}{2}-1):2.\frac{-x^2}{2a}.\frac{-x^2}{a^2}=\frac{1-2}{4}.\frac{x^4}{2a^3}=\frac{-x^4}{8a^3}=C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ=(\tfrac{1}{2}-2):3.\frac{-x^4}{8a^3}.\frac{-x^2}{a^2}=\frac{1-4.x^6}{6.8a^5}=\frac{-3x^6}{6.8a^5}=\frac{-x^6}{16a^5}=D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ=(\tfrac{1}{2}-3):4.\frac{-x^6}{16a^5}.\frac{-x^2}{a^2}=\frac{1-6.x^8}{8.16a^7}=\frac{-5x^8}{128a^7}=E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ=(\tfrac{1}{2}-4):5.\frac{-5x^8}{128a^7}.\frac{-x^2}{a^2}=\frac{1-8}{10}.\frac{5x^{10}}{128a^9}=\frac{-7x^{10}}{256a^9}$$ &c. in infinitum.

Est igitur $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infinitum.

SCHOLION 3.

99. *Si cui molestus evadit fractionum calculus; is cum* NEWTONO *in formula generali substituat pro* m *exponentem fractum* m:n *formulam sequentem obtenturus,*

$$(P+PQ)^{m:n}=P^{m:n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\frac{m-4n}{5n}EQ \text{ \&c.}$$

Hac vero formula ubi utetur quantitates ad potentiam evecturus, pro n *assumet* 1.

SCHOLION 4.

100. *Ex numerorum determinatorum potentiis radicem extracturus adhibeat formulam* $a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b$ &c. *quam in dato casu determinet numero pro* m *substituto.* E. gr. *Sit ex* 104976 *extrahenda radix quartana; erit* $m=4$: *unde habetur* $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, *& juxta hoc theorema extractio radicis*

dicis quartanæ eodem modo peragitur, quo quadratam & cubicam (§. 269. 282 Arith.) *inquisivimus. Nimirum tum præter* a^4 *seu quadratoquadratum partis primæ radicis quatuor auferri debeant facta, resecentur versus dexteram notæ quatuor & potentia quarta proxime accedens ad* 10 *nempe* 1, *erit* a^4. *En calculi typum:*

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4\;9\;7\;6\;(18 \\ 1 & \\ \hline * & *\;*\;*\;* \\ 4a^3 = & *\;.\;.\;. \\ 4a^3b = 3 & 2\;.\;.\;. \\ 6a^2b^2 = 3 & 8\;4\;.\;. \\ 4ab^3 = 2 & 0\;4\;8\;. \\ b^4 = & 4\;0\;9\;6 \\ \hline * & *\;*\;*\;* \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4a^3 = 4 \\ b = 8 \\ \hline 4a^3b = 32 \\ \\ b^2 = 64 \\ a^2 = 1 \\ \hline a^2b^2 = 64 \\ 6 \\ \hline 6a^2b^2 = 384 \\ \\ b^3 = 512 \\ 4a = 4 \\ \hline 4ab^3 = 2048 \end{array}$$

Si radix plures, quam tres notas habuerit; operatio altera repetenda, ut in extractione radicum quadratarum ac cubicarum (§. §. cit. Arith.). *Quodsi numerus, ex quo radix extrahenda, non sit dignitas perfecta; dignitas proxime minor sit* = P *& residuum post extractionem more vulgari institutam per eandem divisum* = Q, m = 1 *& n exponens dignitatis, cujus radix desideratur. Ita ope theorematis in* schol. præc. *obtinetur series infinita certa progressionis lege residuam partem radicis exhibens.*

E. gr. *Quæratur* $\sqrt{2}$. *Quoniam quadratum proxime minus* = 1 *& residuum hoc ex* 2 *subducto* = 1; erit P = 1, Q = 1. *Præterea* m = 1 & n = 2.

Hinc

$$p^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}\cdot -\frac{1}{2.4} = +\frac{1.3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}\cdot +\frac{1.3}{2.4.6} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\frac{7}{10}\cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$$

&c.

Est ergo $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$ &c.

$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$ &c. in infinit.

Ubi series fractionum denotat partem radicis unitate minorem. Ceterum cum $\sqrt{2}$ *sit diagonalis quadrati, posito ejus latere* = 1 (§. 420 Geom.); *habetur jam valor diagonalis in terminis rationalibus, unde rationes prope veræ ad praxin quantumlibet sufficientes duci possunt.* E. gr. *si pro diagonali sumatur* $1 + \frac{1}{2}$; *erit ratio* $1 + \frac{1}{2} : 1$ (= 3 : 2) *justo major quam diagonalis ad latus, sed excessus consistet infra* $\frac{1}{8}$. *Si pro diagonali sumatur* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ *seu* $\frac{11}{8}$; *erit ratio* $\frac{11}{8} : 1$ (= 11 : 8) *justo minor quam diagonalis ad latus, sed defectu infra* $\frac{1}{16}$ *existente: & ita porro.*

COROLLARIUM 2.

101. Quoniam polynomium pro binomio haberi potest, sumtis pluribus partibus pro una; eadem formula polynomiis ad datam dignitatem evehendis inservit.

E. gr. Si trinomium $c+d+g$ ad dignitatem aliquam, e. gr. quartam evehendum; ponatur in formula $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b$ &c. $c = a$ & $d+g = b$: erit $(c+d+g)^4 = c^4 + 4c^3(d+g) + 6c^2(d+g)^2 + 4c(d+g)^3 + (d+g)^4$. Nempe $a^m = c^4$, $\frac{m}{1}a^{m-1}b = 4c^3(d+g)$,

$\frac{m.\,m-1}{1.\;2}a^{m-2}b^2 = 6c^2(d+g)^2$,

$\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\;2.\;3}a^{m-3}b^3 = 4c(d+g)^3$,

$\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3}{1.\;2.\;3.\;4}a^{m-4}b^4 = (d+g)^4$.

Est vero vi ejusdem theorematis $(d+g)^2 = d^2 + 2dg + g^2$, $(d+g)^3 = d^3 + 3d^2g + 3dg^2 + g^3$, $(d+g)^4 = d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$. Ergo $(c+d+g)^4 = c^4 + 4c^3d + 4c^3g + 6c^2d^2 + 12c^2dg + 6c^2g^2 + 4cd^3 + 12cd^2g + 12cdg^2 + 4cg^3 + d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$.

COROLLARIUM 3.

102. Quare si infinitinomium fuerit $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinitum, & in formula pro a substituatur a, pro b autem $by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinitum; prodibit formula generalis pro infinitinomio ad datam potentiam evehendo, aut ex eadem radicem extrahendo. Est enim

$$\begin{array}{lllllll} b^2 = & b^2y^2 & +2bcy^3 & +c^2y^4 & +2cdy^5 & & \\ & & & +2bdy^4 & +2bey^5 & & \\ & & & & & +d^2y^6 & \&c. \\ & & & & & +2cey^6 & \&c. \\ & & & & & +2bfy^6 & \&c. \\ b^3 = & b^3y^3 & +3b^2cy^4 & +3bc^2y^5 & & +c^3y^6 & \&c. \\ & & & +3bdy^5 & & +6bcdy^6 & \&c. \\ & & & & & +3b^2ey^6 & \&c. \\ b^4 = & & +b^4y^4 & +4b^3cy^5 & & +6b^2c^2y^6 & \&c. \\ & & & & & +4b^3dy^6 & \&c. \\ b^5 = & & & +b^5y^5 & & +5b^4cy^6 & \&c. \\ b^6 = & & & & & +b^6y^6 & \&c. \end{array}$$

Hos

Hos ergo valores si in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$ &c. substituas & terminos homogeneos, in quibus nempe eadem potentia ipsius y occurrit, decenter coordines; prodibit formula pro infinitinomio:

$$a^m$$

$$+\frac{m}{1} a^{m-1} by$$

$$\left.\begin{array}{r} +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 \\ +\frac{m}{1} a^{m-1} c \end{array}\right\} y^2$$

$$\left.\begin{array}{r} +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \\ +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} bc \\ +\frac{m}{1} a^{m-1} d \end{array}\right\} y^3$$

$$\left.\begin{array}{r} +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} b^2 c \\ +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} c^2 \\ +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} bd \\ +\frac{m}{1} a^{m-1} e \end{array}\right\} y^4$$

$$\left.\begin{array}{r} +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{m-4} b^3 c \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} b^2 d \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} bc^2 \\ +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} cd \\ +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} be \\ +\frac{m}{1} a^{m-1} f \end{array}\right\} y^5$$

$$\left.\begin{array}{r} +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{m-6} b^6 \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} a^{m-5} b^4 c \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4} a^{m-4} b^2 c^2 \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{m-4} b^3 d \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} c^3 \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-3} bcd \\ +\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} b^2 e \\ +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} d^2 \\ +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} ce \\ +\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} bf \\ +\frac{m}{1} a^{m-1} g \end{array}\right\} y^6$$

&c. &c. in infinitum.

COROLLARIUM 4.

103. Eodem modo patet, si infinitinomium fuerit $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6$ &c. ad dignitatem m evehendum; in serie antecedente tantum omnes terminos multiplicandos esse per y^m, ita ut unciæ retineantur eædem iidemque coefficientes, dignitates vero ipsius y sint $y^m + y^{m+1} + y^{m+2} + y^{m+3} + y^{m+4} + y^{m+5} + y^{m+6}$ &c.

SCHOLION 5.

104. *Constat igitur, idem theorema, quod pro binomio dedimus, etiam infinitinomio ad dignitatem desideratam evehendo sufficere. Tirones illud sub initium studii analytici prætermittant, donec inferius in analysi infinitorum eodem opus habuerint. Imo infinitinomium ad potestatem determinatam facile evehitur per formulas speciales superius allatas. E. gr. Sit* $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 +$ &c. *evehenda ad dignitatem secundam: cum* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, *erit*

$$\begin{array}{l} h^2x^2 + 2hix^3 + i^2x^4 \\ \qquad + 2hkx^4 + 2ikx^5 + k^2x^6 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad + 2hlx^5 + 2ilx^6 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad + 2hmx^6 \text{ \&c.} \end{array}$$

(§. 265 Arith.). *Nimirum primo sumuntur duo tantummodo termini, veluti hic* $hx + ix^2$ *& quæritur potentia desiderata, veluti hic secunda. Deinde* $hx + ix^2$ *habentur pro termino uno,* kx^3 *pro altero, atque sic denuo per formulam binomii determinatur potentia desiderata, veluti hic secunda. Porro* $hx + ix^2 + kx^3$ *sumuntur pro termino uno &* lx^4 *pro altero,*

& ita

& ita porro. Quæ eadem ſeries invenitur, ſi in generali (§. 102) *fiat* m = 2, y = x, a = h, b = i, c = k, ö = l, e = m &c. *Eſt enim*

$$a^m y^m = h^2 x^2$$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} b y^{m+1} = 2hix^3$$

$$\frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 y^{m+2} = \tfrac{2}{2} h^0 i^2 x^4 = i^2 x^4$$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} e y^{m+2} = 2hkx^4 \text{ \&c.}$$

SCHOLION 6.

105. *Ceterum notetur artificium, quo caſus infiniti, imo infinities infiniti, ad regulam eandem reducuntur.*

PROBLEMA 29.

106. *Determinare ſummam termini primi & ultimi in progreſſione arithmetica.*

Sit terminus primus a, differentia terminorum ſive creſcentium ſive decreſcentium d, erit (§. 333 *Arith.*)

$$\begin{array}{cccccc} a, a\pm d, & a\pm 2d, & a\pm 3d, & a\pm 4d, & a\pm 5d, \\ a\pm 4d & & a\pm 2d & & a \\ \hline 2a\pm 5d & = & 2a\pm 5d & = & 2a\pm 5d \end{array}$$

Item

$$\begin{array}{ccccc} a, a\pm d, & a\pm 2d, & a\pm 3d, & a\pm 4d, \\ a\pm 3d & 2 & & a \\ \hline 2a\pm 4d = & 2a\pm 4d & = & 2a\pm 4d \end{array}$$

Theorema: In progreſſione arithmetica tam creſcente quam decreſcente, ſumma termini primi & ultimi æqualis eſt ſummæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidiſtantium aut medii duplo, ſi numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{llllllll} \text{E. gr.} & 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & 18, & 21, \\ & & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \hline & & & & \multicolumn{4}{c}{24 = 24 = 24 = 24} \end{array}$$

COROLLARIUM 1.

107. Habetur ergo ſumma progreſſionis arithmeticæ, ſi ſumma termini primi & ultimi ducatur in dimidium terminorum numerum.

COROLLARIUM 2.

108. Quodſi ideo ſit terminus primus a, differentia d, numerus terminorum n; erit ultimus $a + (n-1)d$ (§. 333 *Arith.*), conſequenter ſumma progreſſionis $\frac{1}{2}n(2a + (n-1)d)$ (§. 107) $= an + \frac{1}{2}(n^2 - n)d$. Ex datis itaque termino primo a, differentia d & numero terminorum n invenitur ſumma progreſſionis, ſi facto ex termino primo in numerum terminorum addatur factum ex differentia eorundem in ſemidifferentiam numeri terminorum a quadrato ejuſdem. E. gr. Sit $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$; erit ſumma $= 21 + \frac{49-7}{2}.3 = 21 + \frac{42}{2}.3 = 21 + 21.3 = 21 + 63 = 84$.

SCHOLION.

109. *Notent tirones regulas ex ſymbolis eruturi, ab initio gradatim eſſe progrediendum, exprimendo nempe ſigillatim quodlibet ſymbolum per rem denotatam & quamlibet operationem ſignis repræſentatam per nomina convenientia. E. gr. in* an *eſt* a *terminus primus &* n *numerus terminorum* ex hypoth. *Sed* an *eſt factum ex* a *in* n (§. 8). *Ergo pro* an *ſubſtituitur in regula factum ex termino primo in numerum terminorum. Porro* n^2 *eſt quadratum ipſius* n (§. 254 Arith.). *Sed* n *eſt numerus terminorum: ergo* n^2 *quadratum numeri terminorum. Signum* — *indicat ſubtractionem* (§. 8). *Quare* $n^2 - n$ *differentia numeri terminorum ab ejus quadrato &* $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ *ſemidifferentia iſta. Porro* d *eſt differentia terminorum* ex hypoth. *ideoque* $\frac{1}{2}(n^2 - n)d$ *factum ex illa ſemidifferentia in differentiam terminorum. Denique ſignum* + *indicat facta hactenus explicata eſſe addenda. Hac quidem ſyllabizatione opus habent, qui ſine mora ſymbolicas expreſſiones quantitatum ſibi familiares reddere geſtiunt.*

COROLLARIUM 3.

110. Sit $a = 1$, $d = 2$, hoc eſt, ſit ſeries numerorum imparium 1, 3, 5, 7 &c. erit ſumma $= n + n^2 - n$ (§. 108) $= n^2$ (§. 21). Patet ideo numeros quadratos prodire continua numerorum imparium additione, conſequenter differentias numerorum quadratorum eſſe numeros impares: id quod ſupra alia ratione fuit demonſtratum (§. 83).

COROLLARIUM 4.

111. Sit $a = n = \frac{1}{2}d$; erit ſumma $= n^2 + n^3 - n^2$ (§. 108) $= n^3$ (§. 21). Quilibet ideo cubus reſolvitur in progreſſionem arithmeticam, cujus terminus primus, ſemidifferentia & numerus terminorum ſunt radici ejus æquales. Ita $8 = 2 + 6$, $27 = 3 + 9 + 15$, $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

SCHOLION.

112. *Patet modus ex formulis algebraicis eruendi theoremata ſpecialia, qui continetur ſub problemate logico de ſpecierum notionibus ex notione generis formandis* (§. 712 Log.).

DEFI-

DEFINITIO 4.

113 *Denominator* rationis est quotus ex divisione termini majoris per minorem emergens.

COROLLARIUM 1.

114. Major ergo prodit, minore per denominatorem multiplicato (§. 212 *Arith.*): minor vero habetur, majore per denominatorem diviso (§. 210 *Arith.*). Unde si terminus minor a, denominator m, erit major ma: si terminus major a, minor erit $\frac{a}{m}$. Quare $a : ma$ exprimit rationem minoris inæqualitatis, $a : \frac{a}{m}$ vero rationem majoris (§. 133 *Arith.*). Imo quoniam $\frac{a}{m} = a . \frac{1}{m}$ (§. 43), si m explicetur per fractionem, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis; $a : ma$ rationem quamcunque designat.

COROLLARIUM 2.

115. Quia in ratione majoris inæqualitatis antecedens major consequente (§. 133 *Arith.*); ejus denominator idem est cum exponente (§. 136 *Arith.*).

COROLLARIUM 3.

116. In ratione minoris inæqualitatis exponens rationis $\frac{a}{ma}$ (§. 136 *Arith.* & §. 114 *Analys.*), hoc est, $\frac{1}{m}$ (§. 231 *Arith.*). Æquatur ergo fractioni, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis.

SCHOLION.

117. *Exponens & denominator rationis Auctoribus voces synonymæ sunt. Aliter vero veteres, aliter recentiores exponentem definiunt. Nos veterum definitionem retinuimus in Arithmetica (§. 136), tum quod naturam rationum clare explicet, tum quod ad demonstrandum utilis. Etenim si rationis 2 : 3 exponens dicatur $\frac{2}{3}$; inde intelligitur, antecedentem terminum esse æqualem duabus tertiis consequentis, ideoque pro mensura, qua utrumque metimur, assumi tertiam consequentis partem. Hinc vero clarius cognoscitur rationis hujus natura, quam si cum recentioribus nonnullis dicas, exponentem esse $1\frac{1}{2}$: quod innuit, antecedentem in consequente contineri $1\frac{1}{2}$. Recentiores vero exponentem rationis eodem modo definientes, quo denominatorem definimus, ideo eundem exponentem constituunt rationum majoris & minoris inæqualitatis (§. 115), quod nomen etiam in casu posteriori suggerat (§. 147* Arith.) *& demonstrationibus analyticis commodior videatur: quem in finem nos exponentis loco nunc denominatorem assumimus.*

PROBLEMA 30.

118. *Determinare factum ex termino primo in ultimum progressionis geometricæ.*

Sit terminus primus a, denominator m; erit progressio (§. 332 *Arith.* & §. 114 *Analys.*)

$$a, \ ma, \ m^2a, \ m^3a, \ m^4a, \ m^5a$$
$$ \ m^4a \ \ m^3a \qquad\qquad\qquad a$$
$$m^5a^2 = m^5a^2 \quad = \quad m^5a^2$$

Item

$$a, \ ma, \ m^2a, \ m^3a, \ m^4a, \ m^5a, \ m^6a,$$
$$ \ m^5a \qquad\quad m^3a, \ m^2a \qquad\qquad a$$
$$m^6a^2 = m^6a^2 = m^6a^2 = m^6a^2$$

Theorema. In progressione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum ab extremis æquidistantium, itemque medii quadrato, si numerus terminorum impar.

E. g. 3, 6, 12, 24, 48, 96
12 6 3
288 = 288 = 288

PROBLEMA 31.

119. *Determinare quotum ex divisione differentiæ terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate multatum emergentem.*

Sit terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi $m^{n-1}a - a$. Hæc si dividatur per $m - 1$; erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

$$m-1)\,m^{n-1}a - a\,(m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a \text{ \&c.}$$
$$m^{n-1}a - m^{n-2}a$$
$$+m^{n-2}a - a$$
$$m^{n-2}a - m^{n-3}a$$

$$+m^{n-3}a-a$$
$$m^{n-3}a-m^{n-4}a$$
$$+m^{n-4}a-a$$
$$m^{n-4}a-m^{n-5}a$$
$$+m^{n-5}a-a$$
$$m^{n-5}a-m^{n-6}a$$
$$+m^{n-6}a-a$$
&c.

Quodsi n determinetur, e.gr. per 7; erit $n-7=0$, consequenter $m^{n-7}a=m^0a=a$, ideoque divisio terminatur. Unde patet

Theorema 1: Si differentia termini primi & ultimi progressionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate mulctatum; quotus est summa omnium terminorum excepto maximo.

Et cum sit $m-1:1=m^{n-1}a-a:m^{n-2}a+m^{n-3}a$ &c. $+a$ (§. 174. 169 *Arith.*); patet porro

Theorema 2: In progressione geometrica est ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita differentia termini maximi & minimi ad summam omnium terminorum excepto maximo.

COROLLARIUM 1.

120. Quodsi ergo quoto ex divisione differentiæ termini maximi & minimi per denominatorem unitate mulctatum emergenti maximus addatur; summa totius progressionis habetur.

COROLLARIUM 2.

121. Sit ideo terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n; erit terminus ultimus seu maximus $m^{n-1}a$, ideoque summa $m^{n-1}a+(m^{n-1}a-a):(m-1)=(m^na-m^{n-1}a+m^{n-1}a-a):(m-1)$ (§. 235 *Arith.*) $=(m^na-a):(m-1)$ (§. 21), consequenter si eadem summa dicatur f, $m-1:m^n-1=a:f$ (§. 302 *Arith.*). Est igitur terminus primus (seu minimus) progressionis ad ejus summam ut denominator unitate mulctatus ad ejus dignitatem, cujus exponens numero terminorum æqualis, unitate itidem mulctatam. Sit e. gr. $m=2$, $a=1$, $n=8$; erit summa $(256-1):1=255$.

COROLLARIUM 3.

122. Quoniam si terminus primus a, denominator m; terminus ultimus $m^{n-1}a$, summa $(m^na-a):(m-1)$ (§. 121): erit differentia inter terminum ultimum & summam $(m^{n-1}a-a):(m-1)$, & differentia inter primum & summam $\frac{m^na-a}{m-1}-a=\frac{m^na-a-ma+a}{m-1}$ (§. 235 *Arith.*) $=\frac{m^na-ma}{m-1}$. Est ergo differentia prior ad posteriorem ut $(m^{n-1}a-a):(m-1)$ ad $(m^na-ma):(m-1)$, hoc est, ut $m^{n-1}a-a$ ad m^na-ma (§. 178 *Arith.*), hoc est, ut 1 ad m (§. 181 *Arith.*), seu ut unitas ad denominatorem.

COROLLARIUM 4.

123. Quare si differentia inter terminum primum & summam dividatur per differentiam inter summam & terminum ultimum; quotus est denominator (§. 69 *Arith.*).

PROBLEMA 32.

124. *Investigare rationum symptomata.*

Non alia re opus est, quam ut termini analytice exprimantur (§. 114) & tentatis quotlibet mutationibus exploretur, utrum duarum rationum exponentes sint æquales nec ne (§. 149 *Arith.*). Sint itaque duæ quantitates a & ma; erit

I. $a:ma$
$c \quad c$
$ac:mac=a:ma$

II. $a:ma$
$c \quad c$
$\frac{a}{c}:\frac{ma}{c}=a:ma$

III. $a:ma$
$b:mb$
$a-b:ma-mb=a:ma=b:mb$

IV. $a:ma$
$b:mb$
$a+b:ma+mb=a:ma=b:mb$.

Sit porro
$$a:ma=b:mb$$
erit alternatim $a:b=ma:mb$
inverse $ma:a=mb:b$
conversim $a+ma:a=b+mb:b$
composite $a+ma:ma=b+mb:mb$
divisim

divisim $ma - a : a = mb - b : b$

$$ma - a : ma = mb - b : mb$$

Item, $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ma} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$$

$$a : mac = b : mbc$$

$$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$$

$$ac : ma = bc : mb$$

$$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$$

$$ac : mac = b : mb$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$$

$$ac : mac = bd : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$$

$$ac : mad = bc : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$$

Sit ordinate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = mb : mnb$

erit ex æquo $a : mna = b : mnb$

Sit perturbate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

erit ex æquo $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Ipsæ nimirum expressiones, si quoti reducantur per regulas fractionum, rationum similitudinem in omnibus loquuntur. E. gr. $ac : mac = 1 : m$ & $b : mb = 1 : m$. En utrobique exponentem eundem $1 : m$.

COROLLARIUM.

125. Cum sit in progressione geometrica $m - 1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c $+ a$ (*th.* 2 §. 119), sit vero $m - 1 : 1 = ma - a : a$ (§. 124 *n.* 1); erit $ma - a : a = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c. $+ a$ (§. 167 *Arith.*), hoc est, excessus termini secundi supra primum est ad primum ut excessus ultimi sive maximi supra primum ad summam omnium terminorum demto maximo.

PROBLEMA 33.

126. *Investigare symptomata progressionum geometricarum ab unitate incipientium.*

Si terminus primus est unitas, secundus idem est cum denominatore rationis (§. 114). Est vero terminus secundus vel numerus primus, vel compositus, & in casu altero vel quadratus, vel potentia alia cujuscunque ordinis, vel nulla.

Cum numerus primus in se non possit dividi nisi per unitatem solam (§. 75 *Arith.*), charactere primitivo m recte exprimitur. Unde emergit series in ratione geometrica progredientium

$$1, m^1, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6 \text{ \&c.}$$

Quoniam termini omnes prodeunt continuata multiplicatione secundi in seipsum (§. 250. 332 *Arith*): per nullum quoque numerum primum dividi possunt exacte nisi per secundum, seu nullus numerus primus terminos metitur præter secundum. In formula generali idem ad oculum patet: etenim m^2, m^3, m^4, m^5, m^6 &c. non posse dividi nisi per m, patet (§. 54). Et cum terminus secundus in hoc casu sit potentia prima, termini sequentes sint potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem numeri (§. 250 *Arith.*); terminus quilibet major dividi potest per quemlibet minorem, sed per nullum alium (§. 54). Habemus igitur

Theorema 1: Si numerorum ab unitate continue proportionalium proximus unitati primus est, maximum nullus alius metitur præter eos, qui sunt in serie, consequenter nec primus alius, nisi secundus seu unitati proximus.

Et

Et quoniam in omni casu numerorum ab unitate continue proportionalium termini ultra secundum sunt potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem termini secundi, qui communis omnium radix est (§. 332. 250 *Arith.*); igitur in genere patet

Theorema 2: In serie numerorum ab unitate continue proportionalium minor quilibet quemlibet majorem metitur per aliquem numerum, qui est in serie.

Cum terminus compositus exacte dividi possit per numerum alium præter unitatem (§ 76 *Arith.*); exprimetur idem per mn. Quare si in progressione geometrica ab unitate incipiente terminus secundus sit mn; erit series

$1, mn, m^2n^2, m^3n^3, m^4n^4, m^5n^5, m^6n^6$ &c.

ideoque patet numeros primos m & n, qui metiuntur secundum terminum, metiri quoque ceteros omnes, nec præter eos alium quendam numerum primum ceterorum quemcunque metiri. Unde habemus

Theorema 3: Si ab unitate fuerint numeri quotcunque continue proportionales; primus numerus, qui metitur ultimum, metietur & unitati proximum ac omnes intermedios.

In utraque serie exponens termini secundi est 1, tertii 2, quarti 3, quinti 4 &c. consequenter exponens in loco impari est numerus par, in loco pari est impar, & quidem in loco quarto seu a secundo tertio exponens est ternarius, & duobus locis intermissis sequitur continuo numerus per ternarium divisibilis, seu quem ternarius metitur. Similiter in loco septimo seu a secundo sexto exponens senarius est & quinque locis intermissis continuo sequitur exponens, quem senarius metitur. Singula hinc intuitive patent, quod exponentes ex continua unitatis additione nascantur. Hisce vero notatis prodit

Theorema 4: Si numeri quotcunque fuerint ab unitate continue proportionales; secundus (unitate seclusa) quadratus erit & uno intermisso omnes: tertius autem cubus est, & duobus intermissis omnes: sextus vero cubus simul & quadratus & quinque intermissis omnes.

Si terminus primus fuerit unitas, secundus numerus quadratus, vel cubus, vel potentia cujuscunque gradus; erunt series

$1,\ m^2,\ m^4,\ m^6,\ m^8,\ m^{10},\ m^{12}$ &c.
$1,\ m^3,\ m^6,\ m^9,\ m^{12},\ m^{15},\ m^{18}$ &c.
$1,\ m^n,\ m^{2n}, m^{3n}, m^{4n}, m^{5n}, m^{6n}$ &c.

Quoniam in qualibet serie termini continuo prodeunt multiplicatione per secundum; exponens secundi continuo additur exponenti termini cujuscunque dati, ut prodeat proxime sequens (§. 54), consequenter cum exponentes omnium terminorum, qui a secundo sequuntur, sint multipli exponentis termini secundi; per secundi quoque termini exponentem dividi possunt, consequenter omnes termini sunt dignitates ejus gradus, cujus dignitas est secundus (§. 56). Habemus itaque

Theorema 5: Si in serie continue proportionalium ab unitate numerorum terminus secundus seu ab unitate primus est quadratus; reliqui omnes quadrati erunt: si idem fuerit cubus; reliqui etiam omnes cubi erunt: si idem fuerit dignitas cujuscunque gradus, quarti, quinti, sexti &c. reliqui etiam omnes erunt dignitates ejusdem gradus, quarti, quinti, sexti &c.

SCHOLION.

127. *Patet ideo, per calculum literalem facillime symptomata rationum & progressionum geometricarum ab unitate incipientium vel ignorata, vel oblivioni tradita reperiri.*

PROBLEMA 34.

128. *Invenire rationem superficierum*

rum atque corporum in geometria elementari explicatorum.

Sit parallelogrammorum & triangulorum altitudo communis a, bases sint b & c: erunt illorum areæ ab & ac (§. 375. 387 *Geom.*), horum $\frac{1}{2}ab$ & $\frac{1}{2}ac$ (§. 392 *Geom.*). Sunt ergo ut ab ad ac, hoc est, ut b ad c (§. 181 *Arith.*).

Theorema 1: Parallelogramma & triangula æque alta basium rationem habent.

Eodem modo invenitur

Theorema 2: Parallelogramma & triangula æqualium basium sunt in ratione altitudinum.

Sit diameter circuli a, peripheria ma (§. 114): erit quadratum diametri a^2, area circuli $\frac{1}{4}ma^2$ (§. 429 *Geom.*). Est ergo illud ad hanc ut a^2 ad $\frac{1}{4}ma^2$, hoc est, ut a ad $\frac{1}{4}ma$ (§. 181 *Arith.*).

Theorema 3: Quadratum diametri est ad aream circuli, ut diameter ad quartam peripheriæ partem.

Sint bases parallelogrammorum & triangulorum similium a & b, altitudines ma & mb (§. 114 *Anal.* & §. 396 *Geom.*): erunt areæ ut ma^2 ad mb^2 (§. 375. 387. 392 *Geom.*), hoc est, ut a^2 ad b^2 (§. 181 *Arith.*).

Theorema 4: Parallelogramma & triangula similia sunt ut quadrata basium, seu, quia quodlibet latus pro basi assumi potest (§. 113 *Geom.*), ut quadrata laterum homologorum.

Sint bases parallelepipedorum, prismatum, cylindrorum, pyramidum, conorum, a & b, altitudo communis c: erunt corpora ista ut ac ad bc (§. 536. 539. 541. 548 *Geom.*), hoc est, ut a ad b (§. 181 *Arith.*). Eodem modo c assumi potest pro basi communi ita ut a & b sint altitudines.

Theorema 5: Parallelepipeda, prismata, cylindri, pyramides & coni ejusdem altitudinis basium rationem habent; eandem vero basin habentia sunt in ratione altitudinum.

Non absimili modo alia hujus generis theoremata investigantur.

PROBLEMA 35.

129. *Invenire, quoties quantitates quotlibet permutari queant, hoc est, ordo earum variari possit.*

Sint quantitates duæ a & b. Cum aut scribi possit ab, aut ba: patet esse numerum variationum $2 = 2 \cdot 1$. Sint tres quantitates a, b, c. Ordines earum erunt

$c\,a\,b$
$a\,c\,b$
$a\,b\,c$

$c\,b\,a$
$b\,c\,a$
$b\,a\,c$

id quod patet, c primum cum ab, dein cum ba combinando. Unde numerus variationum $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Quodsi quantitates fuerint quatuor, una quælibet quatuor modis combinari potest cum quolibet ordine trium: unde numerus variationum emergit $6 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Similiter si quantitates fuerint quinque, unaquælibet juncta cum quolibet ordine quatuor quantitatum pariet variationes 5. Unde numerus omnium variationum $24 \cdot 5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Quare si numerus quantitatum fuerit n; erit numerus variationum $n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5$ &c.

Si eadem quantitas bis occurrat; reperietur variatio duarum bb; trium bab, abb, bba; quatuor $cbab$, $bcab$, $bacb$, $babc$ &c. ideoque numerus variationum in casu primo $1 = (2 \cdot 1) : 2 \cdot 1$, in secundo $3 = (3 \cdot 2 \cdot 1) : 2 \cdot 1$, in tertio $12 = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : 2 \cdot 1$. Quodsi litera quinta accedat; in quolibet ordine quantitatum quatuor pariet variationes

nes quinque: unde numerus omnium variationum $60=(5.4.3.2.1):2.1$. Hinc intelligitur, si numerus quantitatum sit n; fore omnium variationum numerum$(n.n-1.n-2.n-3.n-4$ &c.$):2.1$.

Si eadem quantitas ter occurrat; erit in tribus nulla variatio, in quatuor variationes sunt *baaa*, *abaa*, *aaba*, *aaab*, ideoque numerus variationum $4=(4.3.2.1):3.2.1$. Quinta si accedat; in quolibet ordine quatuor quantitatum quinque variationes pariet: unde numerus omnium variationum $(5.4.3.2.1):3.2.1$. Eodem modo, si sexta assumatur, reperietur numerus variationum $(6.5.4.3.2.1):3.2.1$. Unde colligitur, si numerus quantitatum sit n, fore numerum omnium variationum $(n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5$ &c.$):3.2.1$.

Si eadem quantitas quater occurrat; erit in quatuor variatio nulla. Quodsi vero quinta accedat; variationes sunt *baaaa*, *abaaa*, *aabaa*, *aaaba*, *aaaab*. Quare numerus variationum est $5=(5.4.3.2.1):4.3.2.1$. Si sexta assumatur; in quolibet quinque quantitatum ordine variationes sex pariet, ideoque numerus variationum $30=(6.5.4.3.2.1):4.3.2.1$. Unde constat, si numerus quantitatum sit n, fore numerum omnium variationum $n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5$ &c.$):4.3.2.1$.

Ex his formulis specialibus colligitur generalis. Nempe si n denuo sit quantitatum numerus, m numerus, qui indicat, quoties eadem quantitas occurrit; erit $(n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6.n-7.n-8.n-9$ &c.$):(m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6$ &c.$)$. Nimirum series continuanda, donec continua unitatis subtractio ex n & m relinquat o.

Eodem modo ulterius progredi licet, tandemque reperietur, si numerus quantitatum fuerit n, numeri, qui indicant, quoties earum aliquæ repetuntur, sint l, m, r &c. formula universalissima $(n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6$ &c.$):(l.l-1.l-2.l-3.l-4$ &c. $m.m-1.m-2.m-3$ &c. $r.r-1.r-2.r-3.r-4.r-5$ &c.$)$. E.gr. sit $n=6$, $l=3$, $m=3$, $r=0$; erit numerus variationum $(6.5.4.3.2.1):(3.2.1.3.2.1)=(6.5.4):(3.2)=2.5.2=20$.

SCHOLION I.

130. *Ponamus mensæ assidere 13 personas. Quodsi quæratur, quoties loca permutare possint; reperietur numerus variationum* 13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 =6, 227', 020, 800.

SCHOLION 2.

131. *Si vox aliqua ex literis non nimis multis componatur; eadem methodo, qua in resolutione problematis usi sumus, inveniri possunt sine meditatione omnia anagrammata in omnibus linguis possibilia. E. gr. inveniri debent anagrammata vocis* amor. *Erunt variationes possibiles.*

amor	mora	oram	ramo
amro	moar	orma	raom
aomr	mroa	oarm	rmao
aorm	mrao	oamr	rmoa
armo	maor	omra	roam
arom	maro	omar	roma

Sunt ideo anagrammata vocis amor *in lingua latina* Roma, mora, Maro, oram, ramo, armo.

SE-

SECTIO SECUNDA
DE ALGEBRA.
CAPUT PRIMUM
De Algebra ad Problemata Arithmetica eaque determinata applicata.

DEFINITIO 5.

132. Algebra est methodus resolvendi problemata per æquationes.

DEFINITIO 6.

133. *Æquatio* est expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales, e.gr. $2 . 3 = 4 + 2$. *Stifelius* (a) definit eam per rationem æqualitatis inter duos terminos diversimode denominatos.

DEFINITIO 7.

134. *Radix æquationis* est valor quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. E.gr. si fuerit $a^2 + b^2 = x^2$; radix erit $\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

DEFINITIO 8.

135. Si valor ipsius x fuerit positivus, e.gr. $x = 3$; *Radix* dicitur *vera*.

DEFINITIO 9.

136. Si valor ipsius x fuerit negativus, e.gr. $x = -5$; *Radix* dicitur *falsa*.

DEFINITIO 10.

137. Si valor ipsius x fuerit *radix* quantitatis negativæ, e.gr. $\sqrt{-5}$; *imaginaria* appellatur (§. 71).

(a) In Arithm. integra lib. 3. c. 1. p. 228. b.

DEFINITIO 11.

138. *Æquatio* dicitur simplex, si quantitas incognita fuerit unius dimensionis, e.gr. si $x = (a + b) : 2$.

DEFINITIO 12.

139. *Æquatio* dicitur *quadratica*, si quantitas incognita ad duas dimensiones assurgit, ut $x^2 = a^2 + b^2$: *cubica*, si ad tres, ut $x^3 = a^3 - b^3$ &c.

SCHOLION.

140. *In hac sectione tantum de æquatione simplici & quadratica agimus.*

PROBLEMA 36.

141. *Problema datum Algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Quantitates datæ a quæsitis distinguantur, & datæ primis, quæsitæ ultimis alphabeti literis denominentur (*§. 3*).
2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod si fieri nequeat, id indicio est, *problema* non esse *determinatum*, sed unam vel plures quæsitarum pro arbitrio assumi posse. Inveniuntur autem

autem æquationes, nisi in ipso problemate contineantur, per theoremata de æqualitate quantitatum agentia.

3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitis sunt permixtæ; ea reducenda est, ita ut ex una parte tantum compareat quantitas incognita una, ex altera vero meræ cognitæ deprehendantur. Instituitur autem hæc reductio, si quantitates subductæ addantur, additæ subtrahantur, multiplicatæ dividantur, divisæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conservetur (§. 88. 91. 93. 94. 256. 255 *Arith.*).

S C H O L I O N

142. *Hæc sufficiunt pro æquationibus simplicibus reducendis; sed ad altiores aliis adhuc subsidiis opus est, quæ suo loco exponemus, nunc nonnisi extractionem radicis ex æquatione quadratica addituri.*

P R O B L E M A 37.

143. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

R E S O L U T I O.

I. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2 = ab$; evidens est esse $x = \sqrt{ab}$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 \pm ax = \pm b^2$; tum x assumatur pro una parte radicis, erit a, quantitas cognita secundi termini, duplum partis alterius (§. 261 *Arith.*), ideoque $\frac{1}{2}a$ pars altera. Complebitur igitur quadratum, si addatur $\frac{1}{4}aa$ (§. *cit*): quo facto, radix extrahi potest, ut hic factum esse apparet.

Casus 1.

$x^2 + ax = b^2$
$\frac{1}{4}aa \quad \frac{1}{4}aa$ Add.
$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$ Extr. rad.
$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$
$\frac{1}{2}a \quad \frac{1}{2}a$ Subtr.
$x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$

Casus 2.

$x^2 - ax = b^2$
$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$ Add.
$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$ Extr. rad.
$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$
$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$
vel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$, ideoque $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} > \frac{1}{2}a$; erit $\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ valor ipsius x negativus, consequenter radix falsa (§. 136); atque ideo solus valor $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ est radix vera (§. 135).

Casus 3.

$x^2 - ax = -b^2$
$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$ Add.
$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$ Extr. rad.
$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}a \\ \& \frac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$
$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$
& $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$

Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$, ideoque $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} < \frac{1}{2}a$; erit $\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ valor ipsius x positivus, consequenter radix vera (§. 135). Habet igitur in præsente casu æquatio duas radices veras: cujus rei ratio paulo post ex exemplis patebit.

Cete-

Ceterum ex multiplicatione patet esse $(\frac{1}{2}a - x)^2$ perinde ac $(x - \frac{1}{2}a)^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$.

PROBLEMA 38.

144. *Invenire numerum, cujus pars dimidia cum tertia & quarta numerum integrum unitate superat.*

Sit numerus quæsitus x, erit per conditionem problematis

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = x + 1$$

h. e. $(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$

seu $\frac{26}{24}x = x + 1$ — 24 Mult.

$$26x = 24x + 24$$

$24x \quad 24x$ — Subtr.

$$2x = 24$$ — 2 Divid.

$$x = 12$$

Examen: $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13 = 12 + 1$

PROBLEMA 39.

145. *Invenire numerum, cujus partes aliquotæ qualescunque & quotcunque simul sumtæ ipsum superant numero dato.*

Sit numerus datus f, quæsitus x, partes aliquotæ $\frac{a}{b}x$, $\frac{c}{d}x$, $\frac{e}{g}x$ &c. Erit per conditionem problematis

$$\frac{a}{b}x + \frac{c}{d}x + \frac{e}{g}x \text{ \&c.} = f + x$$

h. e. $\dfrac{(adg + bgc + bde)x}{bdg} = f + x$ (§. 235 *Arith.*)

— bdg Mult.

$$(adg + bgc + bde)x = fbdg + bdgx$$

$bdgx \quad bdgx$ — Subtr.

$$(adg + bgc + bde - bdg)x = fbdg$$

$$x = fbdg : (adg + bgc + bde - bdg)$$

seu $adg + bgc + bde - bdg : bdg = f : x$

Æquatio ultima hanc suppeditat *Regulam*: 1. Fractiones datæ reducantur ad eandem denominationem. 2. A summa numeratorum subtrahatur denominator communis. 3. Per residuum dividatur factum ex eodem denominatore in numerum datum. Quotus est numerus quæsitus. E. gr. sit $a:b = \frac{1}{2}$, $c:d = \frac{1}{3}$, $e:g = \frac{1}{4}$, $f = 1$; erit $x = 24 : (12 + 8 + 6 - 24) = 24 : 2 = 12$.

In analogia, in quam æquationem resolvimus, continetur hoc

Theorema: Si plures fractiones ad eandem denominationem reducuntur; erit numerus integer, cujus partes sunt fractiones istæ, ad harum supra illum excessum, ut communis denominator ad differentiam ejus a summa numeratorum.

PROBLEMA 40.

146. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates irrationales reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$, quemadmodum supra (§. 59). Fiat

$\sqrt[m]{x^n} = t$	$\sqrt[s]{y^r} = v$
$x^n = t^m$ (§. 56)	$y^r = v^s$ (§. 56)
$x^{sn} = t^{ms}$ (§. *cit.*)	$y^{rm} = v^{sm}$ (§. *cit.*)
$\sqrt[ms]{x^{sn}} = t$ (§. *cit.*)	$\sqrt[ms]{y^{rm}} = v$ (§. *cit.*)

Habemus igitur $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[ms]{x^{sn}}$ & $\sqrt[s]{y^r} = \sqrt[ms]{y^{rm}}$, ut supra (§. 59): quo ipso patet, quod dubium videri poterat (§. 60), in exponentibus quantitatum irrationalium locum habere reductionem ad eandem denominationem, si iidem fuerint fractiones diversæ denominationis.

SCHOLION.

147. *Hoc artificio reductionis uti possumus in aliis casibus similibus. Ita multiplicationem ac divisionem fractorum atque irrationalium eadem methodo investigare licet.*

PROBLEMA 41.

148. *Datis summa duarum quantitatum & earundem facto, invenire quantitatem utramque.*

Sit summa $= a$
semidifferentia $= x$
factum $= b$
erit quantit. major $= \frac{1}{2}a + x$
minor $= \frac{1}{2}a - x$ } (§. 6).

Ergo per conditionem problematis

$$\tfrac{1}{4}aa - xx = b \quad (\S.38)$$

$xx \quad xx$ Add.

$$\tfrac{1}{4}aa = b + xx$$

$b \quad b$ Subtr.

$$\tfrac{1}{4}aa - b = xx$$ Extr. rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - b)} = x$$

Regula: 1. A quadrato semisummæ duarum quantitatum subtrahatur factum earundem. 2. Ex residuo extrahatur radix, quæ erit semidifferentia earundem. Sit e. gr. $a = 14$, $b = 48$: erit $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$, ideoque $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$; $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$. Sunt igitur quantitates quæsitæ 8 & 6. Nam $8 \cdot 6 = 48$, & $8 + 6 = 14$.

COROLLARIUM.

149. Quoniam $\frac{1}{2}a$ est dimidium totius a, x differentia partis æqualis ab inæquali, b rectangulum partium inæqualium; æquatio secunda hoc continet *theorema*: Si totum dividatur in duas partes æquales & in duas inæquales; quadratum partis æqualis æquale est rectangulo inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

SCHOLION.

150. *Patet ideo, quod sæpius casu in theoremata incidamus, dum problemata algebraice resolvimus; qualia subinde annotabimus. Regulas vero, quas quilibet proprio Marte ex ultima æquatione eruere valet, in posterum prætermittemus.*

PROBLEMA 42.

151. *Data summa dignitatum similium duarum quantitatum & differentia earundem, invenire quantitatem utramque.*

Sit summa $= a$
differentia $= b$
quantit. major $= y$
minor $= x$

erit per conditionem problematis

$$y^m + x^m = a \qquad y^m - x^m = b$$

$x^m \quad x^m \qquad\qquad x^m \quad x^m$

$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Quare (§. 87 *Arith.*)

$$a - x^m = b + x^m$$

$x^m \quad x^m$ Add.

$$a = b + 2x^m$$

$b \quad b$ Subtr.

$$a - b = 2x^m$$ 2 Divid.

$$(a - b) : 2 = x^m$$ Extr. rad. m

$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Sit $m = 2$, $a = 97$, $b = 65$: erit $x = \sqrt{(48\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$, & hinc $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{81} = 9$.
Examen: $x^2 + y^2 = 16 + 81 = 97$, & $y^2 - x^2 = 81 - 16 = 65$.

Æquatio antepenultima resolvitur in hanc analogiam

$$a - b : x^m = 2 : 1 \ (\S.\ 299\ \textit{Arith.}),$$

quæ sequens suppeditat

Theorema: Excessus summæ duarum dignitatum similium supra differentiam earundem est ad dignitatem minorem in ratione dupla.

PROBLEMA 43.

152. *Dato itinere diurno viatoris alicujus una cum itinere diurno alterius, ipsum dato tempore sequentis, invenire tempus, quo illum hic assequetur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
secundi $= b$
tempus datum $= c$
tempus quæsitum $= x$

erit iter intra tempus datum a primo confectum $= ac$, quod vero idem intra quæsitum emensus est $= ax$: iter posterio-

sterioris intra tempus quæsitum reperietur $= bx$ (§. 302 *Arith.*). Quare per conditionem problematis

$$ac + ax = bx$$

$$ax \quad ax \quad \text{Subtr. quia } bx > ax$$

$$ac = bx - ax$$

$$\text{————— } b-a \text{ Divid.}$$

$$ac:(b-a) = x$$

Sit $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$: erit $x = 24:2 = 12$.

Examen: Quoniam primus itineri impendit 16, alter vero 12 dies antequam conveniunt, & iter diurnum primi est 6, secundi 8: via primi erit $6 . 16 = 96$, secundi $8 . 12 = 96$.

Æquatio penultima in hanc analogiam resolvitur (§. 299 *Arith.*)

$$b - a : a = c : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum insequitur tempore aliquo elapso; differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, est ad viam primi, quem alter insequitur, ut tempus ab itinere primi usque ad initium itineris secundi elapsum, ad tempus, quo alter ipsum assequitur.

SCHOLION.

153. *Facile apparet, cum viatoris notio problematis resolutionem non ingrediatur, problema universalius de mobilibus quibuscunque concipi posse.*

PROBLEMA 44.

154. *Dato itinere diurno alicujus viatoris una cum tempore ab initio itineris elapso, invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum assequatur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
tempus elapsum $= b$
tempus datum $= c$
iter diurnum alterius $= x$

Erit per conditionem problematis ut in probl. præced.

$$ab + ac = cx$$

$$\text{————— } c \text{ Divid.}$$

$$(ab + ac):c = x$$

Sit e. gr. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$: erit $x = (24 + 72):12 = 96:12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam (§. 299 *Arith.*)

$$c : b + c = a : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum insequitur tempore aliquo elapso; erit tempus, intra quod ipsum assequitur, ad tempus ab initio itineris hujus elapsum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum secundi.

PROBLEMA 45.

155. *Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuscujuslibet, invenire tempus, quo sibi mutuo occurrent.*

Sit intervallum locorum $= a$
iter diurnum primi $= b$
secundi $= c$
tempus occursus $= x$

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via, quam alter eodem tempore emetitur, $= cx$ (§. 302 *Arith.*). Quare cum ambo junctim emensi sint totum intervallum locorum, unde egrediebantur; habebimus

$$bx + cx = a$$

$$\text{————— } b + c \text{ Divid.}$$

$$x = a:(b+c)$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$: erit $x = 120:(6+4) = 120:10 = 12$. Duodecimo igitur die sibi mutuo occurrent.

SCHOLION.

156. *Problemata istiusmodi specialia sub initium difficiliora sunt solutu, quam abstracta, quoniam in his æquatio plerumque continetur, aut ex theorematibus arithmeticis facile eruitur, in illis autem ex circumstantiis problematis elicienda. Quodsi enim plures circumstantiæ occurrunt, tirones non statim eas pervident, quæ æquationem suppeditant. Discant igitur consultius esse, ut problematis abstractis solvendis primas studii Algebraici partes consecrent: insuperque noscent velim, facilius problemata specialia ad abstracta seu generalia, quam vice versa abstracta ad specialia revocari, quia illa conditiones generales, unde solutio pendet, actu continent, in his vero circumstantiæ speciales, quæ ad solutionem nil conferunt, minime comparent. E. gr. problema præsens in abstracto istiusmodi est:* Invenire numerum, qui in summam duorum datorum ductus producit numerum datum. *Similiter*

militer problema (§. 152) in abstracto tale est: Datis tribus quantitatibus invenire quartam, ita ut factum ex quarta in secundam æquale sit facto ex prima in aggregatum ex tertia & quarta. *Hinc apparet ratio, cur theorematum usus non statim in oculos incurrat. Nocent igitur, qui inveniri ac addisci prohibent ea, quorum usus nondum constat, vel non statim primo intuitu in oculos incurrit.*

PROBLEMA 46.

157. ***Data summa duarum quantitatum & differentia quadratorum, invenire quantitates.***

Sit summa quant. $= a$

differentia quadr. $= b$

semidiff. quant. $= y$

erit quant. maj. $= \frac{1}{2}a + y$, minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 6)

Quare

Quadratum maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$

min. $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

Differ. (§. 30) $2ay = b$ per condit. probl.

Divid. per $2a$

$y = b:2a$

Sit $b = 40$, $a = 10$: erit $y = 40:20 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$, & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.
Examen: $7 + 3 = 10$, & $49 - 9 = 40$.

PROBLEMA 47.

158. ***Data summa duarum quantitatum una cum summa quadratorum, invenire quantitatem utramque.***

Sit summa quant. $= a$

summa quadr. $= b$

semidiff. quant. $= y$

erit quant. major $= \frac{1}{2}a + y$, minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 6).

Quare

Qadrat. majoris $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$

minoris $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

Summa quadr. $\frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$

$\frac{1}{2}a^2 \qquad \frac{1}{2}a^2$ Subtr.

$2y^2 = b - \frac{1}{2}a^2$

2 Divid.

$y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$

Extr. rad.

$y = \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$

Sit $a = 10$, $b = 58$: erit $y = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$. Hinc quantitas major $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$, & minor $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.
Examen: $7 + 3 = 10$, & $49 + 9 = 58$.

PROBLEMA 48.

159. ***Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum ex unoquoque in radicem quadratam alterius sit æquale numero dato.***

Sit factum unum $= a$

alterum $= b$

numerus unus $= x$

alter $= y$

erit per conditionem problematis

$x\sqrt{y} = a \qquad y\sqrt{x} = b$

$x^2 y = a^2 \qquad y^2 x = b^2$

y Divid. $\qquad y^2$ Divid.

$x^2 = a^2 : y \qquad x = b^2 : y^2$

$x^2 = b^4 : y^4$

$a^2 : y = b^4 : y^4$ (§. 87 *Arith.*)

y^4 Mult.

$a^2 y^3 = b^4$

a^2 Divid.

$y^3 = b^4 : a^2$

Extr. rad. cub.

$y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$

Sit $a = 18$, $b = 12$: erit $y = \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.
Examen: $9\sqrt{4} = 2 \cdot 9 = 18$, & $4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$.

PROBLEMA 49.

160. ***Invenire duos numeros, quorum factum æquale est numero dato, quadratum vero summæ ad quadratum differentiæ habet rationem datam.***

Sit factum $= a$

ratio $= b:c$

summa $= 2x$

differentia $= 2y$

erit major $= x + y$, minor $= x - y$ (§. 6).

Ergo per conditiones problematis

$xx - yy$

$$xx - yy = a$$
$$\underline{\quad y^2 \qquad\quad y^2}$$
$$x^2 = a + y^2$$

$$b:c = 4x^2 : 4y^2$$
$$4cx^2 = 4by^2 \text{ (§.297 Arit.)}$$
$$\text{4c Divid.}$$
$$x^2 = by^2 : c$$

Quare (§.87 *Arith.*)

$$a + y^2 = by^2 : c$$
$$\text{c Mult.}$$
$$ac + cy^2 = by^2$$
$$cy^2 \quad cy^2 \quad \text{Subtr.}$$
$$ac = by^2 - cy^2$$
$$b - c \text{ Divid.}$$
$$ac : (b - c) = y^2$$
$$\text{Extr. rad.}$$
$$\sqrt{ac} : \sqrt{(b - c)} = y$$

Sit $a = 96$, $b:c = 25:1$. Erit $y = \sqrt{96} : \sqrt{(25-1)} = \sqrt{4} = 2$, & $x = \sqrt{(a + y^2)} = \sqrt{(96 + 4)} = \sqrt{100} = 10$, consequenter numerus major $x + y = 10 + 2 = 12$, & minor $x - y = 10 - 2 = 8$.

Examen: $12 \cdot 8 = 96$, & $100 : 4 = 25 : 1$.

PROBLEMA 50.

161. *Dato pretio unius mensuræ vini, invenire quantitatem aquæ commiscendæ, ut una mensura dato alio pretio minore vendi queat.*

Sit pretium majus $= a$
minus $= b$
quantitas aquæ $= x$

Cum aquæ pretium nullum sit; una vini mensura cum quantitate aquæ adjectæ x tantundem valet, quantum unica vini meri mensura, ac proinde productum ex $1 + x$, aggregatum scilicet mensuræ vini & aquæ adjectæ, in suum pretium b, æquale erit producto ex 1, mensura vini meri, in suum pretium a, hoc est,

$$b + bx = a$$
$$b \qquad b \quad \text{Subtr.}$$
$$bx = a - b$$
$$b \text{ Divid.}$$
$$x = (a - b) : b = a : b - 1$$

Sit $a = 16$, $b = 10$: erit $x = 1\frac{6}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Theorema: Si vino pretiosiori aqua commiscenda, ut viliori pretio constet; quantitas aquæ commiscendæ est ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ $x : 1 = a - b : b$.

Examen: Etenim si integra mensura veneat 10 grossis; tres ipsius quintæ veneunt 6 grossis (§. 302 *Arith.*), quos si addas pretio unius mensuræ, quod est 10 grossorum, prodibunt 16 grossi, pretium unius mensuræ vini generosioris.

PROBLEMA 51.

162. *Dato pretio vini generosi & pretio vilioris, determinare quantitatem vini vilioris generoso commiscendi, ut dato aliquo pretio medio venire queat.*

Sit pretium unius mensuræ vini generosi $= a$
vilioris $= b$
medium $= c$
quantitas unius mensuræ $= 1$
quantitas vilioris commiscendi $= x$
erit pretium ejus $= bx$
quantitas generosi commiscendi $= 1 - x$
erit ejus pretium $= a - ax$

Quare per conditionem problematis

$$a - ax + bx = c$$
$$ax \qquad\qquad ax \quad \text{Add. ob } ax > bx$$
$$a + bx = c + ax$$
$$bx \qquad bx \quad \text{Subtr.}$$
$$a = c + ax - bx$$
$$c \qquad c \quad \text{Subtr.}$$
$$a - c = ax - bx$$
$$a - b \text{ Divid.}$$
$$(a - c) : (a - b) = x$$

Sit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$: erit $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Examen: Pretium $\frac{2}{3}$ vilioris $= 6\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ generosi $= 5\frac{1}{3}$, ideoque mensuræ mixti $= 6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 12$.

PROBLEMA 52.

163. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum, summa & differentia quadratorum sint inter se æqualia.*

Sit

Sit numerus major $=x$, minor $=y$: erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 = xy \qquad x + y = xy$$

$$y \quad y \quad \text{Subtr.}$$

$$x = xy - y$$

$$x - 1 \ \text{Divid.}$$

$$x : (x - 1) = y$$

Quodsi valor ipsius y jam inventus, substituatur in æquatione finisteriore; habebimus

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$x^2 - 2x + 1 \ \text{Mult.}$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$

$$x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2$$

$$x^3 \quad x^3 \quad \text{Subtr.}$$

$$x^4 - 3x^3 = - x^2$$

$$x^2 \ \text{Divid.}$$

$$x^2 - 3x = - 1$$

$$\tfrac{9}{4} \quad \tfrac{9}{4} \quad \text{Add. (§. 143)}$$

$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4} \quad \text{Extr. rad.}$$

$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{3}{2} \\ \tfrac{3}{2} - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Est vero $\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$ radix vera: sed $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$ non est numerus minor y, quia, si numerus minor diceretur y, ad aliam æquationem deveniretur, quemadmodum apparet, si valore ipsius x per æquationem $xy - x = y$ reperto & in æquatione $x^2 - y^2 = xy$ substituto, reductio legitime instituatur. Tunc enim reperitur $y = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$, ubi $\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$ est radix falsa, quia $\tfrac{1}{2}\sqrt{5} > \tfrac{1}{2}$.

Examen: Est enim $x + y = 2 + \sqrt{5}$, $xy = 2 + \sqrt{5}$, & $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$.

PROBLEMA 53.

164. *Datis in progressione arithmetica termino primo & ultimo atque differentia terminorum, invenire numerum terminorum & summam progressionis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
differentia $= d$
numerus terminorum $= x$
summa $= y$

erit (§. 333 *Arith.* & §. 107 *Anal.*)

$$b = a + dx - d \qquad y = \tfrac{1}{2}(b + a)x$$

$$d \quad d \quad \text{Add.}$$

$$b + d = a + dx$$

$$a \quad a \quad \text{Subtr.}$$

$$b + d - a = dx$$

$$d \ \text{Divid.}$$

$$(b + d - a) : d = x$$

Quodsi hic valor in æquatione dextra substituatur; habebimus

$y = \tfrac{1}{2}(b + a)(b + d - a) : d = (b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d = (b^2 + bd + ad - a^2) : 2d = \tfrac{1}{2}(b + a) + (b^2 - a^2) : 2d$.

Sit $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$: erit $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$, & $y = \tfrac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \tfrac{19}{2} + \tfrac{285}{6} = 9\tfrac{1}{2} + 47\tfrac{1}{2} = 57$.

PROBLEMA 54.

165. *Datis termino primo, differentia terminorum & summa progressionis arithmeticæ, invenire numerum terminorum & terminum ultimum.*

Sit terminus primus $= a$
differentia $= d$
summa $= c$
ultimus $= y$
terminorum numerus $= x$

erit (§. 333 *Arith.* & §. 107 *Anal.*)

$$\tfrac{1}{2}x(a + y) = c \qquad a + dx - d = y$$

$$2 \ \text{Mult.}$$

$$ax + xy = 2c$$

$$ax \quad ax \quad \text{Subtr.}$$

$$xy = 2c - ax$$

$$x \ \text{Divid.}$$

$$y = (2c - ax) : x$$

Ergo

Ergo (§. 87 *Arith.*)

$(2c - ax) : x = a + dx - d$ — x Mult.

$2c - ax = ax + dx^2 - dx$

$\quad ax \quad ax$

$2c = dx^2 + 2ax - dx$ — d Divid.

$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a - d}{d} x$

hoc est, si fiat $(2a - d) : d = m$,

$2c : d = x^2 + mx$

$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$ Add.

$\frac{1}{4}m^2 + 2c : d = x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2c : d)} = x + \frac{1}{2}m$

$\frac{1}{2}m \quad \frac{1}{2}m$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2c : d)} - \frac{1}{2}m = x$

Sit $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$: erit $m = (4 - 3) : 3 = \frac{1}{3}$, consequenter $x = \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{114}{3})} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$, & $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

PROBLEMA 55.

166. *Datis termino primo & ultimo una cum summa progressionis arithmeticæ, invenire numerum & differentiam terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
summa $= c$
differentia $= y$
numerus terminorum $= x$

erit (§. 333 *Arith.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}x(a + b) = c$ — 2

$x(a + b) = 2c$

$x = 2c : (a + b)$

$x - 1 = \frac{2c}{a + b} - 1$

$= \frac{2c - a - b}{a + b}$

$a + xy - y = b$

$xy - y = b - a$

$y = \frac{b - a}{x - 1}$

$= \frac{(b + a)(b - a)}{2c - a - b}$

Sit $a = 2$, $b = 17$, $c = 57$: erit $x = 114 : 19 = 6$, & $y = (19 \cdot 15) : (114 - 19) = 285 : 95 = 3$.

Cum sit $y = \frac{(b + a)(b - a)}{2c - a - b}$, hæc æquatio resolvitur in analogiam

$2c - a - b : b - a = b + a : y$

quæ sequens suppeditat

Theorema: In progressione Arithmetica est ut differentia summæ ex termino primo & ultimo a duplo summæ progressionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita summa termini primi & ultimi ad differentiam progressionalem.

PROBLEMA 56.

167. *Datis differentia & numero terminorum una cum summa progressionis arithmeticæ, invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum $= n$
differentia $= d$
summa $= c$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit (§. 333 *Arith.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}ny = c \qquad x + nd - d = y$

h.c. $nx + \frac{1}{2}n^2 d - \frac{1}{2}nd = c$ — $\frac{1}{2}n$ Divid.

$2x + nd - d = 2c : n$ — $nd - d$ Subtr.

$2x = 2c : n - nd + d$ — 2 Divid.

$x = c : n - \frac{1}{2}nd + \frac{1}{2}d$

Sit $n = 6$, $d = 3$, $c = 57$: erit $x = 9\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} - 9 = 2$, & $y = 2 + 18 - 3 = 17$.

PROBLEMA 57.

168. *Datis differentia terminorum, termino ultimo & summa progressionis arithmeticæ, invenire terminum primum & numerum terminorum.*

Sit terminus ultimus $= b$
terminorum differ. $= d$
summa $= c$
terminus primus $= x$
numerus termin. $= y$

erit (§. 333 *Arith.* & §. 107 *Anal.*)

$\frac{1}{2}y$

$$\frac{1}{2}y(x+b)=c \quad \text{2 Mult.} \qquad b=x+dy-d$$
$$y(b+x)=2c \qquad\qquad b+d-x=dy$$
$$y=2c:(b+x) \qquad\qquad (b+d-x):d=y$$

Quamobrem (§. 87 *Arith.*)

$$2c:(b+x)=(b+d-x):d \quad d\ \text{Mult.}$$
$$2cd:(b+x)=b+d-x \quad b+x\ \text{Mult.}$$
$$2cd=b^2+bd-bx+bx+dx-x^2$$
$$x^2-dx=b^2+bd-2cd$$
$$\tfrac{1}{4}d^2 \qquad \tfrac{1}{4}d^2 \qquad (\S.\ 143)$$
$$x^2-dx+\tfrac{1}{4}d^2=\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd$$
$$\left.\begin{matrix} x-\frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}d-x \end{matrix}\right\}=\sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$$
$$x=\tfrac{1}{2}d\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$$

Quodsi $\frac{1}{2}d > x$; erit $\frac{1}{2}d-x$ quantitas positiva, ideoque $x=\frac{1}{2}d-\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$: si vero $\frac{1}{2}d < x$; quantitas $\frac{1}{2}d-x$ æquivalet privativo, sed $x-\frac{1}{2}d$ positivo, ideoque $x=\frac{1}{2}d+\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$.

Sit $b=17$, $d=3$, $c=57$: erit $x=\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{9}{4}+289+51-342)}=\frac{3}{2}+\sqrt{(2\frac{1}{4}-2)}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$, & $y=(17+3-2):3=\frac{18}{3}=6$.

PROBLEMA 58.

169. *Datis summa progressionis arithmeticæ, numero terminorum & facto ex primo in ultimum, invenire terminos singulos.*

Sit factum $=a$
numerus terminorum $=n$
summa $=c$
terminus primus $=x$
ultimus $=y$

erit (§. 107 *& per condit. probl.*)

$$\tfrac{1}{2}n(x+y)=c \quad \tfrac{1}{2}n\ \text{Divid.} \qquad xy=a \quad x\ \text{Divid.}$$
$$x+y=2c:n \qquad\qquad y=a:x$$

h. e. $x+\frac{a}{x}=\frac{2c}{n}$ x Mult.

$$x^2+a=\frac{2}{n}cx$$
$$x^2-2cx:n=-a$$
$$+c^2:n^2 \qquad +c^2:n^2$$
$$x^2-2cx:n+c^2:n^2=c^2:n^2-a$$
$$\left.\begin{matrix} x-c:n \\ c:n-x \end{matrix}\right\}=\sqrt{(c^2:n^2-a)}$$
$$x=\frac{c}{n}\pm\sqrt{(c^2:n^2-a)}$$

Signum + valet pro termino ultimo, signum autem — pro primo.

Sit $c=57$, $n=6$, $a=34$: erit $x=\frac{57}{6}-\sqrt{(\frac{3249}{36}-34)}=9\frac{1}{2}-\sqrt{(90\frac{1}{4}-34)}=9\frac{1}{2}-\sqrt{56\frac{1}{4}}=9\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{225}{4}}=9\frac{1}{2}-\frac{15}{2}=2$, & $y=9\frac{1}{2}+7\frac{1}{2}=17$.

PROBLEMA 59.

170. *Invenire numerum terminorum in serie imparium summandorum, ut prodeat potentia data numeri dati.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $=n$
erit dignitas ejus $=n^m$
terminus primus progr. $=1$
differ. term. $=2$
Sit numerus term. $=x$
erit summa progress. $=x^2$ (§. 108).
Ergo *per conditionem probl.*

$$x^2=n^m$$
$$x=n^{m:2} \quad \text{Extr. Rad.}$$

Patet ideo, problema non esse possibile nisi in iis casibus, ubi exponens dignitatis m est numerus par, ut per 2 dividi possit.

E. gr. Sit $m=2$, erit $x=n$, hoc est, numerus terminorum est idem cum radice quadrata, quemadmodum supra reperimus (§. 110). Sit $m=4$; erit $x=n^2$, hoc est, numerus terminorum summandorum est radicis quadratus, si

potentia

potentia quarti gradus desideretur, veluti si $n = 2$, erit $2^4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

PROBLEMA 60.

171. *Invenire numeros impares totidem numero, quot numerus datus habet unitates, & quorum additione prodit potentia data numeri hujus dati.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
dignitas ejus $= n^m$
terminus primus $= x$

Quoniam in serie numerorum imparium differentia terminorum $= 2$ & numerus terminorum est n *per hypoth.* erit summa progressionis $= nx + n^2 - n$ (§. 108), consequenter *per conditionem problematis*

$$nx + n^2 - n = n^m \quad n \text{ Divid.}$$
$$x + n - 1 = n^{m-1}$$
$$n - 1 \quad n - 1 \text{ Subtr.}$$
$$x = n^{m-1} - n + 1$$

Patet ideo problema esse possibile in omni casu.

Sit e. gr. $m = 2$, erit $x = n - n + 1 = 1$, ut supra (§. 110).

Sit $m = 3$, erit $x = n^2 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 4 - 1 = 3$, ideoque $2^3 = 3 + 5 = 8$. Sit $n = 3$, erit $x = 9 - 2 = 7$; ideoque $3^3 = 7 + 9 + 11 = 27$.

Patet igitur quomodo numeri cubici ex additione numerorum imparium procreentur.

Sit $m = 4$, erit $x = n^3 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 8 - 1 = 7$, ideoque $2^4 = 7 + 9 = 16$. Sit $n = 3$, erit $x = 27 - 2 = 25$, ideoque $3^4 = 25 + 27 + 29 = 81$.

Sit $m = 5$, erit $x = n^4 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 16 - 1 = 15$, ideoque $2^5 = 15 + 17 = 32$. Sit $n = 3$, erit $x = 81 - 2 = 79$, ideoque $3^5 = 79 + 81 + 83 = 243$.

SCHOLION.

172. *Mira igitur facilitate ostendimus ad captum tironum, quomodo potentiæ cujuscunque gradus ex additione numerorum imparium procreentur, quod impersectius multoque intricatius proponitur in Miscellaneis Berolinensibus* p. 327 & seqq.

PROBLEMA 61.

173. *Invenire tres numeros continue proportionales, dato facto ex quadrato tertii in primum una cum denominatore rationis.*

Sit factum $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit secundus $= mx$
tertius $= m^2x$ } (§. 114).

Quare per conditionem problematis

$$a = m^4x^3$$
$$a : m^4 = x^3$$
$$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$$

Sit e. gr. $a = 648$, $m = 3$; erit $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$. Hinc terminus secundus $mx = 6$, & tertius $m^2x = 18$.

Æquatio prima in hanc resolvitur analogiam, $1 : m^4 = x^3 : a$ (§. 299 *Arith.*). Quare cum $1 : m^4$ sit ratio quadruplicata rationis $1 : m$ (§. 159 *Arith.*); sequens enascitur

Theorema: Cubus termini primi in proportione geometrica continua est ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad secundum.

PROBLEMA 62.

174. *Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= b$
pars prima $= x$
erit secunda $= bx$
tertia $= b^2x$ } (§. 114)

& per conditionem problematis

$$b^2x + bx + x = a \quad b^2 + b + 1 \text{ Divid.}$$
$$x = a : (b^2 + b + 1)$$

Sit $b=4$, $a=42$; erit $x=42:(16+4+1)=42:21=2$. Hinc pars secunda $bx=8$, & tertia $b^2x=32$.

Examen: $2+8+32=42$.

PROBLEMA 63.

175. *Numerum datum in terminos quotcunque proportionales resolvere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $=a$
denominator $=m$
terminus primus $=x$
erit secundus $=mx$
tertius $=m^2x$
quartus $=m^3x$ &c.

Ergo per conditionem problematis

$$x+mx+m^2x+m^3x+m^4x\ \&c.=a$$

$$x=a:(1+m+m^2+m^3+m^4\ \&c.)$$

Sit $a=364$, $m=3$ & termini sint numero sex; erit $x=364:(1+3+9+27+81+243)=364:364=1$. Ergo 1, 3, 9, 27, 81, 243 est series proportionalium quaesita.

PROBLEMA 64.

176. *Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios continue proportionales.*

RESOLUTIO.

Sit primus datorum $=a$
ultimus $=b$
mediorum primus $=x$
numerus mediorum $=m$

erit (*per conditionem problematis* & §. 302 *Arith.*)

$$a,\ x,\ \frac{x^2}{a},\ \frac{x^3}{a^2},\ \frac{x^4}{a^3}\ \&c.\ \frac{x^m}{a^{m-1}},\ b,$$

consequenter (§. 118)

$$x^{m+1}:a^{m-1}=ab \qquad a^{m-1}\ \text{Mult.}$$

$$x^{m+1}=a^m b$$

$$x=\sqrt[m+1]{a^m b}$$

Sit $a=1$, $b=243$, $m=4$; erit $m+1=5$, ideoque $x=\sqrt[5]{243}=3$, consequenter termini intermedii sunt 3, 9, 27, 81.

SCHOLION.

177. *Ad manus esse debet tabula dignitatum superiorum pro digitis singulis, qualis extat pro quadratis & cubis (§. 257 Arith.).*

COROLLARIUM.

178. Quodsi numerus, qui exprimit terminum desideratum, fuerit n; erit medius proportionalis $=x^n:a^{n-1}$. Quare si pro x substituatur valor modo inventus $\sqrt[m+1]{a^m b}=a^{m:(m+1)}b^{1:(m+1)}$; prodibit numerus quaesitus $=a^{mn:(m+1)}b^{n:(m+1)}:a^{n-1}=a^{mn:(m+1)}b^{n:(m+1)}:a^{(mn-m+n-1):(m+1)}=a^{(m-n+1):(m+1)}b^{n:(m+1)}$.

SCHOLION.

179. *Cadant e. gr. inter 1 & 243 quatuor medii proportionales continue & quaeratur eorum secundus: erit* $a=1$, $b=243$, $m=4$, $n=2$, *ideoque* $(m-n+1):(m+1)=\frac{3}{5}$, $n:(m+1)=\frac{2}{5}$, *consequenter numerus quaesitus* $\sqrt[5]{a^3b^2}=\sqrt[5]{59049}=9$.

PROBLEMA 65.

180. *Data summa termini primi & ultimi, itemque summa secundi & tertii in proportione sive continua sive discreta, una cum denominatore rationis, invenire terminos singulos.*

Sit summa I $=a$
II $=b$
denominator $=m$
terminus primus $=x$
erit quartus $=a-x$
secundus $=mx$
tertius $=b-mx$

Quare per conditionem problematis

$$x:mx=b-mx:a-x$$

$$\text{Hinc } ax-x^2=mbx-m^2x^2\ (\S.\ 297\ \textit{Arit.})$$

$$x\ \text{Divid.}$$

$$a-x=mb-m^2x$$

$$m^2x-x=mb-a \qquad m^2-1\ \text{Divid.}$$

$$x=\frac{mb-a}{m^2-1}$$

Sit

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$; erit $x = (22 - 13):(4 - 1) = 9:3 = 3$. Hinc terminus secundus $mx = 6$, tertius $b - mx = 11 - 6 = 5$, & quartus $a - x = 13 - 3 = 10$.

PROBLEMA 66.

180. *Invenire tres numeros continue proportionales ejus conditionis, ut differentia primi & secundi æquetur numero dato & differentia secundi atque tertii æqualis sit itidem numero dato.*

Sit differentia I $= a$
differentia II $= b$
terminus I $= x$
erit II $= x + a$
III $= x + a + b$

Hinc per conditionem problematis

$$x : x + a = x + a : x + a + b$$

$$x^2 + ax + bx = x^2 + 2ax + a^2$$

$$x^2 + ax \qquad x^2 + ax \quad \text{Subtr.}$$

$$bx = ax + a^2$$

$$bx - ax = a^2 \quad (b - a) \text{ Divid.}$$

$$x = a^2 : (b - a)$$

Sit $a = 8$, $b = 24$; erit $x = 64:(24 - 8) = 64:16 = 4$. Hinc terminus secundus $x + a = 4 + 8 = 12$, & tertius $x + a + b = 4 + 8 + 24 = 36$.

Analogia, in quam resolvitur æquatio penultima, $b - a : a = a : x$ sequens continet

Theorema: Si fuerint tres numeri continue proportionales, erit differentia primi & secundi numerus medius proportionalis inter differentiam differentiæ termini primi & secundi a differentia secundi ac tertii & terminum primum.

PROBLEMA 67.

181. *Datis in progressione geometrica termino primo & ultimo atque terminorum numero, invenire denominatorem rationis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
numerus terminorum $= n$
denominator $= x$

Erit (§. 121)

$$b = x^{n-1} a \quad a \text{ Divid.}$$

$$b : a = x^{n-1} \quad \text{Extr. rad. } n - 1$$

$$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$; erit $x = \sqrt[5]{(486 : 2)} = \sqrt[5]{243} = 3$.

PROBLEMA 68.

182. *Datis denominatore rationis, terminorum numero & summa progressionis geometricæ, invenire terminum primum.*

Sit denominator $= m$
numerus terminorum $= n$
summa progressionis $= c$
terminus I $= x$
erit ultimus $= m^{n-1} x$

consequenter (§. 121)

$$c = (m^n x - x) : (m - 1) \quad m - 1 \text{ Mult.}$$

$$mc - c = m^n x - x \quad m^n - 1 \text{ Divid.}$$

$$(mc - c) : (m^n - 1) = x$$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$; erit $x = 2.728 : 728 = 2$.

Analogia, in quam æquatio penultima resolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$ suppeditat hoc

Theorema: Summa progressionis geometricæ est ad terminum primum ut dignitas denominatoris rationis, cujus exponens numero terminorum æqualis est, unitate mulctata ad denominatorem ipsum unitate imminutum.

PROBLEMA 69.

183. *Datis in progressione geometrica termino primo & ultimo una cum denominatore rationis, invenire numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= m$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)

$m^{x-1}a = b$, hoc est; si logarithmus ipsius a ponatur la & logarithmus ipsius $m = lm$

$$xlm - lm + la = lb \quad (\S. 341. 337 \textit{ Arith.})$$

$$xlm = lb - la + lm \quad lm \text{ Divid.}$$

$$x = (lb - la) : lm + 1$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$, erit

$lb = 2.6866363$
$la = 0.3010300$

$lb - la = 2.3856063$

$lb - la = 23856063$ (5
$lm = 4771213$ (1

$6 = x$

Problema 70.

184. *Datis summa progressionis geometricæ, termino primo atque ultimo, invenire numerum terminorum ac denominatorem rationis.*

Sit summa $= c$
terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)

$$c = (by - a) : (y - 1) \qquad b = y^{x-1}a$$

$$cy - c = by - a \quad y - 1 \text{ Mult.}$$

$$cy - by = c - a \quad c - b \text{ Divid.}$$

$$y = (c - a) : (c - b)$$

Æquatio altera adhibitis logarithmis in sequentem degenerat (§. 341. 337 *Arith.*)

$$lb = xly - ly + la$$

$$lb + ly - la = xly \quad ly \text{ Divid.}$$

$$(lb - la) : ly + 1 = x$$

Quodsi substituatur valor ipsius ly paulo ante inventus, qui est $l(c - a) - l(c - b)$; habebimus

$$\frac{lb - la}{l(c - a) - l(c - b)} + 1 = x$$

Sit $c = 728$, $a = 2$, $b = 486$: erit

$lb = 2.6866363$
$la = 0.3010300$

$lb - la = 2.3856063$
$l(c - a) = 2.8609366$
$l(c - b) = 2.3838154$

Differ. $= 4771212$

23856063 (5
4771212 (1

$6 = x$

$c = 728$
$b = 486$

$c - b = 242$

$c = 728$
$a = 2$

$c - a = 726$

Problema 71.

185. *Datis in progressione geometrica facto ex primo in ultimum, numero terminorum & denominatore rationis, invenire terminum primum & ultimum.*

Sit factum $= f$
numerus termin. $= n$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$
erit (*per conditiones problem.* & §. 121)

$$xy = f \quad x \text{ Divid.} \qquad m^{n-1}x = y$$

$$y = f : x$$

Quare (§. 87 *Arith.*)

$$f : x = m^{n-1}x \quad x \text{ Mult.}$$

$$f = m^{n-1}x^2 \quad m^{n-1} \text{ Divid.}$$

$$f : m^{n-1} = x^2 \quad \text{Extr. rad.}$$

$$\sqrt{f} : \sqrt{m^{n-1}} = x$$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $f = 972$; erit $x = \sqrt{972} : \sqrt{243} = \sqrt{4} = 2$, & $y = f : x = 972.2 = 486$.

Definitio 13.

186. Tres vel quatuor *quantitates* dicuntur *harmonice proportionales*, si in priore casu differentia primæ & secundæ fuerit ad differentiam secundæ atque tertiæ, ut prima ad tertiam; in

in casu posteriore differentia primæ & secundæ ad differentiam tertiæ & quartæ ut prima ad quartam.

E. gr. 10, 16 & 40 sunt in proportione harmonica: est enim $6:24=10:40$.

Si termini proportionales in casu priore continuentur; oritur *Progressio harmonica*.

PROBLEMA 72.

187. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.*

Sit prima $=a$
secunda $=b$
tertia $=x$
erit (§. 186)

$$b-a:x-b=a:x$$

$$ax-ab=bx-ax \quad (\S. 297\ Arith.)$$

$$2ax-bx=ab$$

$$x=ab:(2a-b) \quad 2a-b \text{ Divid.}$$

E. gr. Sit $a=10$, $b=16$; erit $x=160:(20-16)=160:4=40$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $2a-b:a=b:x$, unde sequens enascitur

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales; erit differentia secundi a duplo primi ad primum, ut secundus ad tertium.

COROLLARIUM I.

188. Si $2a=b$; erit $x=ab:0$, consequenter $1:0=x:ab$ (§. 174 *Arith.*). Quare cum non sit $1=0$, nec erit $x=ab$, ideoque in hoc casu nullus numerus harmonice proportionalis ipsis a & b inveniri potest. E. gr. si $a=12$, $b=24$; erit juxta regulam $x=12.24:(24-24)=12.24:0$. Sed non licet 12.24 seu 288 pro termino tertio assumere: alias enim foret $12:264=12:288$ (§. 186). Quod absurdum. Multo minus inveniri poterit, si $b>2a$.

COROLLARIUM 2.

189. Quodsi ex tribus harmonice proportionalibus 6, 8, 12 terminus secundus sumatur pro a, tertius pro b; invenietur quartus harmonice continue proportionalis $=8.12:(16-12)=8.12:4=8.3=24$.

COROLLARIUM 3.

190. Cum eodem modo, si tertius pro a, quartus pro b sumatur, quintus inveniri queat & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progressio, si possibile (§. 188), continuatur per regulam inventam. E. gr. si $a=10$, $b=12$; erit tertius $12.10:(20-12)=15$. Inde quartus $12.15:(24-15)=20$; quintus $15.20:(30-20)=30$; sextus $20.30:(40-30)=60$. Sed ulterius continuari nequit ob $60=2.30$ (§. 188).

PROBLEMA 73.

191. *Datis duabus quantitatibus, invenire mediam harmonice proportionalem.*

Sit prima $=a$
secunda $=x$
tertia $=b$

erit $x-a:b-x=a:b$ (§. 186)

$$bx-ab=ab-ax \quad (\S. 297\ Arith.)$$

$$ax+bx=2ab$$

$$x=2ab:(a+b) \quad a+b \text{ Divid.}$$

E. gr. Sit $a=10$, $b=40$; erit $x=800:50=16$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $a+b:2a=b:x$, unde sequens enascitur

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales; erit summa primi & ultimi ad primi duplum ut ultimus ad medium.

PROBLEMA 74.

192. *Datis tribus quantitatibus, invenire quartam harmonice proportionalem.*

Sit prima $=a$
secunda $=b$
tertia $=c$
quarta $=x$
erit (§. 186)

$$b-a:x-c=a:x$$

$$bx-ax=ax-ac \quad (\S. 297\ Arith.)$$

$$ac=2ax-bx$$

$$ac:(2a-b)=x \quad 2a-b \text{ Divid.}$$

Sit

Sit e. gr. $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$; erit $x = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $2a - b : a = c : x$, quæ sequens suppeditat

Theorema: Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales; erit ut differentia secundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

Definitio 14.

193. *Proportio contraharmonica* est ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & secundi est ad differentiam secundi & tertii ut tertius ad primum.

E. gr. 3, 5 & 6 sunt numeri contraharmonice proportionales: est enim $2 : 1 = 6 : 3$.

Problema 75.

194. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 193)

$$b - a : x - b = x : a$$

$$ab - aa = x^2 - bx \quad (\text{§. 297 } Arith.)$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \qquad \tfrac{1}{4}b^2 \quad \text{Add. (§. 143)}$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \tfrac{1}{4}b^2$$

Extr. rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x - \tfrac{1}{2}b \text{ ob } x > b$$

$$\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x$$

E. gr. Sit $a = 3$, $b = 5$; erit $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} + 15 - 9)} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Problema 76.

195. *Datis duabus quantitatibus, invenire mediam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
media $= x$
tertia $= b$
erit (§. 193)

$$x - a : b - x = b : a$$

$$ax - a^2 = b^2 - bx \quad (\text{§. 297 } Arith.)$$

$$ax + bx = a^2 + b^2$$

$a + b$ Divid.

$$x = (a^2 + b^2) : (a + b)$$

E. gr. sit $a = 3$, $b = 6$; erit $x = (9 + 36) : (3 + 6) = 45 : 9 = 5$.

Theorema. Si summa duorum quadratorum dividitur per summam radicum; quotus est inter radices medius contraharmonice proportionalis.

Definitio 15.

196. *Numerus pronicus* est, qui aggregato ex radice & quadrato ejusdem æqualis.

Corollarium 1.

197. Si in progressione arithmetica terminus primus fuerit 2, differentia terminorum itidem 2, numerus terminorum $= n$; erit summa progressionis $= 2n + \frac{1}{2}(n^2 - n)2$ (§. 108) $= 2n + n^2 - n = n^2 + n$, ideoque numerus pronicus, cujus radix numero terminorum æqualis.

Corollarium 2.

198. Patet igitur numeros pronicos prodire per summationem progressionis numerorum parium. Sit enim

progressio 2, 4, 6, 8, 10 &c.
erunt pronici 2, 6, 12, 20, 30 &c.

Problema 77.

199. *Ex dato numero radicem pronicam extrahere.*

Resolutio.

Sit numerus datus $= a$, radix pronica $= x$;
erit (§. 196)

$$x^2 + x = a$$

$$\tfrac{1}{4} \qquad \tfrac{1}{4} \quad \text{Add. (§. 143)}$$

$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} = a + \tfrac{1}{4}$$

Extr. rad.

$$\tfrac{1}{2} + x = \sqrt{(a + \tfrac{1}{4})} = \sqrt{\frac{(4a + 1)}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a + 1)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a + 1)} - \tfrac{1}{2}$$

Theorema: Si quadruplo numeri pronici addatur unitas & radix unitate mulctata bifariam dividatur; quotus est radix pronica.

Sit

Sit $a = 72$, erit $x = \frac{1}{2}\sqrt{(4 \cdot 72 + 1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{289} - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8$.
Examen: Nam $64 + 8 = 72$.

PROBLEMA 78.

200. ***Invenire summam quadratorum & cuborum, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur.***

Sit $0+1+1+1+1+1+1$ &c. $= \int n^0$
$0+1+2+3+4+5$ &c. $= \int n^1$
$0+1+4+9+16+25$ &c. $= \int n^2$
$0+1+8+27+64+125$ &c. $= \int n^3$
&c. &c.
$1+1+1+1+1+1$ &c. $= \int (n+1)^0$
$1+2+3+4+5+6$ &c. $= \int (n+1)^1$
$1+4+9+16+25+36$ &c. $= \int (n+1)^2$
$1+8+27+64+125+216$ &c. $= \int (n+1)^3$
&c. &c.

Nimirum $\int n^0$ denotat summam quotlibet unitatum seriei a cyphra incipientis; $\int (n+1)^0$ summam quotlibet unitatum seriei ab unitate incipientis, quia 0 est exponens unitatis (§. 55). Sed n repræsentat unamquamque unitatem in serie prima; $n+1$ in altera. Ergo si numerus terminorum in utraque serie idem; erit $\int (n+1)^0 - \int n^0 = (n+1)^0 = 1$. Similiter $\int n^1$ denotat summam seriei numerorum naturalium a cyphra incipientis & n quemlibet ejus terminum; $\int (n+1)^1$ summam seriei eorundem numerorum ab unitate incipientium & $n+1$ quemlibet ejus terminum 1, 2, 3 &c. quia 1 est exponens radicum, seu dignitatis primæ (§. *cit.*). Quare si in utraque serie fuerit idem terminorum numerus; erit $\int (n+1)^1 - \int n^1 = (n+1)^1$, ubi $n+1$ terminum ultimum seriei ab unitate incipientis denotat, quo scilicet ea differt a serie, quæ a cyphra inchoatur. Eodem modo patet, esse $\int (n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$, $\int (n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$, $\int (n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ &c. & in genere $\int (n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$.

Jam $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (§. 81)

$$\int (n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int (n+1)^2 - \int n^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$$

h.e. ob $\int (n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$ *per dem.*

$$(n+1)^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1 \quad \text{2 Divid.}$$

$$\tfrac{1}{2}(n+1)^2 - \tfrac{1}{2}\int n^0 - \tfrac{1}{2} = \int n^1$$

E. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = \frac{36}{2} = 18$, $\frac{1}{2}\int n^0 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, ideoque $\int n^1$ summa omnium radicum ab 0 usque ad 5; $= 18 - 3 = 15$. Similiter sit $n = 3$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = 8$, $\frac{1}{2}\int n^0 = 1\frac{1}{2}$, ideoque $\int n^1 = 6$.

Est porro

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad (\text{§. } 84)$$

$$\int (n+1)^3 = \int n^3 + 3\int n^2 + 3\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int (n+1)^3 - \int n^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$$

h.e. ob $\int (n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$ *per demonst.*

$$(n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2 \quad \text{3 Divid.}$$

$$\tfrac{1}{3}(n+1)^3 - \int n^1 - \tfrac{1}{3}\int n^0 - \tfrac{1}{3} = \int n^2$$

E. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{216}{3} = 72$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1\frac{2}{3}$, ideoque $\int n^2 = 72 - 17 = 55$. Similiter sit $n = 3$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = 21\frac{1}{3}$, $\int n^1 = 6$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1$, ideoque $\int n^2 = 21\frac{1}{3} - 7\frac{1}{3} = 14$.

Sit denique

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$\int (n+1)^4 = \int n^4 + 4\int n^3 + 6\int n^2 + 4\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int (n+1)^4 - \int n^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$$

h.e. ob $\int (n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ *per demonst.*

$$(n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3 \quad \text{4 Divid.}$$

$$\tfrac{1}{4}(n+1)^4 - \tfrac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \tfrac{1}{4}\int n^0 - \tfrac{1}{4} = \int n^3$$

Sit e. gr. $n = 5$, erit $\frac{1}{4}(n+1)^4 = 324$, $\frac{3}{2}\int n^2 = 82\frac{1}{2}$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{4}\int n^0 = 1\frac{1}{4}$, ideoque $\int n^3 = 324 - 99 = 225$.

SCHOLION I.

201. *Quod in summationibus, quibus in resolutione problematis usi sumus, semper addenda sit unitas, exempla singularia palam loquuntur. Si enim in æquatione* $\int (n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n^1 + \int n^0 + 1$ *fueris* $n = 4$; *erit*

$\int n^0$

$$\int n^0 = 0 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$\int n^1 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$
$$\int n^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16$$
$$\int (n+1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

Unde cum differentia inter $\int (n+1)^2$ *&* $\int n^2$ *sit* 25, *&* $2\int n^1 + \int n^0$ *tantum* 24; *patet, ad conservandam aequalitatem addendam esse unitatem.*

SCHOLION 2.

202. *Eadem methodo, qua numerorum naturalium quadrata & cubos summare docuimus, altiores quoque dignitates summantur. Sed cum potentiae in infinitum assurgant, ideo problema generale pro casibus infinitis inveniendum.*

PROBLEMA 79.

203. ***Summare potentias quascunque numerorum naturalium.***

Quoniam $(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \frac{m+1}{1} n^m + \frac{m+1.m}{1.\ 2} n^{m-1} + \frac{m+1.m.m-1}{1.\ 2.\ 3} n^{m-2} + \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.\ 4} n^{m-3}$ &c. in infinit. (§. 95); erit

$$\int (n+1)^{m+1} = \int n^{m+1} + \frac{m+1}{1} \int n^m + \frac{m+1.m}{1.\ 2} \int n^{m-1} + \frac{m+1.m.m-1}{1.\ 2.\ 3} \int n^{m-2} + \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \int n^{m-3} \text{ \&c. in inf.} + 1.$$

Hinc $\int (n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.\ 2} \int n^{m-1} - \frac{m+1.m.m-1}{1.\ 2.\ 3} \int n^{m-2} - \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \int n^{m-3}$ &c. in infinit. $- 1 = \frac{m+1}{1} \int n^m$.

Sed $\int (n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$ (§. 200). Ergo $(n+1)^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.\ 2} \int n^{m-1} - \frac{m+1.m.m-1}{1.\ 2.\ 3} \int n^{m-2} - \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \int n^{m-3}$ &c. in infinitum $- 1 = \frac{m+1}{1} \int n^m$, consequenter $\int n^m = \frac{1}{m+1} (n+1)^{m+1} - \frac{m}{1.2} \int n^{m-1} - \frac{m.m-1}{1.\ 2.\ 3.} \int n^{m-2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \int n^{m-3}$ &c. in infinit. $- \frac{1}{m+1}$.

E. gr. sit $m = 3$, erit $m + 1 = 4$, $m - 1 = 2$, $m - 2 = 1$, $m - 3 = 0$, ideoque $\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$, ut ante (§. 200).

SCHOLION.

204. *Theorema generale terminis quidem constat infinitis; in casibus tamen specialibus numerus terminorum finitus evadit, quia reliqui evanescunt, quando numerus ab* m *subtrahendus fit ipsi* m *aequalis: quemadmodum ex allato exemplo speciali apparet. Ita vero summationem potentiarum via vere analytica eruimus, eaque perfacili, ad captum tironum. Semper tamen utendum est termino ultimo* $\frac{1}{m+1}$, *cujus ratio ante allata* (§. 201).

COROLLARIUM.

205. Cum summatio potentiarum superiorum a summatione omnium inferiorum pendeat; si in formulis altioribus pro $\int n^{m-1}$, $\int n^{m-2}$, $\int n^{m-3}$ &c. valores ex inferioribus substituantur, prodibunt formulae per solum n summas potentiarum determinantes, non praesuppositis summationibus anterioribus. E. gr.

$\int n^0 = n$ (§. 200)

$2\int n^1 = (n+1)^2 - \int n^0 - 1$ (§. 200)
$= n^2 + 2n + 1$
$\quad - n$
$\quad\quad - 1$
$= nn + n$

Hinc $\int n^1 = (nn + n) : 2$.

$3\int n^2 = (n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§. 200)
$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
$\quad - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$
$\quad\quad - n$
$\quad\quad\quad - 1$
$= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Hinc $\int n^2 = (n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n) : 3 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$.

$4\int n^3 = (n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§. 200)
$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$
$\quad - 2n^3 - 3n^2 - n$
$\quad\quad - 2n^2 - 2n$
$\quad\quad\quad - n$
$\quad\quad\quad\quad - 1$
$= n^4 + 2n^3 + n^2$

Hinc $\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4$.

$5\int n^4 = (n+1)^5 - 10\int n^3 - 10\int n^2 - 5\int n^1 - \int n^0 - 1$
$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$
$\quad - \frac{10}{4}n^4 - \frac{20}{4}n^3 - \frac{10}{4}n^2$
$\quad\quad - \frac{20}{6}n^3 - \frac{10}{2}n^2 - \frac{10}{6}n$
$\quad\quad\quad - \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$
$\quad\quad\quad\quad - n$
$\quad\quad\quad\quad\quad - 1$
$= n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{10}{6}n^3 - \frac{1}{6}n$
$= (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 6$

Hinc $\int n^4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 30$.

&c. &c. &c.

DEFI-

DEFINITIO 16.

206. ***Numeri Polygoni*** sunt summæ progressionum arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in specie *Triangulares*, si differentia terminorum, qui summantur, fuerit 1; *Quadrati*, si 2; *Pentagoni*, si 3; *Hexagoni*, si 4; *Heptagoni*, si 5; *Octogoni*, si 6 &c.

Progr. Arith.	1	2	3	4	5	6	7	8
Num. Triang.	1	3	6	10	15	21	28	36
Progr. Arith.	1	3	5	7	9	11	13	15
Num. Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64
Progr. Arith.	1	4	7	10	13	16	19	22
Num. Pentag.	1	5	12	22	35	51	70	92
Progr. Arith.	1	5	9	13	17	21	25	29
Num. Hexag.	1	6	15	28	45	66	91	120

&c. &c.

SCHOLION.

207. *Numeri polygoni nomina sortiuntur a figuris geometricis, in quas puncta unitatibus respondentia disponi possunt. E. gr. numeri triangularis 3 tria puncta unitatibus respondentia disponuntur in triangulum: & idem tenendum est de reliquis numeris triangularibus.*

DEFINITIO 17.

208. *Latus numeri polygoni* est numerus terminorum progressionis arithmeticæ, qui summantur. *Numerus* vero *angulorum* est, qui indicat, quot angulos figura habet, unde numerus polygonus nomen suum sortitur.

COROLLARIUM.

209. Numerus ideo angulorum in triangularibus 3; in tetragonis 4; in pentagonis 5 &c. consequenter differentiam terminorum, qui summantur, excedit duabus unitatibus (§. 206).

PROBLEMA 80.

210. *Dato latere numeri polygoni & numero angulorum, invenire numerum polygonum.*

Sit latus $= n$
numerus angulorum $= a$
terminus primus progref. $= 1$ (§.206),
differentia terminorum $= a-2$ (§.209),
terminus ult. $1+(a-2)(n-1)$ (§.333
primus 1 *Arith.*)

Summa primi & ult. $2+(a-2)(n-1)$
hoc est $4+na-2n-a$
dimidius term. num. $\frac{1}{2}n$

Num. polygonus $2n+\frac{1}{2}n^2a-n^2-\frac{1}{2}an$
(§.206.107) $=(n^2a-2n^2-an+4n):2$
$$= \frac{n^2(a-2)-n(a-4)}{2}$$

Theorema: Numerus polygonus est semidifferentia factorum ex quadrato lateris in numerum angulorum duabus unitatibus mulctatum & ex ipso latere in numerum angulorum quaternario mulctatum.

COROLLARIUM I.

211. Sit $a=3$; erit triangularis $= \frac{1n^2+1n}{2}$

Sit $a=4$; erit quadratus $= \frac{2n^2-0n}{2} = n^2$

Sit $a=5$; erit pentagonus $= \frac{3n^2-1n}{2}$

Sit $a=6$; erit hexagonus $= \frac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n$

Sit $a=7$; erit heptagonus $= \frac{5n^2-3n}{2}$

Sit $a=8$; erit octogon. $= \frac{6n^2-4n}{2} = 3n^2-2n$

&c. &c.

COROLLARIUM 2.

212. Quoniam (§. 210) numerus polygonus $\frac{n^2(a-2)-n(a-4)}{2}$; erit summa seriei cujuscunque numerorum polygonorum $\frac{(a-2)\int n^2-(a-4)\int n^1}{2}$; Nempe quia $a-2$ & $a-4$ sunt numeri constantes, qui in casu speciali sunt determinati, non summantur. Sed $\int n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ & $\int n^1 = \frac{n^2+n}{2}$ $= \frac{3n^2+3n}{6}$ (§.205). Ergo summa polygonorum $\frac{(a-2)(2n^3+3n^2+n)-(a-4)(3n^2+3n)}{12}$

 $=(2an^3$

$= (2an^3 + 3an^2 + an - 4n^3 - 6n^2 - 2n - 3an^2 - 3an + 12n^2 + 12n) : 12 = (an^3 - an - 2n^3 + 3n^2 + 5n) : 6 = \frac{(a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n}{6}$

unde porro theoremata specialia eliciuntur, determinato numero angulorum a. Nempe summa

triangularium	$(n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$
pentagonorum	$(n^3 + n^2) : 2$
hexagonorum	$(4n^3 + 3n^2 - n) : 6$
heptagonorum	$(5n^3 + 3n^2 - 2n) : 6$
octogonorum	$(2n^3 + n^2 - n) : 2$
&c.	&c.

Est enim pro triangularibus $a = 3$, pro pentagonis $a = 5$, pro hexagonis $a = 6$, pro heptagonis $a = 7$, pro octogonis $a = 8$ &c. (§. 208).

Problema 81.

213. *Dato numero polygono & numero angulorum, invenire latus.*

Sit numerus polygonus $= p$
latus $= x$
numerus angulorum $= a$
erit differ. terminorum $= a - 2$ (§. 209)
terminus primus $= 1$ (§. 206)
ideoque ultimus $= 1 + (x - 1)(a - 2)$
hoc est, $3 + ax - 2x - a$ (§. 333 *Arith.*)
terminus primus 1

summa primi & ult. $4 + ax - 2x - a$
dimid. num. term. $\frac{1}{2}x$

numerus polygonus $2x + \frac{1}{2}ax^2 - x^2 - \frac{1}{2}ax$ (§. 107. 206).

Quare $\frac{1}{2}ax^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}ax = p$ 2 Mult.

$ax^2 - 2x^2 + 4x - ax = 2p$ $a - 2$ Divid.

$$x^2 + \frac{4-a}{a-2}x = \frac{2p}{a-2}$$

hoc est, si fiat $(a - 4) : (a - 2) = m$,

$$x^2 - mx = 2p : (a-2)$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$x^2 - mx + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2)$$

$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}m \\ \frac{1}{2}m - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$$

$$x = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$$

hoc est, substituto valore ipsius m,

$$x = \frac{a-4}{2a-4} + \sqrt{\left\{\frac{a^2 - 8a + 16}{4a^2 - 16a + 16} + \frac{4p}{2a-4}\right\}}$$

$$= \frac{a - 4 + \sqrt{(8ap - 16p + a^2 - 8a + 16)}}{2a - 4}$$

$$= \frac{a - 4 + \sqrt{(8(a-2)p + (a-4)^2)}}{2a - 4}$$

obtinet nimirum signum $+$, quia radix major est quam $a - 4$.

Sit e. gr. $a = 3$; erit latus numeri triangularis $\frac{-1 + \sqrt{(8p+1)}}{2}$

Sit $a = 5$; erit latus pentagoni $\frac{1 + \sqrt{(24p+1)}}{6}$

Sit $a = 6$; erit latus hexagoni $\frac{2 + \sqrt{(32p+4)}}{8}$

Sit $a = 7$; erit latus heptagoni $\frac{3 + \sqrt{(40p+9)}}{10}$

&c. &c.

Definitio 18.

214. Summæ numerorum polygonorum eodem modo collectæ, quo ex progressionibus arithmeticis ipsi polygoni eliciuntur, dicuntur *Pyramidales primi*: summæ pyramidalium primorum *Pyramidales secundi*: summæ pyramidalium secundorum *Pyramidales tertii* &c. in infinitum. Speciatim *Pyramidales triangulares primi* vocantur, si ex triangularibus ortum ducant; *Pyramidales pentagoni primi*, si ex pentagonis oriuntur &c.

E. gr. Num. triang.	$= 1, 3, 6, 10, 15, 21$
Pyram. triang. prim.	$= 1, 4, 10, 20, 35, 56$
secundi	$= 1, 5, 15, 35, 70, 126$
tertii	$= 1, 6, 21, 56, 126, 252$
	&c. &c.

Corollarium.

215. Cum igitur summare docuerimus numeros polygonos (§. 212), evidens jam est, quomodo numeri pyramidales primi inveniantur. Nempe $\frac{(a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n}{6}$ exprimit omnes numeros pyramidales primos vi §. cit.

PRO-

PROBLEMA 82.

216. *Invenire summam numerorum pyramidalium superioris ordinis cujuscunque, seu dato quolibet inferiore proxime superiorem.*

Non alia re opus est, quam ut juxta methodum superius traditam (§. 200) numeri pyramidales proxime inferioris ordinis summentur: ita enim habentur eorum summæ. Quare cum numerus pyramidalis primi ordinis sit $\frac{(a-2)n^3+3n^2-(a-5)n}{6}$ (§. 215); erit summa pyramidalium primi ordinis $\frac{(a-2)\int n^3+3\int n^2-(a-5)\int n^1}{6}$. Sed $\int n^3=(n^4+2n^3+n^2):4$, $\int n^2=(2n^3+3n^2+n):6$, $\int n^1=(n^2+n):2$ (§. 205). Ergo summa pyramidalium primi ordinis, seu numerus pyramidalis secundi ordinis $=((a-2)(n^4+2n^3+n^2)+2(2n^3+3n^2+n)-(a-5)(2n^2+2n)):24=(an^4+2an^3-an^2-2an-2n^4+14n^2+12n):24=((a-2)n^4+2an^3-(a+14)n^2-(2a+12)n):24$.

Sit e. gr. $a=3$, hoc est quæratur summa pyramidalium triangularium primi ordinis: erit ea $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}$. Quoniam vero summa inventa generalis exprimit numerum quemcunque pyramidalem secundi ordinis (§. 214), si ea porro eundem in modum summetur; prodibit summa pyramidalium secundi ordinis seu numerus pyramidalis ordinis tertii (§. *cit.*). Et ita progredi licet, quousque libet.

COROLLARIUM 1.

217. Cum summa unitatum sit n, summa laterum $\frac{n^2+n}{2}=\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}$ (§. 205), summa triangularium $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$ (§. 212), summa pyramidalium primi ordinis $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}=\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}$ (§. 216) &c. evidens est lex, qua numeri pyramidales ex triangularibus orti in infinitum summentur. Nimirum numerus fractionum in se invicem ducendarum excedit numerum ordinis tribus unitatibus, fractionum earundem numeratores progrediuntur in serie naturali numerorum, sed terminus primus progressionis est latus numeri figurati, denominatores sunt numerorum naturalium progressio ab unitate incipiens. Nempe dato latere n, erit numerus pyramidalis triangularis indeterminatus $\frac{n+0}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.\frac{n+4}{5}.\frac{n+5}{6}$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM 2.

218. Hinc apparet, quales numeri sint unciæ potentiarum (§. 95).

PROBLEMA 83.

219. *Dato numero quantitatum, una cum numero indicante, quot earum invicem combinari debeant, invenire numerum combinationum.*

Quantitas una nullam; duæ a & b nonnisi unam combinationem ab admittunt. Trium combinationes sunt tres, nempe ab, ac, bc; quatuor vero sex ab, ac, bc, ad, bd, cd; quinque decem ab, ac, bc, ad, bd, cd, ae, be, ce, de, & ita porro. Unde apparet, numeros combinationum progredi ut 1, 3, 6, 10 &c. hoc est, esse numeros triangulares (§. 206), quorum latus differt unitate a numero quantitatum datarum. Si nempe hic foret q; erit latus numeri combinationum $q-1$, ideoque numerus combinationum $\frac{q-1}{1}.\frac{q+0}{2}$ (§. 217).

Si quantitates invicem combinandæ tres fuerint, & exponens combinationis itidem 3; erit combinatio tantum unica abc. Si quarta accedat, combinationes reperies quatuor abc, abd, bcd,

acd; si quinta, decem *abc*, *abd*, *bcd*, *acd*, *abe*, *bde*, *bce*, *ace*, *ade*, *cde*; si sexta, viginti & ita porro. Numeri ergo combinationum progrediuntur, ut 1, 4, 10, 20 &c. hoc est, sunt numeri pyramidales triangulares primi (§. 214), quorum latus a numero quantitatum datarum differt duabus unitatibus, seu exponente unitate mulctato. Hinc si numerus quantitatum datarum fuerit *q*; erit latus $q-2$, ideoque numerus combinationum $\frac{q-2}{1}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q+0}{3}$ (§. 217).

Si quantitates quatuor invicem combinandæ, numeros combinationum progredi deprehendimus ut numeros pyramidales triangulares secundi ordinis 1, 5, 15, 35 &c. (§. 214), quorum latus a numero quantitatum differt tribus unitatibus seu exponente unitate mulctato. Quare si numerus quantitatum fuerit *q*; erit latus $q-3$, ideoque numerus combinationum $\frac{q-3}{1}\cdot\frac{q-2}{2}\cdot\frac{q-1}{3}\cdot\frac{q+0}{4}$ (§. 217.

Hinc facile abstrahitur regula generalis determinandi numerum combinationum in casu quocunque. Sit nempe numerus quantitatum combinandarum *q*, exponens combinationis *n*; erit numerus combinationum $\frac{q-n+1}{1}\cdot\frac{q-n+2}{2}\cdot\frac{q-n+3}{3}\cdot\frac{q-n+4}{4}\cdot\frac{q-n+5}{5}$ &c. donec numerus addendus sit ipsi *n* æqualis.

E. gr. Sit numerus quantitatum combinandarum $=6$, exponens combinationis 4; erit numerus combinationum $\frac{6-4+1}{1}\cdot\frac{6-4+2}{2}\cdot\frac{6-4+3}{3}\cdot\frac{6-4+4}{4} = \frac{6-3}{1}\cdot\frac{6-2}{2}\cdot\frac{6-1}{3}\cdot\frac{6+0}{4}$ $= \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4} = 15.$

COROLLARIUM.

220. Quodsi quantitatum datarum omnes combinationes possibiles scire desideres, incipiendo nempe a combinationibus singularum binarum; addi oportet $\frac{q-1}{1}\cdot\frac{q+0}{2}$, $\frac{q-2}{1}\cdot\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q+0}{3}$, $\frac{q-3}{1}\cdot\frac{q-2}{2}\cdot\frac{q-1}{3}\cdot\frac{q+0}{4}$ &c. Unde numerus omnium combinationum possibilium erit $\frac{q\cdot q-1}{1.2} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2}{1.2.3} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2\cdot q-3}{1.2.3.4} + \frac{q\cdot q-1\cdot q-2\cdot q-3\cdot q-4}{1.2.3.4.5}$ &c. Quæ est summa unciarum binomii ad dignitatem *q* evecti mulctata exponente dignitatis unitate aucto $q+1$ (§. 95). Quare cum hæ unciæ prodeant $1+1$ ad dignitatem *q* evehendo *per probl.* 29 (§. *cit.*), sit vero $1+1=2$; erit 2^q-q-1 numerus omnium combinationum possibilium. E. gr. si numerus quantitatum sit 5; erit numerus combinationum possibilium $2^5-6=32-6=26$.

SCHOLION.

221. *Uncias prodire debere pro binomio* $1+1$ *ad eam dignitatem elevando, ad quam elevatur binomium* a + b: *patet exinde, quod uncia partium* a *&* b *sit* 1, *atque ideo ut facta literalia ex* a *&* b, *ita unciæ ex* 1 *&* 1 *in se invicem ductis prodire debeant. Vide calculum:*

$$\begin{array}{rl} 1+1 & \textit{Unc. Radicis} \\ 1+1 & \\ \hline +1+1 & \\ 1+1 & \\ \hline 1+2+1 & \textit{Unc. Quadrati} \\ 1+1 & \textit{Unc. Radicis} \\ \hline +1+2+1 & \\ 1+2+1 & \\ \hline 1+3+3+1 & \textit{Unc. Cubi}; \\ \text{\&c. \&c.} & \end{array}$$

PROBLEMA 84.

222. ***Dato numero quantitatum invenire numerum omnium variationum, quas quantitates omnibus modis possibilibus combinatæ ac permutatæ subire possunt.***

Sint quantitates duæ *a* & *b*, erunt variationes permutationum 2 (§. 129), consequenter cum earum quælibet etiam cum seipsa combinari possit, istis

adden-

addendæ adhuc sunt variationes 2. Ergo numerus omnium est $2+2=4$. Quodsi tres fuerint & exponens combinationis 2; combinationes erunt 3 (§. 219) & permutationes 3, nempe *ab*, *ac*, *bc*, & *ba*, *ca*, *cb* (§. 129): quibus si addas combinationes tres uniuscujusque quantitatis cum seipsa *aa*, *bb*, *cc*; habebis numerum variationum $3+3+3=9$.

Eodem modo patet, si quantitates fuerint quatuor & exponens 2, numerum combinationum fore 6, & numerum permutationum itidem 6, numerum combinationum cum seipsa 4, ideoque numerum variationum 16: si manente exponente quantitates fuerint quinque, numerum variationum fore 25 &c. & in genere si numerus quantitatum fuerit n, numerum variationum fore n^2.

Sint quantitates tres & exponens combinationis 3: reperitur numerus variationum $27=3^3$, nempe *aaa*, *aab*, *aba*, *baa*, *abb*, *aac*, *aca*, *caa*, *abc*, *bac*, *bca*, *acb*, *cab*, *cba*, *acc*, *cac*, *cca*, *bba*, *bab*, *bbb*, *bbc*, *cbb*, *bcb*, *bcc*, *cbc*, *ccb*, *ccc*.

Nec absimili modo constabit, si quantitates fuerint quatuor & exponens 3, fore numerum variationum $64=4^3$, & in genere, si fuerit quantitatum numerus $=n$, exponens 3, fore numerum variationum n^3.

Quodsi ita progredi libuerit, reperietur tandem, si quantitatum numerus fuerit n, & exponens n, fore numerum variationum n^n.

Quare si antecedentes omnes addas, ubi exponens minor; reperietur numerus omnium variationum possibilium $n^n+n^{n-1}+n^{n-2}+n^{n-3}+n^{n-4}+n^{n-5}+n^{n-6}$ &c. donec numerus ex n subtractus relinquat 1, quia initium fit a quantitatibus singulis semel positis.

Cum ideo numerus omnium variationum possibilium sit progressio geometrica, cujus terminus primus seu minimus n^1, maximus n^n, denominator n (§. 332 *Arith.* & §. 113 *Anal.*); erit is $=(n^{n+1}-n):(n-1)$ (§. 121).

Sit e. gr. $n=4$, erit numerus variationum possibilium $(4^5-4):(4-1)=1020:3=340$. Sit $n=24$, erit numerus omnium variationum possibilium $(24^{25}-24):(24-1)=3200965864440681898677795534825060 0:23=1391724288887252999425128493402200$. Tot ergo modis 24 literæ inter se componi possunt.

CAPUT II.

De Algebra ad Problemata Arithmetica indeterminata applicata.

PROBLEMA 85.

223. *Invenire duos numeros, quorum summa una cum facto eorundem æquatur numero dato.*

Sit numerus datus $=a$, quæsitorum unus $=x$, alter $=y$; erit per conditionem problematis

$$xy+x+y=a$$
$$y \quad y \text{ Subtr.}$$
$$xy+x=a-y$$
$$y+1 \text{ Divid.}$$
$$x=(a-y):(y+1)$$

Sit $a=30$, $y=2$; erit $x=(30-2):(2+1)=28:3=9\frac{1}{3}$. Sit $a=20$, $y=2$; erit $x=(20-2)$

$(20-2):(2+1)=18:3=6$. Sit $a=19$, $y=4$; erit $x=(19-4):(4+1)=15:5=3$.

ALITER.

Sit numerus datus $=a$, quæsitorum unus $=x+y$, alter $=x-y$ (§. 6); erit per conditionem problematis

$$x^2-y^2+2x=a$$
$$y^2 \quad y^2 \text{ Add.}$$
$$x^2+2x=y^2+a$$
$$1 \quad 1 \text{ Add. (§. 143)}$$
$$x^2+2x+1=y^2+a+1 \quad \text{Extr. rad.}$$
$$x+1=\sqrt{(y^2+a+1)}$$
$$1 \quad 1 \text{ Subtr.}$$
$$x=\sqrt{(y^2+a+1)}-1$$

Unde apparet, ut ex y^2+a+1 radix extrahi possit, $a+1$ esse debere differentiam duorum quadratorum, quorum unum est y^2.

E. gr. Sit $a=19$, $y=\frac{1}{2}$; erit $x=\sqrt{(\frac{1}{4}+19+1)}-1=\sqrt{\frac{81}{4}}-1=\frac{9}{2}-1=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$. Ergo $x+y=3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$, & $x-y=3\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=3$. Sit $a=20$, $y=2$; erit $x=\sqrt{(4+20+1)}-1=\sqrt{25}-1=5-1=4$. Ergo $x+y=4+2=6$, & $x-y=4-2=2$.

PROBLEMA 86.

224. *Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut summa primi & secundi æquetur tertio, differentia vero primi & secundi quarto.*

Sit numerus primus $=x$, secundus $=y$, tertius $=z$, quartus $=t$; erit per conditionem problematis

$$x+y=z \qquad x-y=t$$
$$x=z-y \qquad x=t+y$$

Quare (§. 87 *Arith.*)

$$t+y=z-y$$
$$t+2y=z$$
$$2y=z-t$$
$$y=(z-t):2$$

Ergo $x=(z-t):2+t=(z+t):2$.

Unde apparet, si numeri integri desiderentur, pro z & t assumi debere vel numeros pares, vel impares: nequaquam alterum parem, alterum imparem (§. 72. 74).

Sit $z=8$, $t=2$; erit $y=(8-2):2=6:2=3$, & $x=(8+2):2=10:2=5$. Similiter sit $z=5$, $t=1$; erit $x=(5+1):2=3$, & $y=(5-1):2=2$.

PROBLEMA 87.

225. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unusquisque cum partibus suis aliquotis efficiat unam summam.*

Sit unus $=mx$, alter $=ny$; erit per conditionem problematis

$$1+m+mx+x=1+n+ny+y$$
$$mx+x=1+n+(n+1)y-(1+m)$$
$$x=(1+n+(n+1)y-1-m):(m+1)$$

Apparet ergo, $1+n$ denotare summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius y, & $1+m$ summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius x: posse autem non modo y, sed & utrumque denominatorem pro arbitrio assumi, sed ut y sit numerus impar, isque primus.

Sit e. gr. $m=1$, $n=2$, $y=3$. Partes aliquotæ ipsius n erunt 1 & 2, ipsius m autem 1, consequenter $x=2+1+(2+1)y-1=2+3y=2+9=11$. Sit $m=4$, $n=8$, $y=13$; erit $1+n=1+2+4+8=15$, & $1+m=1+2+4=7$, consequenter $x=(15+15y-7):7=(210-7):7=203:7=29$.

PROBLEMA 88.

226. *Invenire duos numeros, quorum summa æquatur quadrato minoris.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$; erit per conditionem problematis

$$x+y=y^2$$
$$y \quad y \text{ Subtr.}$$
$$x=y^2-y=(y-1)y$$

Unde

Unde apparet, numerum majorem esse factum ex minore in eundem minorem unitate mulctatum.

Sit $y=3$; erit $x=2.3=6$. Sit $y=5$; erit $x=4.5=20$. Sit $y=9$; erit $x=8.9=72$.

Problema 89.

227. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut summa quadratorum aequetur cubo minoris.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$; erit per conditionem problematis

$$x^2+y^2=y^3$$
$$y^2 \quad y^2 \text{ Subtr.}$$
$$x^2=y^3-y^2=y^2(y-1)$$
$$x=y\sqrt{(y-1)}$$

Apparet ideo, pro y assumendum esse numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc est, quadratum quodlibet unitate auctum.

E. gr. Sit $y=5$; erit $x=5\sqrt{(5-1)}=5\sqrt{4}=5.2=10$. Sit $y=17$; erit $x=17\sqrt{(17-1)}=17\sqrt{16}=17.4=68$.

Problema 90.

228. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum aequale sit cubo, cujus radix facto ex numero primo in quadratum secundi aequatur.*

Sit numerus primus $=x$, secundus $=y$, radix cubica $=v$; erit per conditiones problematis

$$v=xy^2 \quad y^2 \text{ Divid.} \qquad xy=v^3 \quad y \text{ Divid.}$$
$$v:y^2=x \qquad x=v^3:y$$

Quare (§. 87 *Arith.*)

$$v:y^2=v^3:y$$
$$y^2 \text{ Mult.}$$
$$v=yv^3$$
$$v \text{ Divid.}$$
$$1=yv^2$$
$$v^2 \text{ Divid.}$$
$$1:v^2=y$$

Ergo in ultima dextera aequatione $x=v^3:y$ substituendo pro y ejus valorem $1:v^2$, erit

$$x=v^3:\frac{1}{vv}=v^5$$

Sit $v=2$; erit $x=32$, $y=\frac{1}{4}$. Sit $v=3$; erit $x=243$, $y=\frac{1}{9}$.

Problema 91.

229. *Invenire duos numeros, quorum quadrata differunt quadrato.*

Sit numerus unus $=x+y$, alter $=x-y$; erit per conditionem problematis

$$x^2+2xy+y^2$$
$$x^2-2xy+y^2 \text{ Subtr.}$$
$$4xy=v^2$$
$$4y \text{ Divid.}$$
$$x=v^2:4y$$

Patet ideo, pro y assumendum esse numerum, per cujus quadruplum dividi potest quadratum aliquod.

Sit e. gr. $v^2=16$, $y=1$; erit $x=16:4=4$. Ergo $x+y=4+1=5$, & $x-y=4-1=3$. Sit $v^2=36$, $y=3$; erit $x=36:12=3$. Ergo $x+y=6$, & $x-y=0$. Sit $v^2=36$, $y=9$; erit $x=36:36=1$. Ergo $x+y=10$, & $x-y=8$.

Problema 92.

230. *Summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere.*

Sit latus quadrati majoris $=a$, minoris $=b$. Sit porro latus quadrati unius ex quaesitis minus quam a, ideoque $a-z$; erit quadrati alterius latus majus quam b. Poterat itaque dici $y-b$. Enimvero ut in calculo irrationalitas evitetur, rectius id nuncupatur $yz-b$. Quare per conditionem problematis

$$a^2-2az$$

$$a^2 - 2az + z^2 + y^2z^2 - 2byz + b^2 = a^2 + b^2$$
Subtr. $\quad a^2 + b^2 \qquad a^2 + b^2$

$$z^2 + y^2z^2 - 2az - 2byz = 0 \quad z \text{ Divid.}$$
$$z + y^2z - 2a - 2by = 0$$
$$2a + 2by \qquad 2a + 2by \text{ Add.}$$

$$y^2z + z = 2a + 2by \quad y^2 + 1 \text{ Divid.}$$
$$z = (2a + 2by):(y^2 + 1)$$

Sit e. gr. $a = 3$, $b = 2$, $y = 2$; erit $z = (6 + 8):(4 + 1) = 14:5 = 2\frac{4}{5}$. Ergo $a - z = 3 - 2\frac{4}{5} = \frac{15}{5} - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}$, & $yz - b = \frac{28}{5} - 2 = \frac{28}{5} - \frac{10}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$.

Scholion.

231. *Dum quadratorum quaesitorum latera assumuntur, valores eorum quantitates* a *&* b *ingredi debent, ut in utroque aequationis membro sit* $a^2 + b^2$. *Porro vero in valore lateris alterius* y *multiplicari debet per* z, *ut sublato utrinque* $a^2 + b^2$ *residuum sit divisibile per* z. *Ita enim* z *reducitur ad unam dimensionem, sicque aequatio in terminis rationalibus est reducibilis.*

Problema 93.

232. *Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.*

Sit latus quadrati minoris $= x$, majoris $= y + x$, differentia quadratorum $= d$; erit quadratum majus $= x^2 + 2xy + y^2$, minus $= x^2$, consequenter per conditionem problematis

$$2xy + y^2 = d$$
$$y^2 \qquad y^2 \text{ Subtr.}$$

$$2xy = d - y^2 \quad 2y \text{ Divid.}$$
$$x = (d - y^2):2y$$

Unde apparet, pro y assumi debere numerum, qui sit minor quam $\sqrt{d}$.

Sit e. gr. $d = 10$, $y = 3$; erit $x = (10 - 9):6 = \frac{1}{6}$, & $x + y = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Sit $d = 11$, $y = 1$; erit $x = (11 - 1):2 = 10:2 = 5$, & $x + y = 5 + 1 = 6$. Sit $d = 48$, $y = 4$; erit $x = (48 - 16):8 = 6 - 2 = 4$, & $x + y = 4 + 4 = 8$.

Problema 94.

233. *Numerum datum dividere in duos alios, quorum factum est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= 2a$, differentia $= 2y$; erit major $a + y$, minor $a - y$ (§. 6), factum $= aa - yy$. Ut calculus ab irrationalitate liberetur, pro latere quadrati assumendus est valor, quem ingreditur y & qui diversis gaudet signis. Sit ergo $= xy - a$; erit per conditionem problematis

$$a^2 - y^2 = a^2 - 2axy + x^2y^2$$
$$a^2 \qquad a^2 \qquad \text{Subtr.}$$

$$-y^2 = -2axy + x^2y^2 \quad y \text{ Divid.}$$
$$-y = -2ax + x^2y$$
$$y + 2ax \qquad y + 2ax \text{ Add.}$$

$$2ax = x^2y + y \quad x^2 + 1 \text{ Divid.}$$
$$2ax:(x^2 + 1) = y$$

Sit e. gr. $2a = 10$, $x = 2$; erit $y = 20:(4 + 1) = 20:5 = 4$. Ergo $a + y = 5 + 4 = 9$; $a - y = 5 - 4 = 1$. Sit $2a = 10$, $x = 3$; erit $y = 30:(9 + 1) = 30:10 = 3$. Ergo $a + y = 5 + 3 = 8$; $a - y = 5 - 3 = 2$.

Problema 95.

234. *Datum numerum dividere in duos numeros, quorum differentia est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= a$, quaesitorum major $= x$, minor $= y$; erit per conditiones problematis

$$x + y = a \qquad\qquad x - y = v^2$$
$$x = a - y \qquad\qquad x = v^2 + y$$

Quare (§. 87 *Arith.*)

$$a - y = v^2 + y$$
$$a = v^2 + 2y$$
$$a - v^2 = 2y$$
$$(a - v^2):2 = y$$

Pro v^2 itaque assumendus est numerus quadratus, qui ex numero dato a subductus parem relinquit.

Sit

Sit e. gr. $a=40$, $v^2=16$; erit $y=(40-16):2=24:2=12$. Ergo $x=40-12=28$. Sit $a=40$, $v^2=4$; erit $y=(40-4):2=36:2=18$. Ergo $x=40-18=22$. Sit $a=35$, $v^2=9$; erit $y=(35-9):2=26:2=13$, & $x=35-13=22$.

PROBLEMA 96.

235. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unus additus quadrato alterius efficiat numerum quadratum, cujus radix æquatur summæ numerorum.*

Sit numerus unus $=x$, alter $=y$; erit per conditionem problematis

$$x^2+y=x^2+2xy+y^2$$
$$y=2xy+y^2 \quad y \text{ Divid.}$$
$$1=2x+y$$
$$1-y=2x$$
$$(1-y):2=x$$

Numeri igitur quæsiti unitate minores, consequenter fracti esse debent, & y numerus quilibet fractus esse potest.

Sit $y=\frac{1}{2}$; erit $x=(1-\frac{1}{2}):2=\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$. Sit $y=\frac{1}{3}$; erit $x=(1-\frac{1}{3}):2=\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$. Sit $y=\frac{1}{4}$; erit $x=(1-\frac{1}{4}):2=\frac{3}{4}:2=\frac{3}{8}$.

PROBLEMA 97.

236. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipsorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$, ratio data $=a:b$; erit per conditionem problematis

$$x-y:x^2-y^2=a:b$$
$$\text{h.e. } 1:x+y=a:b \ (\S.\ 124)$$
$$ax+ay=b \quad a \text{ Divid.}$$
$$x+y=b:a$$
$$x=b:a-y$$

Sit $b:a=9$, $y=4$; erit $x=5$, vel sit $y=3$; erit $x=6$.

PROBLEMA 98.

237. *Invenire numerum, qui, si multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.*

Sit numerus datus unus $=a$, alter $=b$, quæsitus $=x$; erit per conditionem problematis

$$ax=y^2 \quad a \text{ Divid.} \qquad bx=v^2 \quad b \text{ Divid.}$$
$$x=y^2:a \qquad x=v^2:b$$

Quare (§. 87 *Arith.*)

$$y^2:a=v^2:b \quad a \text{ Mult.}$$
$$y^2=av^2:b$$
$$y=v\sqrt{(a:b)}$$

Quodsi ergo numerus rationalis desideretur, $a:b$ quadratum esse debet.

Sit $a=32$, $b=8$; erit $\sqrt{(a:b)}=2$. Sit porro $v=5$; erit $y=10$, consequenter $x=\frac{25}{8}$.

PROBLEMA 99.

238. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus quadrato alterius addatur, summa sit latus quadrati aggregato numerorum æqualis.*

Sit numerus unus $=x$, alter $=y$; erit

$$x^2+y=\sqrt{(x+y)} \quad \text{Quadr.}$$
$$x^4+2x^2y+y^2=x+y$$
$$2x^2y-y+y^2=x-x^4$$
$$\text{h.e. } y^2+(2x^2-1)y=x-x^4$$
$$\text{Add. } (x^2-\tfrac{1}{2})^2 \qquad x^4-x^2+\tfrac{1}{4}$$
$$y^2+(2x^2-1)y+(x^2-\tfrac{1}{2})^2=x-x^2+\tfrac{1}{4}$$
$$y+x^2-\tfrac{1}{2}=\sqrt{(x+\tfrac{1}{4}-x^2)}$$
$$y=\sqrt{(x+\tfrac{1}{4}-x^2)}+\tfrac{1}{2}-x^2$$

Quodsi numerus rationalis desideretur; $\frac{1}{4}+x-x^2$ numerus quadratus esse debet. Sit itaque hujus latus ob rationes in schol. probl. 92 (§. 231) allatas, $=zx-\frac{1}{2}$; erit

$$z^2x^2 - zx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + x - x^2$$

$$z^2x^2 - zx = x - x^2 \quad \text{x Divid.}$$

$$z^2x - z = 1 - x$$

$$x + z \qquad x + z \quad \text{Add.}$$

$$z^2x + x = 1 + z \quad z^2+1 \text{ Divid.}$$

$$x = (1 + z) : (z^2 + 1).$$

Sit $z = 2$; erit $x = (1+2):(4+1) = \frac{3}{5}$, conſequenrer $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + \sqrt{(\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{9}{25})} = \frac{25-18}{50} + \sqrt{\frac{60+25-36}{100}} = \frac{7}{50} + \sqrt{(49:100)} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{7+35}{50} = \frac{42}{50} = \frac{21}{25}$.

PROBLEMA 100.

239. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut, ſi unus addatur facto eorundem, aggregatum utrumque ſit numerus quadratus.*

Sit numerus quadratus unus $= x^2$, alter $= y^2$; erit factum $= x^2y^2$. Quare $x^2y^2 + x^2$ & $x^2y^2 + y^2$ ſunt numeri quadrati, conſequenter & $y^2 + 1$ & $x^2 + 1$ ſunt numeri quadrati. Namque ponatur numerus quadratus $x^2y^2 + x^2 = z^2$, tum z^2 dividatur per x^2, & habebitur numerus fractus $\frac{z^2}{x^2}$, qui erit quadratus (§. 246 *Arith.*), quippe qui factus ex numero $\frac{z}{x}$ ducto in ſemetipſum. In fractione $\frac{z^2}{x^2}$ loco z^2 ſubſtituatur ejus valor; erit $\frac{z^2}{x^2} = \frac{x^2y^2 + x^2}{x^2}$; ſed $\frac{x^2y^2 + x^2}{x^2} = y^2 + 1$. Ergo $y^2 + 1$, nec non pari de cauſa $x^2 + 1$, ſunt numeri quadrati. Sit itaque latus quadrati priϻi $z - y$, ſecundi $t - x$; erit

$$y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2$$

$$1 = z^2 - 2zy$$

$$2zy = z^2 - 1$$

$$y = (z^2 - 1) : 2z$$

$$x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$1 = t^2 - 2tx$$

$$2tx = t^2 - 1$$

$$x = (t^2 - 1) : 2t$$

Sit $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (4-1):4 = \frac{3}{4}$, & $x = (9-1):6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Sit $z = 3$, $t = 4$; erit $y = (9-1):6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, & $x = (16-1):8 = \frac{15}{8}$.

PROBLEMA 101.

240. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut ſumma addita facto efficiat quadratum.*

Sit quadratus numerus unus $= x^2$, alter $= y^2$; erit $x^2y^2 + x^2 + y^2$ numerus quadratus. Quoniam vero $x^2y^2 + x^2 = x^2(y^2 + 1)$: fiat primum $y^2 + 1$ æquale quadrato, cujus latus $t - y$, ut ablato ex utroque æquationis membro y^2 perveniatur ad unam ipſius y dimenſionem, cum valor rationalis deſideretur, nempe

$$t^2 - 2ty + y^2 = y^2 + 1$$

$$t^2 - 2ty = 1$$

$$t^2 - 1 = 2ty$$

$$(t^2 - 1) : 2t = y$$

Ponatur porro $\sqrt{(y^2 + 1)} = t - y = t - (t^2 + 1) : 2t = (t^2 + 1) : 2t = v$; erit $x^2y^2 + x^2 + y^2 = v^2x^2 + y^2$. Atque ideo problema præſens reductum eſt ad caſum ſimilem præcedentis. Sit ergo quadrati, cui $v^2x^2 + y^2$ æquale eſſe debet, latus $= z - vx$; erit

$$v^2x^2 + y^2 = z^2 - 2zvx + v^2x^2$$

$$y^2 = z^2 - 2zvx$$

$$2zvx = z^2 - y^2 \quad 2zv \text{ Divid.}$$

$$x = (z^2 - y^2) : 2zv$$

Hic valores z & t pro lubitu determinari poſſunt.

Sit e. gr. $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (9-1):6 = 8:6 = \frac{4}{3}$, & hinc $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9-4}{3} = \frac{5}{3}$, conſequenter $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{4 \cdot 5}{3} = (\frac{36-16}{9}) : \frac{20}{3} = \frac{20}{9} : \frac{20}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

PROBLEMA 102.

241. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, ſi factum addatur aggregato*

gato quadratorum, numerus quadratus prodeat.

Sit summa numerorum quæsitorum $= 2x$, differentia $= 2y$; erit major $x + y$, minor $x - y$ (§. 6). Sit $t + y$ latus quadrati ipsi $3x^2 + y^2$ æqualis; erit per conditionem problematis

$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2$$
$$x^2 \quad - y^2$$
$$3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + y^2$$
$$3x^2 = t^2 + 2ty$$
$$3x^2 - t^2 = 2ty$$
$$(3x^2 - t^2) : 2t = y$$

Sit $x = 4$, $t = 6$; erit $y = (48 - 36) : 12 = 12 : 12 = 1$, consequenter $x + y = 4 + 1 = 5$, $x - y = 4 - 1 = 3$.

PROBLEMA 103.

242. *Invenire duos numeros quadratos, quorum summa est numerus quadratus.*

Sint numeri quadrati quæsiti x^2 & y^2, latus quadrati, cui isti junctim sumti æquantur, $vx - y$; erit

$$x^2 + y^2 = v^2x^2 - 2vxy + y^2$$
$$x^2 = v^2x^2 - 2vxy$$
$$x = v^2x - 2vy$$
$$2vy = v^2x - x$$
$$2vy : (v^2 - 1) = x$$

Sit $v = 2$, $y = 3$; erit $x = 12 : (4 - 1) = 12 : 3 = 4$.

PROBLEMA 104.

243. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus ducatur in cubum alterius, productum sit numerus quadratus.*

Sint duo numeri x & y; erit per conditionem problematis xy^3 numerus quadratus, consequenter etiam xy quadratus erit (*per demonstrata* in §. 239). Habemus ergo

$$xy = z^2$$
$$x = z^2 : y$$

Pro z itaque assumendum est quadratum per y divisibile, si numeri integri desiderentur.

Sit e. gr. $z = 6$, $y = 3$; erit $x = 36 : 3 = 12$.

PROBLEMA 105.

244. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum quadratorum addatur facto ex cubo unius in alterum, summa sit numerus quadratus.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$; erit per conditionem problematis $xy^3 + x^2y^2$, nec non (*per demonstrata in* §. 239) $xy + x^2$ numerus quadratus. Ponatur latus hujus quadrati $= yv - x$; erit

$$xy + x^2 = y^2v^2 - 2xyv + x^2$$
$$xy = y^2v^2 - 2xyv \quad y \text{ Divid.}$$
$$x = yv^2 - 2xv$$
$$2xv + x = yv^2$$
$$x = yv^2 : (2v + 1)$$

Sit e. gr. $y = 6$, $v = 1$; erit $x = 6 : 3 = 2$. Sit $y = 15$, $v = 2$; erit $x = 15 \cdot 4 : (4 + 1) = 15 \cdot 4 : 5 = 3 \cdot 4 = 12$.

PROBLEMA 106.

245. *Invenire duos numeros, quorum unus subductus ex facto eorundem relinquat cubum.*

Sit numerus unus x, alter y; erit per conditionem problematis

$$xy - y = v^3$$
$$y = v^3 : (x - 1)$$

Assumendus ergo est cubus, qui sit per $x - 1$ divisibilis.

E. gr. Sit $x = 6$, $v = 10$; erit $y = 1000 : 5 = 200$. Sit $x = 3$, $v = 6$; erit $y = 216 : 2 = 108$.

PROBLEMA 107.

246. *Invenire duos numeros, quorum unus in quadratum alterius ductus cubum efficit.*

Sit numerus unus y, alter x; erit per conditionem problematis

$$yx^2 = z^3x^3 : v^3 \quad x^2 \text{ Divid.}$$
$$y = z^3x : v^3$$
$$yv^3 = z^3x \quad z^3 \text{ Divid.}$$
$$yv^3 : z^3 = x$$

Si ideo numeri integri desiderentur, assumendus est valor ipsius y per cubum aliquem z^3 divisibilis, seu cubi multiplus.

Sit e. gr. $y = 16$, $v = 3$, $z = 2$; erit $x = 16 \cdot 27 : 8 = 2 \cdot 27 = 54$.

PROBLEMA 108.

247. *Numerum datum in duas partes dividere, ita ut earundem factum æquale sit cubo radice sua mulctato.*

Sit numerus datus $= a$, pars una $= x$; erit altera $= a - x$. Sit latus cubi, cui factum partium $ax - x^2$ æquatur, $yx - 1$; erit cubus $= y^3x^3 - 3y^2x^2 + 3yx - 1$, unde si subtrahatur $yx - 1$, relinquitur

$$y^3x^3 - 3y^2x^2 + 2yx = ax - x^2 \quad x \text{ Divid.}$$
$$y^3x^2 - 3y^2x + 2y = a - x$$
$$y^3x^2 - 3y^2x + x = a - 2y$$

Facile jam apparet, si valor ipsius x rationalis desideretur, fieri debere $2y = a$: quo facto erit

$$\frac{a^3x^2}{8} - \frac{3a^2x}{4} + x = 0 \quad 8 \text{ Mult.}$$
$$a^3x^2 - 6a^2x + 8x = 0 \quad x \text{ Divid.}$$
$$a^3x - 6a^2 + 8 = 0$$
$$6a^2 - 8 \quad 6a^2 - 8 \text{ Add.}$$
$$a^3x = 6a^2 - 8 \quad a^3 \text{ Divid.}$$
$$x = (6a^2 - 8) : a^3$$

Apparet ideo, si numeri rationales desiderentur, problema ex indeterminato fieri determinatum.

Sit $a = 6$; erit $x = (216 - 8) : 216 = 208 : 216 = \frac{26}{27}$, & $a - x = 6 - \frac{26}{27} = \frac{162 - 26}{27} = \frac{136}{27}$.

PROBLEMA 109.

248. *Invenire numerum perfectum, hoc est, omnibus suis partibus aliquotis æqualem.*

Sit numerus quæsitus $y^n x$, ut nempe in partes aliquotas seu factores resolvi possit: erunt partes ejus aliquotæ $1 + y + y^2 + y^3$ &c. donec exponens evadat $= n$, & $x + yx + y^2x + y^3x$ &c. donec exponens fiat $= n - 1$. Quamobrem ex natura numeri perfecti

$$1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.} + x + yx + y^2x + y^3x \text{ \&c.} = y^n x$$
$$1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.} = y^n x - x - yx - y^2x - y^3x \text{ \&c.}$$
$$\frac{1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.}}{y^n - 1 - y - y^2 - y^3 \text{ \&c.}} = x$$

Jam ut x sit numerus integer, nec in casu speciali, si y per numerum explicetur, numerus partium aliquotarum diversus sit a numero earundem in formula generali; necesse est ut $y^n - 1 - y - y^2 - y^3$ &c. $= 1$: quod cum non alio in casu contingat nisi cum $y = 2$ (§. 121); erit $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. $= 1 + 2 + 4 + 8$ &c. & numerus perfectus $2^n x$. Quoniam vero x est numerus primus; necesse est ut $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. in omni casu sit numerus primus, consequenter series terminetur prope terminum, qui unitate mulctatus est numerus primus (§. *cit.*) & n notat numerum terminorum, qui istiusmodi terminum præcedunt. Quare problema, quod speciem indeterminati mentiebatur, determinatum est.

Patet autem simul

Theorema 1: Si numerorum series in ratione dupla ab unitate continue proportionalium continuetur, donec eorum summa fit numerus primus; summa in maximum multiplicata faciet numerum perfectum.

Theorema 2: Si in numerorum serie in ratione dupla ab unitate continue proportionalium occurrat terminus, qui unitate mulctatus est numerus primus; numerus iste primus in proxime præcedentem ductus efficit numerum perfectum.

In serie numerorum ab unitate in ratione dupla continue proportionalium

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096,

$4-1=3$, $8-1=7$, $32-1=31$, $128-1=127$, $512-1=511$, $2048-1=2047$ &c. sunt numeri primi. Ergo $2.3=6$, $4.7=28$, $31.16=496$, $127.64=8128$, $511.256=130816$, $2047.1024=2096128$ &c. &c. sunt numeri perfecti.

Scholion.

249. *Problemata indeterminata, qualia plurima solvit* Diophantus, *difficiliora sunt determinatis, nisi simplicia fuerint. Unde tirones sub initium ea prætermittere possunt, quæ difficultatem creant, ad sequentia pedem promoventes. Non tamen prorsus negligenda sunt, cum maximus eorum sæpe sit usus in problematibus Geometriæ sublimioris solvendis. Ceterum ars resolvendi problemata indeterminata numerica* Analysis Diophantea *appellari solet.*

CAPUT III.

De Algebra ad Geometriam Elementarem applicata.

Problema 110.

250. **P***roblema Geometricum algebraice resolvere.*

Resolutio.

1. Observentur ea omnia, quæ in probl. 36 (§. 141) fieri præcepimus.
2. Cum vero rarissime ad æquationem eodem modo in problematis geometricis perveniatur, quo in numericis usi sumus; hic ulterius quædam peculiaria notanda sunt. Nempe

α) Concipiatur jam factum, quod ad faciendum proponitur.

β) Omnium linearum in schemate depictarum relationes, nullo habito discrimine inter cognitas & incognitas, excutiantur, ut appareat, quomodo aliæ ab aliis dependeant, seu quibus datis, aliæ una dentur, sive per triangula similia (§. 175 *Geom.*), sive per rectangula (§. 417 *Geom.*), sive per alia (quod tamen raro fieri solet) theoremata.

γ) Ut igitur triangula similia & rectangula obtineas, sæpius producendæ sunt lineæ, donec vel directe, vel indirecte datis fiant æquales, vel alias secent, sæpius lineæ parallelæ atque perpendiculares ducendæ, sæpius puncta quædam connectenda, sæpius anguli datis æquales construendi: quæ fieri posse, ex Geometria elementari manifestum est. Eum in finem probe tenenda sunt theoremata de æqualitate angulorum & similitudine triangulorum (§. 156. 183. 201. 207. 233. 267. 268. 269. 329 *Geom.*).

δ) Quodsi in æquationem non satis concinnam incideris; alio adhuc modo excutiendæ sunt linearum relationes, ac interdum sufficit, non directe quærere eam, quæ quæritur, sed aliam, qua data ipsa quoque innotescit.

3. Reductione æquationis facta, ex ultima, quæ prodit, elicienda est con-

constructio geometrica variis quidem modis pro diversitate æquationum.

SCHOLION.

251. *Quoniam nunc tantum simplicissimos regulæ Algebræ casus exemplis geometricis illustramus; suffecerit nobis ostendisse, quomodo æquationes simplices & quadraticæ construantur.*

PROBLEMA III.

252. *Æquationem simplicem construere.*

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo consistit, ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales resolvantur: id quod exemplis rectius ostenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b : x$ (§. 302 *Arith.*). Reperietur ideo x (§. 271 *Geom.*).

2. Sit $x = \frac{abc}{de}$; fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$. Hæc quarta proportionalis inventa (§. 271 *Geom.*) dicatur g; erit $x = \frac{gc}{e}$, quæ ideo ut in casu primo invenitur.

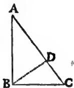
3. Sit $x = \frac{aa - bb}{c}$. Quoniam $aa - bb = (a + b)(a - b)$ (§. 86); erit $c : a + b = a - b : x$ (§. 302 *Arith.*).

4. Sit $x = \frac{a^2b - bcc}{ad}$. Invenitur *per casum primum* $g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2b}{ad}$ & $h = \frac{bc}{d}$, ut sit $\frac{bcc}{ad} = \frac{hc}{a}$; denique *per casum primum* $i = \frac{hc}{a}$. Est igitur $x = g - i$, differentia nempe linearum g & i.

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniatur ut in casu præcedente $g = \frac{ab}{c}$ & $f = \frac{adc}{be}$; erit $x = g + f$, summa linearum g & f.

6. Sit $x = \frac{a^2b + bad}{af + cg} = \frac{ab + bd}{f + cg : a} = \frac{(a + d)b}{f + cg : a}$. Quæratur $\frac{cg}{a}$ & fiat $\frac{cg}{a} = h$; erit $f + h : a + d = b : x$, consequenter $x = \frac{(a + d)b}{f + h}$. Reductus ideo est casus præsens ad primum.

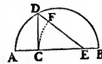
7. Sit $x = \frac{a^2b - bad}{af + bc}$. Quæratur $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b} = h$; erit $af = bh$, atque hinc $x = \frac{a(a - d)}{h + c}$, consequenter $h + c : a - d = a : x$.



8. Sit $x = (a^2 + b^2) : c$. Construatur triangulum rectangulum ABC, cujus crus AB $= a$, BC $= b$ (§. 180 *Geom.*); erit AC $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Dicatur AC $= m$; erit $a^2 + b^2 = m^2$, ideoque $x = \frac{m^2}{c}$, consequenter $c : m = m : x$.

9. Sit $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Super AB $= a$ describatur semicirculus & in eo applicetur AC $= b$. Cum triangulum ACB sit rectangulum (§. 317 *Geom.*); erit CB $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Dicatur CB $= m$; erit $a^2 - b^2 = m^2$, ideoque $x = m^2 : c$, consequenter $c : m = m : x$.

10. Sit $x = \frac{a^2b + bcd}{af + bc} = \frac{a^2 + cd}{c + af : b}$. Inferatur $b : a = f : \frac{fa}{b}$ & fiat $\frac{fa}{b} = h$; erit $x = \frac{a^2 + cd}{h + c}$.



Quæratur inter AC $= c$ & CB $= d$ media proportionalis CD $= \sqrt{cd}$ (§. 327 *Geom.*). Fiat CE $= a$; erit DE $= \sqrt{(a^2 + cd)}$. Dicatur hæc m; erit $a^2 + cd = m^2$, ideoque $x = \frac{m^2}{h + c}$, consequenter $h + c : m = m : x$.

PROBLEMA IV.

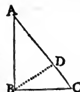
253. *Æquationem quadraticam geometrice construere.*

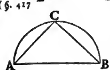
RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad simplices reduci possint (§. 143); ipsas quoque *per probl. præced.* (§. 252) construere licet.

Sit

Sit enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit $a : x = x : b$ (§. 299 *Arith.*). Invenitur ideo $x = \sqrt{ab}$, si (*Vid. Fig. præc.*) inter AC $= a$ & BC $= b$ quæratur media proportionalis DC (§. 327 *Geom.*). Si æquatio affecta $x^2 \pm ax = \pm b^2$; erit $x = \pm \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 \pm b^2)}$, hoc est, vel $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, vel $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, vel $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, vel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ (§. 143). Omne igitur artificium construendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipsius $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, itemque ipsius $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$. Utrumque vero jam docuimus in problemate præcedente. Nimirum si in triangulo rectangulo fiat AB $= \frac{1}{2}a$ & BC $= b$; erit AC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Sed si super AB $= \frac{1}{2}a$, describatur semicirculus & in eo applicetur AC $= b$; erit CB $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, ut in problemate præcedente demonstratum.



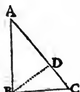


SCHOLION.

254. *Quamvis omnes æquationes simplices & quadraticæ eum in modum construi possint, quo eas construere docuimus: minime tamen consultum est, ut iis stricte inhæreamus. Hac enim ratione in constructiones parum commodas sæpe incideremus, cum singulares problematis specialis circumstantiæ multo concinniorem meditanti insinuent. Imo in genere notandum est, ex calculo analytico difficillime erui constructiones concinnas, cum tamen in iis unice ingenium spectetur, solutione arithmetica ad praxin sufficiente. Ratio hæc est, quod in algebraica solutione problema tanquam unicum in rerum possibilium regione consideretur, independens ab omnibus reliquis, cum tamen ex veterum methodo appareat & ipsa ratio suadeat, solutionem unius a solutione alterius pendere.*

PROBLEMA 113.

255. ***Data perimetro AB + BC + CA & area trianguli rectanguli, invenire hypothenusam.***



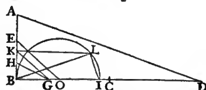
Sit AB + BC + CA $= a$, AC $= x$, area $= b^2$; erit AB + BC $= a - x$.

Jam cum sit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB \cdot BC$ (§. 261 *Arith*); erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB \cdot BC$ (§. 87 *Arith.*). Est vero $AC^2 = x^2$ & $(AB + BC)^2 = a^2 - 2ax + x^2$ atque $2AB \cdot BC = 4b^2$ (§. 392 *Geom.*). Quare

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$
$$2ax = a^2 - 4b^2$$
$$x = \tfrac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Quod si triangulum construi debet, dicatur altitudo BD, hoc est, perpendiculum in hypothenusam AC demissum (§. 227 *Geom.*), y; erit (§. 392 *Geom.*)

$$\tfrac{1}{2}xy = b^2$$
$$y = b^2 : \tfrac{1}{2}x$$



Constructio. Erigatur ad BD $= a$, perpendicularis AB $= 2b$, fiatque BG $= b$ & quæratur (§. 271 *Geom.*) quarta proportionalis BH $= 2b^2 : a$. Fiat CB $= \frac{1}{2}a$ & CI $=$ BH; erit BI $= \frac{1}{2}a - 2b^2 : a = x$. Dividatur BI bifariam in O, quæraturque ad BO $= \frac{1}{2}x$, & BE $=$ BG $= b$ tertia proportionalis BK, quæ erit altitudo trianguli quæsita $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quare si super BI describatur semicirculus & ex K agatur eidem parallela KL secans semicirculum in L; ductis rectis BL & LI, erit BLI triangulum quæsitum.

Æquatio secunda in hanc resolvitur analogiam

$$2a : a + 2b = a - 2b : x$$

seu $a : \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}a - b : \frac{1}{2}x$ (§. 185 *Arith.*). Habetur ergo

Theorema: In omni triangulo rectangulo est ut perimeter ad compositam ex dimidia perimetro & quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris a perimetro dimidia ad dimidiam hypothenusam.

SCHOLION.

256. *Cum areas figurarum in Geometria metiamur investigando earum rationem ad quadratum aliquod datum*

datum (§. 118 Geom.); ideo quoque tum in Geometria, tum in Algebra dantur per latus quadrati ipsis æqualis.

PROBLEMA 114.

257. *Data area trianguli rectanguli, cujus latera* AC, AB & BC *sunt in proportione continua, invenire latera.*

Sit area $= a^2$
$BC = x$
$AB = y$
erit $AC = y^2 : x$

Ergo

(§. 417 *Geom.*)

$$y^4 : x^2 = x^2 + y^2 \quad x^2 \text{ Mult.}$$
$$y^4 = x^4 + x^2y^2$$
$$y^4 = \frac{16a^8}{y^4} + 4a^4 \quad y^4 \text{ Mult.}$$
$$y^8 = 16a^8 + 4a^4y^4$$
$$y^8 - 4a^4y^4 = 16a^8$$
$$4a^8 \qquad 4a^8$$
$$y^8 - 4a^4y^4 + 4a^8 = 20a^8$$
$$\left.\begin{matrix} y^4 - 2a^4 \\ 2a^4 - y^4 \end{matrix}\right\} = 2a^4\sqrt{5}$$
$$y^4 = 2a^4 + 2a^4\sqrt{5}$$
$$y^4 = a^4(2 + 2\sqrt{5})$$
$$y = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$$

(§. 392 *Geom.*)

$$\tfrac{1}{2}xy = a^2$$
$$xy = 2a^2$$
$$x = 2a^2 : y$$
$$x^2 = 4a^4 : y^2$$
$$x^4 = 16a^8 : y^4$$
$$x^2y^2 = 4a^4$$

Nempe quia $2a^4 < 2a^4\sqrt{5}$, radix $2a^4 - y^4$ est falsa.

Similiter reperitur valor ipsius x. Est enim, vi æquationis $xy = 2a^2$, $y = 2a^2 : x$, ideoque $y^4 = 16a^8 : x^4$. Præterea $y^4 = x^2y^2 + x^4$ seu, ob $x^2y^2 = 4a^4$, $y^4 = 4a^4 + x^4$. Hinc (§. 87 *Arith.*)

$$16a^8 : x^4 = 4a^4 + x^4$$
$$16a^8 = 4a^4x^4 + x^8$$
$$4a^8 \qquad 4a^8 \qquad \text{Add.}$$
$$20a^8 = 4a^8 + 4a^4x^4 + x^8$$
$$2a^4\sqrt{5} = 2a^4 + x^4$$
$$x^4 = 2a^4\sqrt{5} - 2a^4$$
$$x = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$$

Constructio: Jungantur $AB = a$ & $AC = 2a$ ad angulos rectos; erit $BC = a\sqrt{5}$. Fiat $BD = AB$; erit $DC = a\sqrt{5} - a$. Fiat porro $CE = CD$, & ducta per C recta NL ad AK perpendiculari describatur super AE semicirculus; erit $CN = \sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a^2)} = a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$. Factis $CH = a$ & $CG = CN$, descriptoque semicirculo super HG; erit $CI = \sqrt{(a^2\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)})} = a\sqrt{\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}} = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$.

Similiter fiat $CK = CB + CH = a + a\sqrt{5}$; erit, descripto super AK semicirculo, $CL = \sqrt{(2a^2 + 2a^2\sqrt{5})} = a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Fiat porro $CO = CL$; erit, descripto super HO semicirculo, $CM = \sqrt{(a^2\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})})} = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$.

Quodsi itaque tandem fiat $CF = CI$; ducta FM, erit CMF triangulum quæsitum.

Quodsi exponens rationis $= y$, $BC = x$; erit $AB = xy$, $AC = xy^2$, ideoque (§. 417 *Geom.*)

$$x^2y^4 = x^2y^2 + x^2 \quad x^2 \text{ Divid.}$$
$$y^4 = y^2 + 1$$
$$y^4 - y^2 = 1$$
$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4}$$

$y^4 - y^2$

$$y^4 - y^2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} y^2 - \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} - y^2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

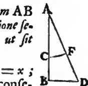
$$y^2 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})}$$

Patet ideo rationem laterum esse constantem.

PROBLEMA 115.

258. *Datam rectam* AB *media & extrema ratione secare in C, hoc est, ut sit* AB : AC = AC : CB.



Sit AB $= a$, AC $= x$; erit CB $= a - x$, consequenter per conditionem problematis

$$a : x = x : a - x$$

$$x^2 = a^2 - ax \quad (\S.\ 297\ \textit{Arith.})$$

$$x^2 + ax = a^2$$

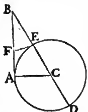
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

Constructio: 1°. Jungantur (*Vid. Fig. præc.*) AB $= a$ & BD $= \tfrac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit AD $= \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$. Secundo fiat DF $= \tfrac{1}{2}a$ & AC $=$ AF; erit AC $= x$.

Alia ex æquatione tertia elicitur constructio. Nimirum radio AC $= \tfrac{1}{2}a$ describatur circulus & in A erigatur perpendicularis $= a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit ED $= a$ & BE $= x$. Quare si fiat BF $=$ BE; recta AB erit in F media & extrema ratione secta. Etenim BD $= a + x$, ideoque BE . BD $= ax + x^2$, consequenter $ax + x^2 = a^2$ (§. 379 *Geom.*).



PROBLEMA 116.

259. *Rectam datam* AC *utcunque divisam in* B, *iterum secare in* D, *ita ut sit* AD : DC = DC : BD.

A B D C

Sit AB $= a$ BD $= x$
BC $= b$ erit DC $= b - x$
AD $= a + x$

Quare per conditionem problematis

$$a + x : b - x = b - x : x$$

$$ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2$$

$$ax + 2bx = b^2$$

$$x = b^2 : (a + 2b)$$

Invenitur ideo x ob analogiam $a + 2b : b = b : x$ (§. 272 *Geom.*).

ALITER.

Analogia prima, ex qua æquatio elicitur, etiam per leges rationum ad eam reduci potest, a qua constructio pendet. Quoniam enim

$$a + x : b - x = b - x : x$$

erit $a + b : b - x = b : x$ (§. 190 *Arith.*)

$$a + b : b = b - x : x \quad (\S.\ 173\ \textit{Arith.})$$

$$a + 2b : b = b : x \quad (\S.\ 190\ \textit{Arith.})$$

PROBLEMA 117.

260. *Datam rectam* AC *divisam in* B *denuo secare in* D, *ita ut sit* CB : DB = DA : AB.

Sit CB $= a$ DB $= x$
BA $= b$ erit DA $= b + x$

Quare per conditionem problematis

$$a : x = b + x : b$$

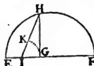
$$ab = bx + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{4}b^2 \quad (\S.\ 143)$$

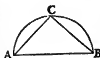
$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab = \tfrac{1}{4}b^2 + bx + x^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} = \tfrac{1}{2}b + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab)} - \tfrac{1}{2}b = x$$



Constructio. Inter EG $= b$ & GF $= a$ quæratur media proportionalis HG, quæ erit $= \sqrt{ab}$. Fiat GI $= \frac{1}{2}b$ & ducatur HI; erit HI $= \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)}$. Fiat denique KI $=$ GI; erit KH $= \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)} - \frac{1}{2}b$. Invenitur etiam $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)}$, si inter $\frac{1}{4}b + a$ & b quæratur media proportionalis (§. 327. 330 *Geom*).

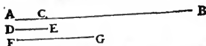


Item quia $\frac{1}{4}b^2 + ab$ est differentia quadratorum $\frac{1}{4}b^2 + ab + a^2$ & a^2, super AB $= \frac{1}{2}b + a$ describatur semicirculus & in eo applicetur AC $= a$; erit CB $= \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)}$ (§. 317. 417 *Geom.*).

Definitio 19.

261. Si quatuor fuerint *lineæ* proportionales, extremæ mediis, mediæ extremis *reciprocæ* dicuntur.

Problema 118.

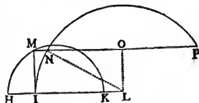


262. *Datam rectam* AB *ita secare in* C, *ut partes* AC *&* CB *sint duabus datis* DE *&* FG *reciprocæ*.

Sit AB $= a$ AC $= x$
DE $= b$ CB $= a - x$
FG $= c$

Ergo (§. 261)

$$x : b = c : a - x$$
$$ax - x^2 = cb$$
$$-cb = x^2 - ax$$
$$\frac{1}{4}a^2 \qquad \frac{1}{4}a^2 \quad (\text{§. } 143)$$
$$\frac{1}{4}a^2 - cb = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$
$$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - cb)} = \begin{cases} \frac{1}{2}a - x \\ x - \frac{1}{2}a \end{cases}$$
$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - cb)}$$

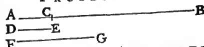


Constructio: Quæratur inter HI $= b$ & IK $= c$ media proportionalis MI $= \sqrt{cb}$ (§. 327 *Geom.*). Radio IL $= \frac{1}{2}a$ describatur arcus & ducatur MP ipsi IK parallela (§. 258 *Geom.*); erit MN $= x$ & MP $= a - x$. Nam demisso ex centro L perpendiculo LO, erit NO $=$ OP (§. 291 *Geom.*) & OL $=$ MI $= \sqrt{cb}$ (§. 226 *Geom.*). Sed NL $=$ LI (§. 40 *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$. Ergo NO $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - cb)}$ (§. 417 *Geom.*), consequenter ob MO $=$ IL (§. 238 *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$, MN $= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - cb)} = x$ & MP $= \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - cb)} = a - x$.

Corollarium.

263. Construere ergo æquationem quadraticam affectam $ax - x^2 = cb$ idem est, ac datis duabus rectis c & b, vel, si $c = b$, eidem rectæ b reciprocas x & $a - x$ invenire.

Problema 119.



264. *Datis duabus rectis* DE *&* FG *reciprocas invenire, quarum differentia sit datæ rectæ* AC *æqualis*.

Sit DE $= a$ Reciproca minor $= x$,
FG $= b$ erit reciproca major
AC $= c$ $= c + x$

Ergo (§. 261)

$$x : a = b : c + x$$
$$ab = cx + x^2$$
$$\frac{1}{4}c^2 \qquad \frac{1}{4}c^2$$
$$\frac{1}{4}c^2 + ab = \frac{1}{4}c^2 + cx + x^2$$
$$\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + ab)} = \frac{1}{2}c + x$$
$$\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + ab)} - \frac{1}{2}c = x$$

Con-

Constructio: Quæratur inter $AC = b$ & $CB = a$ media proportionalis DC. Fiat $CE = \frac{1}{2}c$; erit $DE = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + ab)}$. Unde si subtrahitur $\frac{1}{2}c = EF$, relinquitur $DF = x$.

Alia magis ingeniosa ex æquatione $ab = cx + x^2$ eruitur. Describatur nimirum ex centro C radio arbitrario, majori tamen quam $\frac{1}{2}c$ & $\frac{1}{2}(a-b)$, circulus. In eo applicentur chordæ $IQ = c$ & $IP = a - b$. Prolongetur IP in O, donec $PO = b$. Tandem ex C radio CO describatur circulus priori concentricus: erit $HI = x$. Demissa enim ex centro C perpendiculari CL, erit $LI = LQ$ & $LH = LM$ (§. 291 *Geom.*), ideoque $QM = IH$ (§. 91 *Arith.*). Eodem modo ostenditur, esse $NI = PO = b$. Ergo $NI . IO = ab$, consequenter $ab = HI . IM = HI . (c + HI)$ (§. 381 *Geom.*). Est vero etiam $ab = x(c + x)$. Ergo $HI = x$.

Sint omnia ut ante, & pars major $= x$; erit minor $= x - c$, consequenter (§. 261)

$$x : a = b : x - c$$
$$x^2 - cx = ab$$

Constructio: Eadem est, quæ præcedens. Sed hic $MI = x$, ita enim $HI = QM = x - c$, consequenter $NI . IO = ab$ & $HI . IM = x^2 - cx$.

COROLLARIUM:

265. Construere ergo æquationes quadraticas $x^2 + cx = ab$ & $x^2 - cx = ab$ idem est, ac datis duabus rectis a & b, vel, si $a = b$, eidem rectæ b reciprocas, ibi x & $x + c$, hic x & $x - c$ reperire.

PROBLEMA 120.

266. *Datam rectam* AB *ita secare in* C *ut rectangulum sub tota* AB *& segmento minore* AC *æquale sit rectangulo sub majore* CB *& differentia utriusque* CB — AC.

Sit $AB = a$
$AC = x$
erit $CB = a - x$
$CB - AC = a - 2x$

Quare per conditionem problematis

$$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$$
$$-a^2 = -4ax + 2x^2 \quad \text{2 Divid.}$$
$$-\frac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax$$
$$a^2 \qquad a^2$$
$$\frac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a - x$$
$$x + \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a$$
$$x = a - \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$

Constructio: Quæratur inter $\frac{1}{2}a$ & a media proportionalis, quæ erit pars major $a - x$, ideoque subducta ex a relinquit minorem x.

ALITER.

Quoniam per conditionem problematis

$$ax = (a - x)(a - 2x)$$

erit
$$a : a - 2x = a - x : x \text{ (§. 299 Arith.)}$$
$$2a - 2x : a = a : a - x$$
$$a - x : \tfrac{1}{2}a = a : a - x \text{ (§. 124)}$$
$$\tfrac{1}{2}a : a - x = a - x : a$$

SCHOLION.

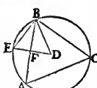
267. *His resolutionibus per analogias & reductionibus æquationum quadraticarum ad lineas reciprocas opus est, si geometricas more veterum mediteris demonstrationes.*

PROBLEMA 121.

268. *Dato radio circuli* ED, *inveniri latus trigoni regularis ipsi inscribendi* AB.

Ducatur latus hexagoni EB, & sit $BD = EB$ (§. 356 *Geom.*) $= a$, $AB = x$;

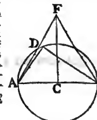
$= x$; erit $BF = \frac{1}{2}x$ (§.291 *Geom.*). Et quoniam anguli ad F recti (*per §. cit.*) atque $BE = BD$ *per demonst.* nec non $BF = BF$; erit $EF = FD$ (§.235 *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$. Quare (§.417 *Geom.*) $BD^2 - DF^2 = FB^2$, hoc est,



$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}x^2$$
$$3a^2 = x^2$$
$$\sqrt{3a^2} = x$$

Est ergo x media proportionalis inter $3a$ & a. Et fiat $a = 1$; erit $x = \sqrt{3}$.

Constructio. Concinnior hæc est: super diametro AB construatur triangulum æquilaterum AFB & centrum C cum puncto F connectatur recta CF; erit CF latus trigoni. Cum enim FCB sit triangulum rectangulum (§. 184 *Geom.*) & $FB = 2a$, $CB = a$; erit $FC = \sqrt{3a^2}$ (§. 417 *Geom.*) $= x$.



Theorema: Quadratum lateris trigoni est ad quadratum radii ut 3 ad 1.

ALITER.

$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}x^2$$
$$\frac{3}{4}a : \frac{1}{4}x = x : a$$
$$3a : x = x : a$$

COROLLARIUM 1.

269. Si dato latere trigoni regularis b inveniri debet radius circuli circumscribendi y; erit $3y^2 = b^2$, consequenter $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, quæ est media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b.

COROLLARIUM 2.

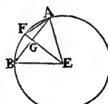
270. Quoniam dimidium latus trigoni regularis est sinus 60° (§. 2 *Trigon.*), per problema præsens invenitur sinus 60°.

SCHOLION.

271. *Hujus problematis solutio usum potius respicit arithmeticum, quam geometricum. Geometrica enim constructio ex Elementis facilior & elegantior deducitur, quamvis eadem ex calculo etiam pateat. Est enim diameter AB = 2a. Quare si fiat AD = a, ducaturque DB, cum angulus ad D rectus sit* (§.317 Geom.), *ideoque* $AB^2 - AD^2 = DB^2$ (§.417 Geom.); *erit* $DB = \sqrt{3a^2}$.

PROBLEMA 122.

272. *Dato radio circuli* AE *invenire latus octogoni regularis circulo inscribendi.*



Sit $AE = r$, $AF = y$; erit latus quadrati $AB = \sqrt{2r^2}$ (§. 21 *Trig.*) & $AG = \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$ (§. 291 *Geom.*). Porro cum $AEF = 45°$ (§.342 *Geom.*), & angulus ad G rectus (§.291 *Geom.*); erit quoque $EAG = 45°$ (§.241 *Geom.*), consequenter $EG = AG$ (§.253 *Geom.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Hinc $FG = r - \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Quare (§.417 *Geom.*)

$$y^2 = \frac{1}{2}r^2 + 1\frac{1}{2}r^2 - r\sqrt{2r^2}$$

hoc est, $y^2 = 2r^2 - r\sqrt{2r^2}$

$$y = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{2r^2})}$$

Quodsi fiat $r = 1$; erit $y = \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$.

COROLLARIUM.

273. Cum dimidium latus octogoni sit sinus 22° 30′ (§. 2 *Trigon.*); per hoc ipsum problema invenitur sinus 22° 30′.

PROBLEMA 123.

274. *Dato latere octogoni AF invenire radium circuli circumscribendi AE.*

Sit $AF = b$, $AE = y$; erit (§.272)

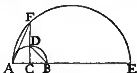
$$b^2 = 2y^2 - \sqrt{2y^4}$$
$$\sqrt{2y^4} = 2y^2 - b^2$$
$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$
$$0 = 2y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$
$$0 = y^4 - 2b^2y^2 + \frac{1}{2}b^4$$

$\frac{1}{2}b^4$ $\quad \frac{1}{2}b^4$ $\quad$ Add.

$\frac{1}{2}b^4$

$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4$$
$$b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2 - b^2 \quad \text{Extr. rad.}$$
$$b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2$$
$$\sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})} = y$$

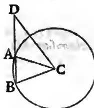
Est igitur $b : y = y : b + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ consequenter $\tfrac{1}{2}b : y = y : 2b + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$. Hinc elicitur sequens geometrica



Constructio: Super latere octogoni $AB = b$ describatur semicirculus & ex centro C erigatur perpendicularis indefinita CF; erit recta $DB = \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ (§. 417 *Geom.*). Fiat $AE = 2b + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$, descriptoque semicirculo AFE; erit $AF = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})}$ (§. 330 *Geom.*), consequenter radius circuli octogono circumscribendi: quod ideo super recta AB construetur, si radio AF describatur circulus transiens per A & B.

PROBLEMA 124.

275. *Dato radio circuli AC, invenire latus decagoni regularis inscribendi AB.*



Quoniam AB est $\tfrac{1}{10}$ totius peripheriæ; angulus $ACB = 36°$ (§. 57. 59 *Geom.*), consequenter, ob $AC = BC$ (§. 40 *Geom.*), $ABC = CAB = 72°$ (§. 248 *Geom.*), ideoque $DAC = 108°$ (§. 149 *Geom.*). Fiat $AD = AC$, erit $ADC = ACD = 36°$ (§. 248 *Geom.*), consequenter $DCB = 72°$. Sunt ergo triangula ABC & BDC æquiangula, & hinc $BD : BC = BC : AB$ (§. 267 *Geom.*).

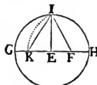
Sit jam $AC = BC = a$, $AB = x$; erit $BD = a + x$, consequenter *per demonstrata*

$$a + x : a = a : x$$
$$ax + x^2 = a^2$$

Est ergo a media & extrema ratione secanda, cujus pars major x (§. 258), vel radio a quærendæ sunt reciprocæ $a + x$ & x (§. 256).

Theorema: Latus decagoni regularis circulo inscripti est pars major radii media & extrema ratione secti.

Constructio: Quoniam $x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$ (§. 258); radio a describatur circulus & in centro E erigatur perpendicularis $EI = a$. Fiat $EF = \tfrac{1}{2}a$; erit $FI = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$. Quare si ex F radio IF describatur arcus KI; erit $KE = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$.



SCHOLION.

276. *Hanc ipsam constructionem tradit* Ptolemæus *in suo Almagesto.*

COROLLARIUM.

277. Invenitur ergo per problema præsens sinus 18° (§. 2 *Trigon.*).

PROBLEMA 125.

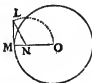
278. *Dato latere decagoni regularis circulo inscribendi AB, invenire radium AC.*

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit *per demonstrata in probl. præced.* $BD = a + x$, nec non

$$a + x : x = x : a$$
$$ax + a^2 = x^2$$
$$a^2 = x^2 - ax$$
$$\tfrac{5}{4}a^2 = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = x - \tfrac{1}{2}a, \text{ ob } x > \tfrac{1}{2}a \quad (\text{§. } 275)$$
$$\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = x$$

Con-

Constructio: Construatur triangulum rectangulum LMN, in quo $ML = a$ & $MN = \frac{1}{2}a$; erit $LN = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 417 *Geom.*). Producatur MN in O, donec $NO = LN$; erit $MO = x$. Ex centro itaque O per M circulus describi potest.



ALITER.

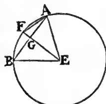
$$a + x : x = x : a$$

$$a : x = x - a : a$$

Quærendæ ideo sunt ipsi a reciprocæ x & $x - a$.

PROBLEMA 126.

279. *Dato radio circuli* AE *&* *latere decagoni* AF, *invenire latus pentagoni* AB.



Sit $AE = a$

$AF = b$

$AB = x$

Erit $AG = \frac{1}{2}x$ (§. 291 *Geom.*), $GE = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (§. 417 *Geom.*), hinc $FG = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$.

Quare (§. *cit.*)

$$b^2 = \frac{1}{4}x^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + a^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$b^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$$

$$2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = 2a^2 - b^2$$

$$4a^4 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$$

$$-a^2x^2 = -4a^2b^2 + b^4$$

$$4a^2b^2 - b^4 = a^2x^2$$

$$4b^2 - b^4 : a^2 = x^2$$

Est vero $b = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (*per demon. in* §. 275)

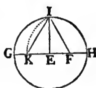
$$b^2 = \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$b^4 = \frac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Ergo $x^2 = \frac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - (\frac{14}{4}a^4 + 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}) : a^2 = \frac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{14}{4}a^2 + 3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = a^2 + b^2$.

Constructio: Quæratur latus decagoni EK (§. 275); erit KI latus pentagoni.

Theorema: Latus pentagoni regularis potest latera hexagoni & decagoni eidem circulo inscriptorum simul.



SCHOLION.

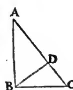
280. *Eandem prorsus constructionem dedit* Ptolemæus.

COROLLARIUM.

281. Per præsens igitur problema inveniri potest sinus 36° (§. 2 *Trigon.*).

PROBLEMA 127.

282. *Datis summa crurum trianguli rectanguli* AB+BC *una cum perpendiculo* BD *ex angulo recto* B *in hypothenusam* AC *demisso, invenire latera*.



Sit $AB + BC = a$, $BD = b$, $AB - BC = y$, $AC = x$; erit $AB = \frac{1}{2}(a + y)$, $BC = \frac{1}{2}(a - y)$ (§. 39 *Trigon.*), consequenter

(§. 417 *Geom.*)

$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + y^2)$$

$$2x^2 = a^2 + y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

(§. 329 *Geom.*)

$$BA : BD = AC : BC$$

$$\frac{1}{2}(a+y) : b = x : \frac{1}{2}(a-y)$$

$$\frac{1}{4}(a^2 - y^2) = bx$$

$$a^2 - y^2 = 4bx$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

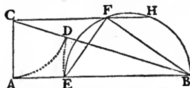
Quare (§. 87 *Arith.*)

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$

$$2x^2 + 4bx = 2a^2$$

$x^2 +$

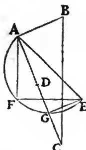
$$x^2 + 2bx = a^2$$
$$\quad b^2 \quad\quad b^2$$
$$x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2$$
$$x + b = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$
$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$$



Constructio nihil difficultatis habet. Quodsi enim triangulum construi debet, ad AB $= a$ excitetur in A perpendicularis AC $= b$ (§. 249 *Geom.*); erit BC $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Quare si fiat CD $=$ AC; erit DB $= \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Fiat jam porro BE $=$ BD & descripto super EB semicirculo ex C ducatur CH ipsi AB parallela (§. 258 *Geom.*) secans semicirculum in F. Ductis enim rectis EF & FB, erit EFB triangulum quæsitum.

PROBLEMA 128.

283. *Datis pro triangulo rectangulo* BAC *hypothenusa* BC *&* *differentia crurum* DC, *invenire crura*.



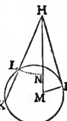
Sit BC $= c$, DC $= f$, $\frac{1}{2}$(AB + AC) $= x$; erit AC $= x + \frac{1}{2}f$, AB $= x - \frac{1}{2}f$ (§. 6), consequenter (§. 417 *Geom.*)

$$2x^2 + \tfrac{1}{2}f^2 = c^2$$
$$2x^2 = c^2 - \tfrac{1}{2}f^2$$
$$x^2 = \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2)}$$

Constructio: Construatur rectangulum triangulum AFE, in quo AF $=$ FE $= \frac{1}{2}c$; erit AE $= \sqrt{\frac{1}{2}c^2}$. Super AE describatur semicirculus ob AF $=$ FE transiturus per F, & in eo applicetur EG $= \frac{1}{2}f$; erit AG $= x$, consequenter si fiat DG $=$ GC $=$ GE; erit crus majus AC, minus AB $=$ AD.

PROBLEMA 129.

284. *In dato circulo aptare rectam datam* KL, *quæ producta transeat per datum punctum* H *tangentis* HI.



Sit LK $= m$, HI $= n$, LH $= y$; erit (§. 379 *Geom.*)

$$y^2 + my = n^2$$
$$\quad \tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$
$$y^2 + my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + n^2$$
$$y + \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)}$$
$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)} - \tfrac{1}{2}m$$

Constructio: In puncto tangentis I erigatur perpendicularis MI $= \frac{1}{2}m$; erit HM $= \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + n^2)}$. Fiat NM $=$ MI $= \frac{1}{2}m$; erit HN $= y$. Quare si ex centro H radio HN describatur arcus LN; erit L punctum, per quod recta HK ducenda, ut LK sit chorda in circulo aptanda.

PROBLEMA 130.

285. *Datis duobus quadratis invenire duo alia reciproca, quorum summa æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data b^2, c^2, d^2, quæsita y^2 & $d^2 - y^2$; erit per conditionem problematis

$$y^2 : b^2 = c^2 : d^2 - y^2$$
$$d^2y^2 - y^4 = b^2c^2$$
$$y^4 - d^2y^2 = -b^2c^2$$
$$\quad \tfrac{1}{4}d^4 \quad\quad \tfrac{1}{4}d^4$$
$$y^4 - d^2y^2 + \tfrac{1}{4}d^4 = \tfrac{1}{4}d^4 - b^2c^2$$
$$\tfrac{1}{2}d^2 - y^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - b^2c^2)}$$
$$y^2 = \tfrac{1}{2}d^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - b^2c^2)}$$
$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}d^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^4 - b^2c^2)})}$$

Con-

Constructio: Quæratur ad $AB = d$, $AC = b$ & $BD = c$ quarta proportionalis $CE = bc : d$. Describatur semicirculus super $CF = \frac{1}{2}d$ & in eo applicetur $CG = CE$; erit $FG = \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - b^2c^2)} : d$. Fiat $HC = d$ & $CI = \frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - b^2c^2)} : d$; erit media proportionalis $CK = y$. Denique super $CH = d$ describatur semicirculus & in eo applicetur $CL = CK$; erit $LH = \sqrt{(d^2 - y^2)}$ latus alterius quadrati quæsiti.

PROBLEMA 131.

286. *Datis duobus quadratis invenire duo alia reciproca, quorum differentia æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data f^2, g^2, b^2, quæsita y^2 & $b^2 + y^2$. Erit per conditionem problematis

$$y^2 : f^2 = g^2 : b^2 + y^2$$
$$y^4 + b^2y^2 = f^2g^2$$
$$\tfrac{1}{4}b^4 \quad \tfrac{1}{4}b^4$$
$$y^4 + b^2y^2 + \tfrac{1}{4}b^4 = f^2g^2 + \tfrac{1}{4}b^4$$
$$y^2 + \tfrac{1}{2}b^2 = \sqrt{(f^2g^2 + \tfrac{1}{4}b^4)}$$
$$y^2 = -\tfrac{1}{2}b^2 + \sqrt{(f^2g^2 + \tfrac{1}{4}b^4)}$$
$$y = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}b^2 + \sqrt{(f^2g^2 + \tfrac{1}{4}b^4)})}$$

Constructio eadem fere, quæ problematis præcedentis.

PROBLEMA 132.

287. *Datis tribus lateribus trianguli cujuscunque* HL, LI & IH, *invenire altitudinem* LM.

Sit $HL = c$, $LI = d$, $HI = g$, $HM = z$; erit $MI = g - z$. Quare (§. 417 *Geom.*) bis invento valore ipsius ML^2

$$cc - zz = dd - gg + 2gz - zz$$
$$cc = dd - gg + 2gz$$
$$cc - dd = 2gz - gg$$
$$cc + gg - dd = 2gz$$
$$\frac{cc + gg - dd}{2g} = z$$

Geometrica constructio non desideratur, utpote ex elementis manifesta; sed tantum regula arithmetica.

COROLLARIUM.

288. Vi æquationis tertiæ $d^2 - c^2 = g^2 - 2gz$. Sed $g^2 - 2gz$ est differentia inter z^2 & $g^2 - 2gz + z^2$. Ergo in omni triangulo differentia quadratorum crurum HL & LI æquatur differentiæ quadratorum segmentorum basis HM & MI.

PROBLEMA 133.

289. *Triangulo dato* HLI *æquale & alteri dato* NOP *simile construere.*

Sit $HI = f$, $LM = e$, $NP = m$, $QO = n$, basis tranguli quæsiti $= y$, altitudo $= z$; erit

(§. 396 *Geom.*)
$$m : n = y : z$$
$$mz = ny$$

(§. 392 *Geom.*)
$$fe = zy$$
$$fe : y = z$$
$$mfe : y = mz$$

Quare (§. 87 *Arith.*)

$$ny = mfe : y$$
$$ny^2 = mfe$$
$$y^2 = mfe : n$$
$$y = \sqrt{(mfe : n)}$$

Constructio: Producatur altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipsi NP parallela; erit $RS = me : n$. Quæratur inter RS & $SI = f$ media proportionalis $TS = \sqrt{(mfe : n)}$, super qua ob angulos N & P datos triangulum TSV construi potest (§. 264 *Geom.*).

AIL-

ALITER.

$n:m = z:y \qquad fe = zy$

Fiat $n:m = e:r \qquad f:z = y:e$ (§. 299 *Arith.*)

erit $z:y = e:r$ (§. 167 *Arith.*)

Ergo $f:y = y:r$ (§. 194 *Arith.*)

Est ergo y media proportionalis inter f & r, seu inter f & $em:n$, ut ante.

PROBLEMA 134.

290. *Ex angulo* C *rhombi dati* ABDC *ducere rectam* CG *lateri* AB *continuato occurrentem in* G, *ita ut* EG *sit æqualis lineæ datæ.*

Ducatur diagonalis CB & in E constituatur angulus CEF = CBG (§. 208 *Geom.*), cujus latus EF producatur, donec diagonali continuatæ in F occurrat.

Sit $AB = b$, $CB = c$, $EG = d$, $BG = z$, $CF = y$; erit $BF = y - c$, $BG:GE = AB:EC$ (§. 268 *Geom.*). Unde reperitur $EC = bd:z$. Quoniam angulus CEF = CBG *per constr.* erit ob angulum communem C (§. 267 *Geom.*) CB : BG = CE : EF. Unde reperitur $EF = zbd:cz = bd:c$. Porro $o = x$ (§. 156 *Geom.*) & $x = u$ (§. 99. 204 *Geom.*). Ergo $o = u$ (§. 87 *Arith.*), consequenter CBG = EBF (§. 88 *Arith.*) = CEF (§. 87 *Arith.*). Ergo ob angulum communem F (§ 267 *Geom.*)

$$CF : FE = FE : BF$$

$$y : \frac{bd}{c} = \frac{bd}{c} : y - c$$

$$cy : bd = bd : cy - c^2$$

$$c^2y^2 - c^3y = b^2d^2$$

$$y^2 - cy = b^2d^2 : c^2$$

$$y^2 - cy + \tfrac{1}{4}c^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + b^2d^2 : c^2$$

$$y - \tfrac{1}{2}c = \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + b^2d^2 : c^2)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + b^2d^2 : c^2)}$$

Ex æquatione prima statim liquet, inveniendas esse ipsi $bd:c$ reciprocas y & $y - c$. Ex ultima autem hæc elicitur

Constructio: Fiat BM = EG = d & ducatur LM ipsi AC parallela; erit LM = $bd:c$ (§. 268 *Geom.*). Dividatur BC bifariam in N & in C erigatur perpendicularis CO = LM; erit ON = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + b^2d^2 : c^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Translata ergo ON ex N in F; erit CF = y. Denique cum EF = $bd:c$ = LM; ex puncto F intervallo FE determinetur punctum E. Quodsi jam ex C ducatur recta per E occurrens ipsi AB continuatæ in G; erit EG æqualis lineæ datæ.

PROBLEMA 135.

291. A *dato puncto* E *ducere rectam, quæ circulum datum tangat.*

Quia punctum E positione, circulus GDFG & positione & magnitudine datur; dantur etiam EG & GC. Sit itaque $EG = a$, $GC = b$, $ED = x$; erit $EF = a + 2b$ & (§. 379 *Geom.*)

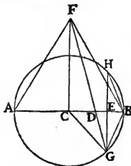
$$a^2 + 2ab = x^2$$

$$\sqrt{(a^2 + 2ab)} = x$$

Constructio: Connectantur centrum circuli C & punctum datum E recta EC. Super ea describatur semicirculus CDE, ducanturque chordæ CD & DE; erit D rectus (§. 317 *Geom.*). Est vero $CE^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $CD^2 = b^2$. Ergo $DE = \sqrt{(2ab + a^2)} = x$ (§. 417 *Geom.*).

PROBLEMA 136.

292. *Examinare regulam* Renaldiniam, *polygonum regulare quodcunque circulo inscribendi.*



Regula *Caroli Renaldini*(*a*) hæc est. Dividatur diameter AB in tot partes æquales, in quot peripheria dividi debet. Super AB construatur triangulum æquilaterum AFB. Ex F per secundum divisionis punctum D ducatur recta FG. Erit ex ipsius mente BG latus polygoni.

Falsitatem regulæ una instantia ostendisse sufficit.

Sit BG latus octogoni & fiat BH = BG; erit HG latus quadrati. Sit porro CB = 1, EG = x; erit CD = $\frac{1}{2}$ *per regulam* Renaldini, FC = $\sqrt{3}$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam angulus ad C rectus (§. 184 *Geom.*), & is ad E itidem rectus (§. 291 *Geom.*), præterea verticales ad D æquales (§. 156 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*) FC : CD = EG : DE, hoc est, $\sqrt{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{2x}{\sqrt{3}}$. Hinc CE = $\frac{\sqrt{3}+x}{2\sqrt{3}}$. Unde tandem, ob CE² + EG² = CG² (§. 417 *Geom.*), reperitur

(*a*) De Resolutione & Compositione Mathematica lib. 1. f. 167.

$$\frac{3+2x\sqrt{3}+x^2}{12}+x^2=1$$

$$3+2x\sqrt{3}+13x^2=12$$

$$2x\sqrt{3}+13x^2=9$$

$$\frac{2}{13}x\sqrt{3}+x^2=\underline{9}$$

$$\frac{3}{13.13} \qquad \frac{3}{13.13}$$

$$\frac{3}{13.13}+\frac{2}{13}x\sqrt{3}+x^2=\frac{9}{13}+\frac{3}{13.13}=\frac{120}{13.13}$$

$$\frac{1}{13}\sqrt{3}+x=\frac{1}{13}\sqrt{120}$$

$$x=\frac{1}{13}\sqrt{120}-\frac{1}{13}\sqrt{3}=\frac{2}{13}\sqrt{30}-\frac{1}{13}\sqrt{3}$$

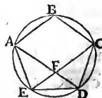
Foret ideo semilatus quadrati, si vera esset regula *Renaldini*, $(2\sqrt{30}-\sqrt{3}):13$. Sed idem ex veris principiis elicitur $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 21 *Trig.*) = $\sqrt{\frac{1}{2}}$: quod diversum a *Renaldiniano* esse extractio radicis probat. Fallit ergo regula *Renaldini* in octogono, ideoque non universalis.

SCHOLION.

293. *Eodem prorsus modo ostenditur, quod etiam fallat in aliis polygonis.*

PROBLEMA 137.

294. *Data diagonali pentagoni regularis* AD, *invenire latus pentagoni* AE.



Sit AE = x, AD = a. Quoniam anguli AEC mensura est arcus AB (§. 314 *Geom.*) & ipsius EFA semisumma arcuum AE & CD (§. 316 *Geom.*), hoc est, arcus AE (§. 342 *Geom.*), est vero AB = AE (§ *cit. Geom.*); erit AEF = AFE (§. 142 *Geom.*), consequenter AF = AE (§. 253 *Geom.*) = x, ideoque FD = $a - x$. Porro anguli AED mensura est AB + $\frac{1}{2}$BC (§. 314 *Geom.*) & ipsius

ipsius F mensura itidem $AB + \frac{1}{2}BC$ (§. 316 *Geom.*) & angulus ADE utrique triangulo AED & EFD communis. Quare (§. 267 *Geom.*)

$$AD : ED = ED : FD$$

$$a : x = x : a - x$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

Est igitur x pars major ipsius a media & extrema ratione sectæ (§. 258).

COROLLARIUM.

295. Erit ergo, substitutis a pro x & x pro a, $a = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{5}{4}x^2}$. Unde patet, quomodo ex dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA 138.

296. *Invenire circulum superficiei cylindri æqualem.*

Sit ratio radii ad peripheriam $r : p$, peripheria cylindri $= p$, altitudo $= a$; erit superficies $= ap$ (§. 516 *Geom.*). Sit radius circuli $= x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$, quæ est ejusdem peripheria (§. 425 *Geom.*). Unde habemus (§. 429 *Geom.*)

$$px^2 : 2r = ap$$

$$px^2 = 2rap$$

$$x^2 = 2ar$$

$$x = \sqrt{2ar}$$

Theorema: Superficies cylindri æquatur circulo, cujus radius est medius proportionalis inter diametrum & altitudinem cylindri.

PROBLEMA 139.

297. *Invenire cylindrum, cujus superficies sit circulo dato æqualis.*

Sit circuli radius $= r$, peripheria $= p$, altitudo cylindri $= x$, radius basis $= y$; erit peripheria ejus $py : r$ (§. 425 *Geom.*), consequenter (§. 516 & §. 429 *Geom.*)

$$pyx : r = \frac{1}{2}pr$$

$$pyx = \frac{1}{2}pr^2$$

$$yx = \frac{1}{2}r^2$$

$$x = r^2 : 2y$$

Est ideo problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio assumi possit, vel, quod perinde est, altitudo.

PROBLEMA 140.

298. *Data diametro sphæræ & altitudine cylindri ipsi æqualis, invenire diametrum cylindri.*

Sit diameter sphæræ $= d$, altitudo cylindri $= a$, diameter ejus $= x$; erit soliditas illius fere $157d^3 : 300$ (§. 552 *Geom.*), hujus $314ax^2 : 400$ (§. 541 *Geom.*). Quare per conditionem problematis

$$157d^3 : 300 = 314ax^2 : 400$$

$$4 \cdot 157d^3 : 3 = 314ax^2$$

$$628d^3 : 942a = 2d^3 : 3a = x^2$$

$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x$$

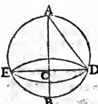
Æquatio penultima in hanc analogiam

$$d^2 : x^2 = 3a : 2d$$

resoluta sequens suppeditat

Theorema: Quadratum diametri sphæræ est ad quadratum diametri cylindri ipsi æqualis, fere ut tripla cylindri altitudo ad diametrum sphæræ duplam.

PROBLEMA 141.



299. *Data diametro sphæræ AB, invenire latus tetraedri ipsi inscribendi AD.*

Sit diameter sphæræ $AB = a$, latus tetraedri $AD = x$; erit radius circuli, cui unum e triangulis tetraedri inscribi potest, $= \sqrt{\frac{1}{3}x^2}$ (§. 269). Sit $AC = y$; erit $CB = a - y$, consequenter

(§. 327 *Geom.*)
AC : CD = CD : CB
$y : \sqrt{\frac{1}{3}x^2} = \sqrt{\frac{1}{3}x^2} : a - y$

$$ay - y^2 = \frac{1}{3}x^2$$
$$ay - \frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{3}x^2$$
$$ay = x^2$$
$$a\sqrt{\frac{2}{3}x^2} = x^2$$
$$\frac{2}{3}a^2x^2 = x^4$$
$$\frac{2}{3}a^2 = x^2$$
$$\sqrt{\frac{2}{3}a^2} = x$$

(§. 417 *Geom.*)
$AD^2 = AC^2 + CD^2$
$$x^2 = y^2 + \frac{1}{3}x^2$$
$$\frac{2}{3}x^2 = y^2$$
$$\sqrt{\frac{2}{3}x^2} = y$$

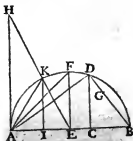
Est ergo $x^2 : a^2 = 2 : 3$.

Theorema: Quadratum lateris tetraedri est ad quadratum diametri sphæræ, cui inscribi potest, in ratione subsesquialtera.

COROLLARIUM I.

300. Est ergo latus tetraedri ad diametrum sphæræ, cui inscribitur, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, consequenter huic incommensurabile.

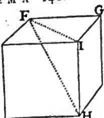
COROLLARIUM 2.



301. Porro quoniam $y^2 = \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}ay$; erit $y = \frac{2}{3}a$. Patet ideo tetraedrum sphæræ inscribi, si diameter AB in tres partes æquales dividatur fiatque $AC = \frac{2}{3}AB$.

PROBLEMA 142.

302. *Data diametro sphæræ, invenire latus cubi seu hexaedri ipsi inscribendi* FG.



Sit diameter sphæræ, quæ diagonali cubi FH æquatur, $= a$, latus cubi $= x$; erit (§. 417 *Geom.*) $FI^2 = 2x^2$ & $FH^2 = 3x^2$, consequenter

$$3x^2 = a^2$$
$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$
$$x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$$

Æquatio prima in hanc resolvitur analogiam

$$x^2 : a^2 = 1 : 3$$

quæ sequens suppeditat

Theorema: Quadratum lateris hexaedri est ad quadratum diametri sphæræ circumscriptæ in ratione subtripla.

COROLLARIUM I.

303. Est ergo latus hexaedri ad diametrum sphæræ, cui inscribitur, ut 1 ad $\sqrt{3}$, consequenter huic incommensurabile.

COROLLARIUM 2.

304. Sit in diametro sphæræ (*Vid. Fig.* §. 301) $AC = \frac{2}{3}a$ & $CB = \frac{1}{3}a$, erit $AD = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$ (§. 330 *Geom.*), consequenter $DB = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, seu latus hexaedri.

PROBLEMA 143.

305. *Data diametro sphæræ, invenire latus octaedri inscripti* ML.

Sit $LM = x$, diameter sphæræ circumscriptæ $HL = b$. Quoniam ML quadrantem subtendit (§. 342 *Geom.*); erit (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{2}{4}b^2 \text{ seu } \frac{1}{2}b^2 = x^2$$
$$\sqrt{\frac{1}{2}b^2} = x$$

Theorema: Quadratum lateris octaedri est ad quadratum diametri sphæræ circumscriptæ in ratione subdupla.

COROLLARIUM I.

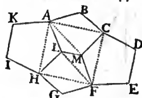
306. Est ergo latus octaedri ML ad diametrum sphæræ circumscriptæ ut 1 ad $\sqrt{2}$, ideoque huic incommensurabile.

COROLLARIUM 2.

307. Si ex centro sphæræ E (*Vid. Fig.* §. 301) erigatur perpendicularis EF; erit $FA = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, ideoque latus octaedri inscribendi, id quod in ipso calculo supposuimus, in futuros tamen usus sigillatim enuntiandum.

PRO-

PROBLEMA 144.



308. *Data diametro sphæræ, invenire latus dodecaedri* AB.

Quoniam puncta A, C, F, H sunt in sphæra: planum per ea transiens est circulus, ut inferius in Sphæricis independenter a dodecaedro demonstrabitur. Quoniam anguli B, M, G & L, itemque latera AB, BC, CM, MF, FG, GH, HL & LA inter se æquantur (§. 475. 106 *Geom.*); AC = CF = HF = HA (§. 179 *Geom.*), ideoque AHFC quadratum (§. 342. & 98 *Geom.*). Jam cum pentagona 12 in 36 triangula resolvantur per lineas diagonales, quadratum vero AHFC nonnisi 6 subtendat; omnia ista triangula a sex quadratis subtendantur necesse est, consequenter diagonalis AC est lateri hexaedri sive cubi eidem sphæræ inscripti æqualis (§. 459 *Geom.*).

Sit latus dodecaedri $AB = x$, diameter sphæræ $= d$; erit $AC = \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2}$ (§. 302), consequenter

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} : x = x : \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} - x \quad (§. 294)$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 - x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x^2$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2}$$

$$\tfrac{1}{12}d^2 \qquad\qquad \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\tfrac{5}{12}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} + \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} = x + \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2}$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} - \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2} = x$$

h. e. $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}d^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x$

Multiplicando per 3 singulos æquationis tertiæ terminos oritur hæc altera $d^2 = 3x^2 + 3x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2}$, quæ sequens suppeditat

Theorema: Quadratum diametri sphæræ æquatur rectangulo ex aggregato lateris dodecaedri & hexaedri eidem inscriptorum in triplum latus dodecaedri.

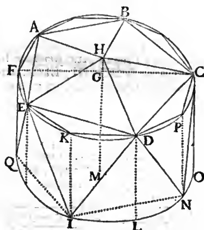
COROLLARIUM 1.

309. Si diameter sphæræ fuerit 1; erit latus dodecaedri inscripti $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, consequenter illa ad hoc, ut 2 ad $\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, & quadratum illius ad quadratum hujus ut 6 ad $3 - \sqrt{5}$. Est ergo diameter sphæræ lateri dodecaedri inscripti tum in se, tum potentia incommensurabilis.

COROLLARIUM 2.

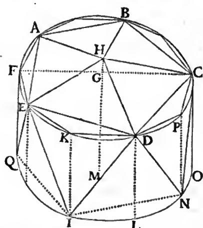
310. Quoniam æquatio secunda §. 308 in hanc resolvitur analogiam $\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} : x = x : \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} - x$; latus dodecaedri (*Vid. Fig.* §. 301) est portio major BG lateris hexaedri DB eidem sphæræ inscripti media & extrema ratione secti in G (§. 258).

PROBLEMA 145.



311. *Data diametro sphæræ* HM, *invenire latus icosaedri inscripti.*

Sit ABCDEA circulus subtendens angulum solidum icosaedri H; erit latus icosaedri æquale lateri pentagoni AB

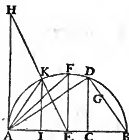


AB huic circulo inscripti (§. 475 *Geom.*). Concipiatur eidem circulo inscriptum decagonum regulare DKEFA &c. & alterum circulo alii, qui isti parallelus & ab eo distat intervallo radii GC; erit DN = DC (§. 279). Quodsi ergo anguli pentagonorum lineis transversis DN, DI, EI &c. connectantur; decem prodibunt triangula æquilatera juncta decem aliis, quorum quinque a circulo superiore, quinque ab inferiore subtenduntur.

Sit HM = b, HC = x, GC = y. Quoniam GC est latus hexagoni; erit HG latus decagoni (§. 279), ideoque $= \sqrt{\tfrac{4}{3}y^2} - \tfrac{1}{2}y$ (*vi §. cit.*). Habemus ergo

$$2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - y + y = b$$
$$\text{h.e. } 2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} = b$$
$$5y^2 = b^2$$
$$y^2 = \tfrac{1}{5}b^2$$
$$y = \sqrt{\tfrac{1}{5}b^2} = b : \sqrt{5}$$

$$x^2 = y^2 + \tfrac{5}{4}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} + \tfrac{1}{4}y^2$$
$$x^2 = \tfrac{5}{2}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2}$$
$$x^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - \sqrt{\tfrac{1}{20}b^4}$$
$$x^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$$
$$x = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}\right)}$$



Constructio: Fiat AH = AB = b; erit EH = $\sqrt{\tfrac{5}{4}b^2}$ (§. 417 *Geom.*) &, ob EH : AH = EK : IK, hoc est, $\tfrac{1}{2}b\sqrt{5} : b = \tfrac{1}{2}b : \frac{b}{\sqrt{5}}$ (§. 268 *Geom.*), IK $= b : \sqrt{5}$. Est ergo IK radius circuli, cui pentagonum icosaedri inscribitur. Porro EI $= b : 2\sqrt{5} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$ (§. *cit. Geom.*), & hinc AI $= \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$. Unde tandem AK $= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}\right)} = x$ (§. 417 *Geom.*).

COROLLARIUM I.

312. Quoniam $5y^2 = b^2$; quadratum diametri sphæræ est in ratione quintupla ad quadratum radii circuli angulum solidum icosaedri subtendentis.

COROLLARIUM 2.

313. Liquet etiam, latus icosaedri diametro sphæræ circumscriptæ tum in se, tum potentia incommensurabile esse.

SCHOLION I.

314. *Si diameter sphæræ fuerit* 10000; *erit* (§. 299. 305. 302. 311. 308) *latus tetraedri inscripti* 81149, *octaedri* 70710, *hexaedri* 57736, *icosaedri* 52573, *dodecaedri* 35682 (a).

SCHOLION 2.

315. *Cum ex diametro sphæræ corporibus regularibus circumscriptæ invenire possimus latera eorum; non difficile foret, inde ulterius elicere tum superficies, tum soliditates eorundem, easque tum inter se, tum cum quadrato & cubo diametri sphæræ conferre: sed quoniam hæc doctrina rarissimi est usus, eam prætermittendam esse judicamus.*

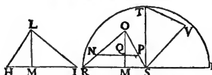
CAPUT

(a) Heligonius Curs. Math. Tom. I. p. 779.

CAPUT IV.

De Algebra ad Trigonometriam Planam applicata.

PROBLEMA 146.



316. **D***Atis basi* HI *trianguli cujuscunque & angulis ad basin* H & I, *invenire altitudinem*.

Sit HI $= a$, LM$= x$, finus anguli MIL $= s$, ejus cofinus $= c$, finus anguli LHM$= p$, ejus cofinus $= q$. Erit (§. 33 *Trigon.*) $s:x = c$:MI & $p:x = q$:HM. Unde reperitur MI $= cx:s$ & HM $= qx:p$ (§.302 *Arith.*). Quare (§. 87 *Arith.*)

$$cx:s + qx:p = a$$

$$pcx + sqx = asp$$

$$x = asp:(pc + sq)$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc + sq : sp = a : x$$

resoluta sequens exhibet

Theorema: In omni triangulo HIL fumma rectangulorum ex finu anguli obliqui ad bafin unius in cofinum alterius fe habet ad rectangulum ex finibus angulorum ad bafin, ut bafis HI ad altitudinem LM.

ALITER.

Sumatur ML pro finu toto, erunt HM & MI tangentes angulorum HLM & MLI, feu cotangentes datorum H & I. Sint finus totus $= t$, cotangentes $= m$ & n, LM$= x$, HI$= a$; erit $t:m = x$:HM & $t:n = x$:MI (§. 40 *Trigon.*), consequenter HM $= mx:t$, MI $= nx:t$, ideoque (§.87 *Arith.*)

$$a = (mx + nx):t$$

$$at = mx + nx$$

$$at:(m + n) = x$$

Theorema: Bafis trianguli eft ad altitudinem ut fumma cotangentium angulorum, qui funt ad bafin, ad finum totum.

PROBLEMA 147.

317. *Datis fumma crurum* HL + LI *una cum angulis ad bafin* H & I, *invenire crura* HL & LI.

Sit HL + LI $= a$, finus anguli H $= m$, finus anguli I$= n$, HL$= x$; erit IL$= a - x$. Quare (§. 33 *Trigon.*)

$$x:n = a - x:m$$

$$mx = na - nx$$

$$mx + nx = na$$

$$x = na:(m + n)$$

$$a - x = (ma + na - na):(m + n)$$

$$a - x = ma:(m + n)$$

Æquatio tertia in hanc refoluta analogiam

$$a:x = m + n:n$$

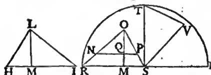
fequens fuppeditat

Theorema: Summa crurum trianguli HL + LI eft ad crus unum HL ut fumma finuum angulorum, qui funt ad bafin H & I, ad finum anguli I cruri isti HL oppofiti.

PROBLEMA 148.

318. *Datis angulis ad bafin* H & I *una cum fegmento bafeos uno* HM, *invenire fegmentum alterum* MI.

Sit



Sit HM $= a$, MI $= x$, sinus anguli H $= m$, ejus cosinus $= n$, sinus anguli I $= p$, ejus cosinus $= q$. Erit (§. 33 *Trigon.*) $n : a = m :$ ML. Reperitur ideo ML $= am : n$. Porro (*vi* §. *cit.*) $q : x = p :$ ML. Reperitur itaque ML $= px : q$. Quare (§. 81 *Arith.*)

$$px : q = am : n$$

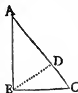
$$pnx = amq$$

$$x = amq : pn$$

Est ideo $pn : mq = a : x$

Theorema: Si ex vertice trianguli L in basin HI perpendiculum demittitur; segmentum unum HM est ad alterum MI ut rectangulum ex sinu anguli segmento MI adjacentis in cosinum anguli segmento HM adjacentis ad rectangulum ex sinu anguli H in cosinum anguli I.

PROBLEMA 149.



319. *Data area trianguli rectanguli* ABC *una cum angulo* C, *invenire crura* AB & BC.

Sit area $= b^2$, BC $= x$
sinus totus $= r$, erit BA $= 2b^2 : x$
tangens anguli C $= t$ (§. 394 *Geom.*).

Quare (§. 40 *Trigon.*)

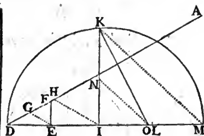
$$x : \frac{2b^2}{x} = r : t$$

$$x^2 : 2b^2 = r : t$$

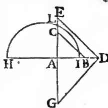
$$x^2 = 2rb^2 : t$$

$$x = \sqrt{(2rb^2 : t)}$$

Theorema: Area trianguli rectanguli est ad quadratum cruris unius BC ut tangens dimidia anguli adjacentis C ad sinum totum.

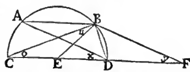


Constructio: Intra crura anguli dati ADM erigatur perpendicularis EF, puncto E pro lubitu assumto; erit DE $= r$ & EF $= t$ (§. 7 *Trigon.*). Fiat DG $=$ FF, DH $= b$ & agatur ipsi EG parallela HI; erit DI $= br : t$ (§. 271 *Geom.*). Fiat MI $= 2b$ & quæratur inter MI & DI media proportionalis IK (§. 327 *Geom.*), quæ erit crus unum. Dividatur MI bifariam in L & fiat IN $=$ LI, ducaturque NO ipsi MK parallela; erit IO $= 2b^2 : x$ (§. 271 *Geom.*), ideoque crus alterum, consequenter KOI triangulum quæsitum.



Aliter. Sit EDA angulus datus. Fiat DA $= 2b$ & erigatur AE perpendicularis ad DA; erit simul DA $= r$ & AE $= t$ (§. 7 *Trigon.*). Producatur EA in infinitum & in D erigatur ad ED perpendicularis DG; erit AG $= \frac{2br}{t}$ (§. 327 *Geom.*). Fiat AH $=$ AG & AI $= \frac{1}{2}$AD $= b$; erit descripto super IH semicirculo, AL $= \sqrt{\frac{2b^2r}{t}}$. Fiat denique AB $=$ AL & ducatur BC cruri anguli dati DE parallela; erit triangulum BAC quæsitum.

PROBLEMA 150.



320. *Data subtensa arcus* AB *quadrante minoris una cum radio circuli* CE, *invenire subtensam* CB *arcus compositi*

positi ex arcu AB *& ejus complemento dimidio ad semicirculum.*

Applicetur AB diametro CD parallela & fiat DF = AB, ducanturque rectæ EB, AD & BF. Quoniam $x = o$ (§. 315 *Geom.*), &, ob parallelismum linearum AD & BF (§. 257 *Geom.*), $x = y$ (§. 233 *Geom.*); erit $o = y$ (§. 87 *Arith.*). Est vero etiam, ob CE = EB (§. 40 *Geom.*), $u = o$ (§. 184 *Geom.*) $= y$, consequenter CF : CB = CB : CE (§. 267 *Geom.*). Sit jam AB $= a$, CE $= r$, CB $= x$; erit CF $= a + 2r$, consequenter

$$a + 2r : x = x : r$$

$$ar + 2r^2 = x^2$$

$$\sqrt{(ar + 2r^2)} = x$$

COROLLARIUM 1.

321. Cum angulus CBD sit rectus (§. 317 *Geom.*); erit $BD^2 = 4r^2 - ar - 2r^2 = 2r^2 - ar$ (§. 417 *Geom.*), consequenter BD, subtensa dimidii complementi ad semicirculum arcus AB, $= \sqrt{(2r^2 - ar)}$.

COROLLARIUM 2.

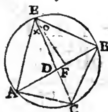
322. Quadratum ergo chordæ DB arcum quadrante minorem subtendentis æquatur rectangulo ex radio CE & excessu diametri CD super chordam AB ductam ex puncto B diametro CD parallelam.

COROLLARIUM 3.

323. Quadrata chordarum CB & BD, quæ ambæ simul semicirculum subtendunt, sunt inter se ut $2r^2 + ar$ ad $2r^2 - ar$ (§. 320. 321), hoc est, ut $2r + a$ ad $2r - a$ (§. 181 *Arith.*), hoc est, ut aggregatum ex diametro CD & chorda AB ex puncto concursus B eidem parallela ducta, ad differentiam hujus chordæ a diametro.

PROBLEMA 151.

324. *Datis in quadrilatero circulo inscripto lateribus* AE, EB, BC *&* AC *una cum diagonali* EC, *invenire diagonalem* AB.



Sit AE $= a$, EB $= b$, BC $= c$, AC $= d$, EC $= f$, AB $= y$. Ducatur EF, ita ut sit $o = x$ (§. 208 *Geom.*). Quoniam præterea ACE = ABE (§. 315 *Geom.*); erit EC : AC = EB : BF, hoc est, $f : d = b :$ BF (§. 267 *Geom.*). Reperitur ergo BF $= bd : f$. Quoniam porro EAB = ECB (§. 315 *Geom.*) & AEF = CEB (§. 88 *Arith.*); erit EC (f) : CB (c) = EA (a) : AF $(ac : f)$ (§. 267 *Geom.*). Quare (§. 86 *Arith.*)

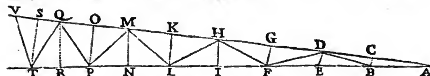
$$(bd + ac) : f = y$$

$$bd + ac = fy$$

Theorema: In quadrilatero circulo inscripto AEBC rectangulum ex diagonalibus EC & AB æquatur rectangulis ex lateribus oppositis EB in AC, & EA in BC.

PROBLEMA 152.

325. *Dato sinu anguli simpli, invenire sinus & cosinus angulorum multiplorum.*



Sit angulus quicunque A, fiat AB = BD = DF = FH = HL = LM = MP = PQ = QT = TV; erit A = ADB (§. 184 *Geom.*), FBD = A + ADB (§. 239 *Geom.*) = 2A *per demonstr.* Eodem modo ostenditur, esse FDH



FDH = A + DFA = 3A; HFL = A + AHF = 4A; LHM = A + ALH = 5A; PLM = A + AML = 6A &c. Demittantur perpendiculares BC, DE, FG, HI, LK, MN &c. Quodsi AB sumatur pro sinu toto; erit BC sinus, AC cosinus anguli simpli A; ED sinus, EB cosinus anguli dupli; FG sinus, DG cosinus anguli tripli &c. (§. 2. 11 *Trigon.*).

Sit AB $= r$, BC $= b$, AC $= a$; erit ob angulum A utrique △△ BAC & EAD communem & rectos ad C & E æquales (§. 267 *Geom.*)

$$AB : BC = AD : DE$$

$$r : b = 2a : \frac{2ab}{r}$$

$$AB : AC = AD : AE$$

$$r : a = 2a : \frac{2a^2}{r}$$

Ergo BE = AE — AB $= 2a^2 : r - r = (2a^2 - r^2) : r$. Est vero $r^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 *Geom.*). Ergo BE $= (2a^2 - a^2 - b^2) : r = (a^2 - b^2) : r$ & AF = AE + EF $= (3a^2 - b^2) : r$.

$$AB : BC = AF : FG \text{ (§. 268 Geom.)}$$

$$r : b = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3a^2b - b^3}{r^2}$$

$$AB : AC = AF : AG$$

$$r : a = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3a^3 - ab^2}{r^2}$$

Ergo DG = AG – AD $= (3a^3 - ab^2) : r^2 - 2a = (3a^3 - ab^2 - 2ar^2) : r^2 =$ (substituto valore ipsius $r^2 = a^2 + b^2$), $(a^3 - 3ab^2) : r^2$, consequenter AH = AG + GH $= (4a^3 - 4ab^2) : r^2$.

$$AB : BC = AH : HI$$

$$r : b = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^3b - 4ab^3}{r^3}$$

$$AB : AC = AH : AI$$

$$r : a = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^4 - 4a^2b^2}{r^3}$$

Quia FA $= (3a^2 - b^2) r = (3a^2 - b^2) r^2 : r^3 = (3a^2 - b^2)(a^2 + b^2) : r^3 = (3a^4 + 2a^2b^2 - b^4) : r^3$, ideo erit FI = AI — AF $= (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) : r^3$.

Eodem prorsus modo reperitur

KL $= (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5) : r^4$

& HK $= (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) : r^4$;

MN $= (6a^5b - 20a^3b^3 + 6ab^5) : r^5$

& LN $= (a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6) : r^5$;

PO $= (7a^6b - 35a^4b^3 + 21a^2b^5 - b^7) : r^6$

& OM $= (a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) : r^6$.

Si itaque radius seu sinus totus $= r$, erit sinus anguli

simpli b

dupli $2ab : r$

tripli $(3ba^2 - b^3) : r^2$

quadrupli $(4ba^3 - 4b^3a) : r^3$

quintupli $(5ba^4 - 10b^3a^2 + b^5) : r^4$

sextupli $(6ba^5 - 20b^3a^3 + 6b^5a) : r^5$

septupli $(7ba^6 - 35b^3a^4 + 21b^5a^2 - b^7) : r^6$

&c.

Hinc patet lex progressionis in infinitum. Componitur nimirum formula pro sinu anguli multipli ex termino secundo, quarto, sexto, octavo &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad eam dignitatem evecti, cujus exponens idem est cum exponente multipli, signis + & — alternantibus (§. 95).

Hinc

Hinc formula generalis in casu indefinito emergit

$$\frac{m}{1 \cdot r^{m-1}} ba^{m-1} - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^{m-1}} b^3 a^{m-3}$$
$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot r^{m-1}} b^5 a^{m-5} -$$
$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot m-6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot r^{m-1}} b^7 a^{m-7} \text{ \&c.}$$

Similiter si sinus totus $= r$, erit cosinus anguli

simpli a
dupli $(a^2 - b^2) : r$
tripli $(a^3 - 3b^2 a) : r^2$
quadrupli $(a^4 - 6b^2 a^2 + b^4) : r^3$
quintupli $(a^5 - 10b^2 a^3 + 5b^4 a) : r^4$
sextupli $(a^6 - 15b^2 a^4 + 15b^4 a^2 - b^6) : r^5$
septupli $(a^7 - 21b^2 a^5 + 35b^4 a^3 - 7b^6 a) : r^6$
&c.

Unde denuo patet lex progressionis in infinitum. Nimirum formulæ componuntur ex terminis primo, tertio quinto, septimo, nono &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad eam dignitatem evecti, cujus exponens est idem cum exponente multipli anguli desiderati, signis $+$ & $-$ alternantibus (§. 95). Erit ergo formula generalis in casu indefinito

$$a^m - \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot r^{m-1}} b^2 a^{m-2}$$
$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r^{m-1}} b^4 a^{m-4}$$
$$- \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot r^{m-1}} b^6 a^{m-6} +$$
$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot m-6 \cdot m-7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot r^{m-1}} b^8 a^{m-8}$$

&c. Quoniam $b^2 = r^2 - a^2$ (§. 16 *Trig.*) & ipsius b^2 potentiæ sunt etiam rationales; substituto hoc valore sive in formula generali, sive in specialibus, prodit cosinus anguli multipli per solum cosinum simpli & radium determinatus. Ita reperietur cosinus anguli

dupli $\frac{a^2 - b^2}{r} = \frac{a^2 - r^2 + a^2}{r} = \frac{2a^2}{r} - r$

tripli $\frac{a^3 - 3r^2 a + 3a^3}{r^2} = \frac{4a^3}{r^2} - 3a$

quadrup. $\frac{a^4 - 6r^2 a^2 + 6a^4 + r^4 - 2r^2 a^2 + a^4}{r^3}$

$$= \frac{8a^4}{r^3} - \frac{8a^2}{r} + r$$

quint. $\frac{a^5 - 10r^2 a^3 + 10a^5 + 5r^4 a - 10r^2 a^3 + 5a^5}{r^4}$

$$= \frac{16a^5}{r^4} - \frac{20a^3}{r^2} + 5a$$

Similiter ex sinuum formula excluditur cosinus, si valor ipsius $a = \sqrt{(r^2 - b^2)}$ substituitur: quamvis ea non sit ab irrationalitate libera.

Corollarium.

326. Cum sinus sit chordæ dimidium (§. 2 *Trigon.*), si chorda arcus simpli dicatur b, & chorda ejus complementi ad quadrantem a, & diameter r; per easdem formulas chordæ arcuum multiplorum determinantur. Quoniam vero data chorda datur etiam arcus; per easdem formulas arcus per datum numerum multiplicari potest.

Problema 153.

327. *Data tangente arcus simpli, invenire tangentem arcus multipli.*

Cum sit ut cosinus $a^m - \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot r^{m-1}} b^2 a^{m-2} +$ &c. ad sin. $\frac{m}{r^{m-1}} ba^{m-1} - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^{m-1}} b^3 a^{m-3}$ + &c. ita radius r ad tangentem (§. 325 *Analys.* & §. 26 *Trigon.*); erit tangens (assumtis ad abbreviandum calculum pro coefficientibus cosinuum A, B, C, D, E, pro coefficientibus sinuum P, Q, R, S, T excluso tamen in divisoribus r^{m-1}) =

$(Prba^{m-1} - Qrb^3 a^{m-3} + Rrb^5 a^{m-5} - Srb^7 a^{m-7}$ &c.$)$:
$(a^m - Ab^2 a^{m-2} + Bb^4 a^{m-4} - Cb^6 a^{m-6}$ &c.$)$

Sit tangens anguli simpli t, erit (§. *cit. Trigon.*) $a : b = r : t$, consequenter $a = br : t$. Quodsi hic valor in locum

 ipsius

ipsius a substituatur, prodit formula tangentis

$$\left(\frac{Pb^m r^m}{t^{m-1}} - \frac{Qb^m r^{m-2}}{t^{m-3}} + \frac{Rb^m r^{m-4}}{t^{m-5}} - \frac{Sb^m r^{m-6}}{t^{m-7}} \&c.\right) : \left(\frac{b^m r^m}{t^m} - \frac{Ab^m r^{m-2}}{t^{m-2}} + \frac{Bb^m r^{m-4}}{t^{m-4}} - \frac{Cb^m r^{m-6}}{t^{m-6}} \&c.\right)$$

Quodsi ulterius hæc formula dividatur per b^m & multiplicetur per t^m, prodibit tangens indefinita

$$(Pr^m t - Qr^{m-2}t^3 + Rr^{m-4}t^5 - Sr^{m-6}t^7 \&c.) : (r^m - Ar^{m-2}t^2 + Br^{m-4}t^4 - Cr^{m-6}t^6 \&c.)$$

Substitutis tandem valoribus P, Q, R, S & A, B, C, &c. tangentium formula erit

$$\left(\frac{m}{1}r^m t - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}r^{m-2}t^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}r^{m-4}t^5 - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.7}r^{m-6}t^7 \&c.\right) :$$

$$\left(r^m - \frac{m.m-1}{1.2}r^{m-2}t^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}r^{m-4}t^4 - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}r^{m-6}t^6 \&c.\right)$$

Apparet ide·, si binomium ex radio & tangente $r + t$ ad dignitatem indeterminatam elevetur (§. 95), fractionis, quæ tangentem indefinitam exprimit, denominatorem componi ex terminis imparibus, numeratorem vero ex terminis paribus, sed per radium multiplicatis & utrobique signis + atque — alternantibus.

PROBLEMA 154.

328. *Data secante arcus simpli, invenire secantem multipli.*

Quoniam secans est tertia proportionalis ad cosinum & radium (§. 26 *Trigon.*), erit (§. 325) assumtis pro coefficientibus cosinus) excluso tamen in divisoribus r^{m-1}) A, B, C, D &c. secans indeterminata

$$\frac{r^{m+1}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6}} \&c.$$

Est vero $r : b = s : t$ (§. *cit. Trig.*); unde eruitur $r = bs : t$. Hoc valore in formula secantis substituto, mutatur ea in sequentem

$$\frac{rb^m s^m}{a^m t^m - Ab^2a^{m-2}t^m + Bb^4a^{m-4}t^m} \&c.$$

Porro $a : b = r : t$ (§. *cit. Trig.*), ideoque $a = br : t$. Substituto itaque valore ipsius a in formula proxime præcedente; prodibit

$$\frac{rb^m s^m}{b^m r^m - Ab^m r^{m-2}t^2 + Bb^m r^{m-4}t^4} \&c.$$

Si tandem hæc formula dividatur per rb^m, determinabitur valor secantis indefinitæ ex tangente & secante anguli simpli

$$\frac{s^m}{r^{m-1} - Ar^{m-3}t^2 + Br^{m-5}t^4 + Cr^{m-7}t^6} \&c.$$

CAPUT V.

De Extractione Radicum ex Æquationibus Altioribus.

PROBLEMA 155.

329. EXplicare naturam æquationum.

1. Assumantur tot valores quantitatis incognitæ, quot libuerit, formenturque inde simplices æquationes, sed nihilo æquales.

2. Æquationes simplices in se invicem ducan-

ducantur; ita prodibunt æquationes altiores, quarum consideratio earum proprietates manifestabit.

Sit $x = 2$		$x = a$	
$x = -3$		$x = -b$	
$x = 4$		$x = c$	
erit $x - 2 = 0.$	I	$x - a = 0$	
$x + 3 = 0.$	II	$x + b = 0$	
$x - 4 = 0.$	III	$x - c = 0$	

Multiplicetur primo æquatio I per æquationem II & factum denuo per æquationem III.

$$\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \\ \hline +3x - 6 \\ x^2 - 2x \\ \hline x^2 + x - 6 = 0 \\ x - 4 = 0 \\ \hline -4x^2 - 4x + 24 \\ x^3 + x^2 - 6x \\ \hline x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x - a = 0 \\ x + b = 0 \\ \hline +bx - ab \\ x^2 - ax \\ \hline x^2 - an + bx - ab = 0 \\ x - c = 0 \\ \hline x^3 - cx^2 - bcx + abc = 0 \\ +bx^2 + acx \\ -ax^2 - abn \end{array}$$

Ad has æquationes attendens (quæ facile ad superiores gradus evehi possunt) sequentia observabit:

1. *Quantitatem cognitam secundi termini esse summam radicum, sed signo contrario affectarum, quantitatem cognitam tertii esse summam productorum ex singulis binis, quantitatem cognitam quarti esse summam productorum ex singulis ternis &c. terminum denique ultimum esse factum omnium radicum*: E. gr. In æquatione quadratica termini secundi quantitas enguita $1 = 3 - 2$. Radices vern sunt $+2$ & -3. Similiter in cubica quantitas cognita secundi termini $-3 = +3 - 4 - 2$. Radices sunt -3, $+4$ & $+2$. Quantitas cognita tertii termini in æquatione cubica $-10 = -6 + 8 - 12$. Radices sunt $+2$, -3 & $+4$. In eadem terminus ultimus $+24 = 2 . 3 . 4$.
2. *Quamlibet æquationem tot habere radices, quot quantitas incognita primi termini dimensiones, seu exponens unitates*: E.gr. in æquatione quadratica x^2 duas habet dimensiones: radices duæ sunt $+2$ & -3. In æquatione cubica x^3 tres habet dimensiones, radices tres sunt $+2$, -3 & $+4$.
3. *In qualibet æquatione tot esse radices veras, quot sunt signorum permutationes; tot esse falsas, quot eorundem successiones*. E.gr. in æquatione quadratica $x^2 + x - 6 = 0$, una est signorum successio $+ +$, una permutatio $+ -$. Æquatio vero habet radices duas, alteram veram $+2$, alteram falsam -3. In æquatione cubica $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duæ sunt signorum permutationes $+ -$ & $- +$; una successio $- -$. Radices vero tres habet, duas quidem veras $+2$ & $+4$, unam falsam -3.

SCHOLION I.

330. *Theoremata duo priora ex ipsa æquationum genesi haud difficulter demonstrantur: tertium vero, quod* Harriotus *per inductionem invenit, nemo hactenus demonstrare potuit.*

SCHOLION 2.

331. *Ceterum non est, quod miremur, unam æquationem multas habere posse radices. Unius enim ejusdemque problematis varii esse possunt casus, & in singulis casibus ad eandem pervenitur æquationem: quemadmodum exempla in Quadraticis supra habuimus* (§. 169. 163). *Quoniam tamen casus quidam interdum impossibiles sunt; radices quoque impossibiles esse debent.*

COROLLARIUM.

332. Radices veræ mutantur in falsas & falsæ in veras, si signa terminorum alternorum mutentur. E. gr. æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duas habet radices veras, unam falsam; sed si scribas $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, duæ sunt signorum successiones $+ +$ & $- -$; una vero permutatio $+ -$, ideoque æquatio duas radices falsas, veram unam habet.

PROBLEMA 156.

333. *Radicem æquationis augere vel minuere quantitate data.*

Sit æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Invenienda est æquatio alia, in qua radix $x + 3$.

$$\begin{array}{lrl} \text{Fiat} & x + 3 = & y \\ \text{erit} & x = & y - 3 \\ \hline & x^2 = & y^2 - 6y + 9 \\ \hline & x^3 = & y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ & -6x^2 = & -6y^2 + 36y - 54 \\ & +13x = & +13y - 39 \\ & -10 = & -10 \\ \hline & & y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0 \end{array}$$

En æquationem novam, in qua $y = x + 3$. Sit

Sit e contrario in æquatione modo inventa radix minuenda binario.

$$\text{Fiat } y - 2 = x$$

$$\text{erit } y = x + 2$$

$$y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$y^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$-15y^2 = -15x^2 - 60x - 60$$

$$+76y = +76x + 152$$

$$-130 = -130$$

$$x^3 - 9x^2 + 28x - 30 = 0$$

En æquationem novam, in qua $x = y - 2$.

COROLLARIUM I.

334. Quodsi radicem augeas quantitate radice falsa maxima majore; radices falsæ evadunt veræ: & contra si radicem minuas quantitate radice vera maxima majore; veræ evadunt falsæ. Si enim $y = -4$ & fiat $y + 5 = x$; erit $x = 5 - 4 = 1$. Contra si $y = 3$ & fiat $y - 4 = x$; erit $3 - 4 = -1 = x$. Dum itaque radicem minuimus quantitate quadam data, facile accidit ut radices veræ in falsas mutentur.

COROLLARIUM 2.

335. Dum radices veræ augentur, falsæ minuuntur. Nam si $y = 3$ & $= -5$, fiatque $y + 4 = x$; erit $x = 3 + 4 = 7$ & $y = 4 - 5 = -1$. Similiter si fiat $y - 2 = x$; erit $x = 3 - 2 = 1$ & $y = -5 - 2 = -7$.

PROBLEMA 157.

336. *Radicem æquationis per quantitatem datam multiplicare.*

Sit e. gr. radix æquationis $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ multiplicanda per a.

$$\text{Fiat } ax = y$$

$$\text{erit } x = y : a$$

$$x^2 = y^2 : a^2$$

$$x^3 = y^3 : a^3$$

$$+px^2 = +py^2 : a^2$$

$$+qx = +qy : a$$

$$-r = -r$$

$$\frac{y^3}{a^3} + \frac{py^2}{a^2} + \frac{qy}{a} - r = 0$$

$$y^3 + apy^2 + a^2qy - a^3r = 0$$

En æquationem novam, in qua $y = ax$.

COROLLARIUM.

337. Hinc manifestum est, æquationem datam tantum multiplicari debere per progressionem geometricam, in qua terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix multiplicari jubetur. Sit e. gr. in æquatione $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ radix multiplicanda per 2. Ita ergo procedendum:

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$

$$y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0$$

En æquationem, in qua $y = 2x$.

Similiter sit radix æquationis $x^3 - 3x + 1 = 0$ multiplicanda per 3.

$$x^3 * - 3x + 1 = 0$$

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

$$y^3 * - 27y + 27 = 0$$

En æquationem, in qua $y = 3x$.

SCHOLION.

338. *Stellula repleri solent loca vacua, in quibus termini æquationis deficiunt.*

PROBLEMA 158.

339. *Radicem æquationis per quantitatem datam dividere.*

Sit æquationis $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ radix dividenda per a.

$$\text{Fiat } x : a = y$$

$$\text{erit } x = ay$$

$$x^2 = a^2y^2$$

$$x^3 = a^3y^3$$

$$-px^2 = -a^2py^2$$

$$+qx = +aqy$$

$$-r = -r$$

$$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0$$

$$y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$$

En æquationem novam, in qua $y = x : a$.

COROL-

COROLLARIUM.

340. Apparet ideo, non alia re opus esse, quam ut æquatio data dividatur per progressionem geometricam, cujus terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix dividenda. Sit e. gr. radix æquationis $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ dividenda per 2. Ita igitur procedendum:

$$x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$
$$\overline{y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0}$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{2}x$.

Similiter si radix æquationis $x^3 * - 36x - 54 = 0$ dividatur per 3; erit

$$x^3 * - 36x - 54 = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$
$$\overline{y^3 * - 4y - 2 = 0.}$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{3}x$.

PROBLEMA 159.

341. *Complere æquationem, in qua termini quidam deficiunt.*

Radix æquationis augenda est quantitate data.

Sit e. gr. æquatio $x^3 * - 23x - 70 = 0$.

Fiat $x + 1 = y$

erit $x = y - 1$

$$x^2 = y^2 - 2y + 1$$
$$x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$
$$-23x = \quad -23y + 23$$
$$-70 = \quad -70$$
$$\overline{y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0.}$$

Habetur hic æquatio completa, in qua $y = x + 1$.

SCHOLION.

342. *Idem problema solvi potest radicem æquationis quantitate data minuendo: sed cum hac ratione metuendum sit, ne radices veræ in falsas mutentur (§. 334), consultius est, ut radicem æquationis augeamus.*

PROBLEMA 160.

343. *Secundum terminum ex æquatione tollere.*

Sit in æquatione $x^3 \mp px^2 - qx + r = 0$ tollendus secundus terminus px^2.

Fiat $t + x = y$

erit $x = y - t$

$$x^2 = y^2 - 2ty + t^2$$
$$x^3 = y^3 - 3ty^2 + 3t^2y - t^3$$
$$\mp px^2 = \quad \mp py^2 \pm 2pty \mp pt^2$$
$$-qx = \quad -qy + qt$$
$$+r = \quad +r$$

Ut secundus terminus tollatur, fieri debet

$$-3t \mp p = 0$$

Unde erit $t = \mp \frac{1}{3}p$

Hoc est $t = + \frac{1}{3}p$ si in æquatione sit $x^3 + px^2$ &c. at vero $t = - \frac{1}{3}p$ si habeatur $x^3 - px^2$ &c.

Et in genere, si fuerit $x^m \mp px^{m-1}$ &c. & fiat $x = y - t$; erit

$$x^m = y^m - mty^{m-1} \text{ &c.}$$
$$\mp px^{m-1} = \mp py^{m-1} \text{ &c.}$$

consequenter

$$-mt \mp p = 0$$

ideoque $t = \mp p : m$.

Hoc est $t = + p : m$ si fuerit $x^m + px^{m-1}$ &c. & $t = - p : m$ si fuerit $x^m - px^{m-1}$ &c. Unde patet

Regula: Si terminus secundus sit positivus, augeatur; si privativus, minuatur radix quantitate cognita secundi termini per exponentem primi divisa.

Sit e. gr. ex æquatione $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ tollendus terminus secundus.

Fiat

Fiat $x - 8:3 = y$

erit $x = y + 8:3$

$$x^2 = y^2 + 16y:3 + 64:9$$
$$x^3 = y^3 + 8y^2 + 64y:3 + 512:27$$
$$-8x^2 = -8y^2 - 128y:3 - 512:9$$
$$-x = \quad -y \quad -8:3$$
$$+8 = \quad +8$$
$$y^3 \; * \; -67y:3 - 880:27 = 0$$

In hac æquatione $y = x - 8:3$

COROLLARIUM I.

344. Quodsi ex æquatione quadratica affecta secundus terminus aufertur, ad puram reducitur, sicque ea alio adhuc modo resolvi potest. Sit e. gr. $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Fiat $x - 4 = y$

erit $x = y + 4$

$$x^2 = y^2 + 8y + 16$$
$$-8x = -8y - 32$$
$$+15 = \quad +15$$
$$y^2 - 1 = 0$$
$$y = 1$$

Consequenter $x = 1 + 4 = 5$.

COROLLARIUM 2.

345. Secundo termino sublato, æquationes cubicæ ad tres casus reducuntur. Nimirum

$$x^3 \; * \; -px - r = 0$$
$$x^3 \; * \; +px - r = 0$$
$$x^3 \; * \; -px + r = 0$$

PROBLEMA 161.

346. *Ex æquatione terminum tertium tollere.*

Si in æquatione $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$

Fiat $x = y - m$

erit $x^2 = y^2 - 2my + m^2$

$$x^3 = y^3 - 3my^2 + 3m^2y - m^3$$
$$-4x^2 = -4y^2 + 8my - 4m^2$$
$$+4x = \quad +4y - 4m$$
$$-6 = \quad -6$$

Quoniam æquatio sinistra dextræ æqualis; si tertius terminus deficere debet, talis assumendus est valor ipsius m, ut sit

$$3m^2 + 8m + 4 = 0$$

erit ergo $m^2 + \frac{8}{3}m = -\frac{4}{3}$

$$\frac{16}{9} \qquad \frac{16}{9}$$
$$m^2 + \frac{8}{3}m + \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$$
$$m + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$
$$m = -\frac{2}{3}$$

Fiat ergo $x = y + \frac{2}{3}$

erit $x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27}$$
$$-4x^2 = -4y^2 - \frac{16}{3}y - \frac{16}{9}$$
$$+4x = \quad +4y + \frac{8}{3}$$
$$-6 = \quad -6$$
$$y^3 - 2y^2 \; * \; -130:27 = 0$$

En æquationem, in qua terminus tertius deficit, & $y = x - \frac{2}{3}$.

SCHOLION.

347. *Eodem artificio in aliis quoque casibus utemur. Sed terminus quartus, quintus &c hac methodo tolli nequeunt, quia radices altiores extrahendæ forent.*

PROBLEMA 162.

348. *Ex æquatione terminum penultimum tollere, si secundus deficiat.*

Pro quantitate incognita substituendus est terminus ultimus per y divisus.

Sit e. gr. in æquatione $x^3 - 3x + 1 = 0$ tollendus terminus penultimus $-3x$. Fiat $x = 1:y$

erit $x^3 = \frac{1}{y^3}$

$$-3x = -\frac{3}{y}$$
$$+1 = +1$$
$$1 - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3} = 0$$
$$y^3 - 3y^2 + 1 = 0$$

PRO-

PROBLEMA 163.

349. ***Æquationem datam a fractionibus liberare.***

Radix multiplicetur per factum ex omnibus denominatoribus fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

EXEMPLA.

$$\begin{array}{l} y^3 \; * - \frac{67}{3}y - \frac{220}{27} = 0 \\ 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \\ \hline x^3 \; * - 201x - 880 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $x = 3y$.

$$\begin{array}{l} x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - 64 = 0 \\ 1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728 \\ \hline y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = 12x$.

PROBLEMA 164.

350. ***Æquationem datam ab irrationalitate liberare.***

Interdum id fieri potest per multiplicationem; interdum per divisionem radicis. Neutra tamen regula universalis est.

Si radix fuerit quadrata, quæ tolli debet, radix æquationis multiplicatur per ipsam; si vero cubica aut altior quædam, per radicem cubicam ex quadrato quantitatis sub signo radicali tollendæ positæ, aut in genere per radicem ejusdem gradus, quæ tolli debet, sed ex quantitate sub signo radicali tollendæ posita ad gradum proxime inferiorem elevata. Si vero æquatio per divisionem liberanda sit ab irrationalitate; radix æquationis semper per ipsam radicem, quæ tolli debet, dividitur. Interdum circumstantiæ singulares aliud suadent.

EXEMPLA.

$$\begin{array}{l} x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0 \\ 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4 \\ \hline y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = x\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0 \\ 1 \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{16} \quad 4 \\ \hline y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4a^2b = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = x\sqrt[3]{4}$

Divisio exemplis rectius quam regulis docetur.

$$\begin{array}{l} x^3 - 3x^2\sqrt{3} \; * - 6\sqrt{3} = 0 \\ 1 \quad \sqrt{3} \quad 3 \quad 3\sqrt{3} \\ \hline y^3 - 3y^2 \; * - 2 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt{3}$

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0 \\ 1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2 \\ \hline y^3 \quad ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}a^2b = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt[3]{2}$.

$$\begin{array}{l} x^3 - x^2\sqrt{2} + 3\tfrac{1}{2}x - 3\sqrt{2} = 0 \\ 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2} \\ \hline y^3 - y^2 + \frac{7}{4}y - \frac{1}{2} = 0 \end{array}$$

Quodsi ulterius fractiones tollere volueris; multiplicatio fieri debet per 2.

$$\begin{array}{l} y^3 - y^2 + \frac{7}{4}y - \frac{1}{2} = 0 \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \\ \hline z^3 - 2z^2 + 7z - 12 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $z = 2y = 2x : \sqrt{2}$.

PROBLEMA 165.

351. ***Invenire utrum æquatio data habeat radices rationales, nec ne, & si quas habet, quænam eæ sint.***

Cum æquationis terminus ultimus

sit

sit factum omnium radicum (§. 329), resolvatur is in suos factores & hi successive substituantur pro x in aequatione data: in quibus enim casibus numeri positivi & negativi se mutuo destruunt, in iis substitutus est valor ipsius x.

Sit e. gr. $x^2 - 6x + 8 = 0$. Terminus ultimus 8 factores habet 2 & 4. Ponatur $x = 2$; erit

$$\begin{array}{r} x^2 = 4 \\ -6x = -12 \\ +8 = +8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est ergo 2 radix vera aequationis. Fiat quoque $4 = x$; erit

$$\begin{array}{r} x^2 = 16 \\ -6x = -24 \\ +8 = +8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est ergo 4 radix altera vera aequationis.

Sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Factores termini ultimi 15 sunt 1, 3, 5.

Substituatur 1 pro x; erit

$$\begin{array}{r} x^3 = 1 \\ -3x^2 = -3 \\ -13x = -13 \\ +15 = +15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est ergo 1 una ex radicibus veris.

Substituatur porro 3 pro x; erit

$$\begin{array}{r} x^3 = 27 \\ -3x^2 = -27 \\ -13x = -39 \\ +15 = +15 \\ \hline 0 = -24 \end{array}$$

Est ergo 3 nulla ex radicibus veris.

Substituatur ergo -3 pro x; erit

$$\begin{array}{r} x^3 = -27 \\ -3x^2 = -27 \\ -13x = +39 \\ +15 = +15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est itaque -3 radix falsa aequationis.

Substituatur denique 5 pro x; erit

$$\begin{array}{r} x^3 = 125 \\ -3x^2 = -75 \\ -13x = -65 \\ +15 = +15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est ergo 5 radicum verarum altera.

ALITER.

Cum aequationes compositae ex multiplicatione simplicium oriantur (§. 329); si radix aliqua fuerit rationalis, aequatio per simplicem ex aliquo factore termini ultimi & x conflatam divisibilis sit necesse est. Quare divisio haec tentanda.

Sit data aequatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Factores termini ultimi sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12: unde aequationes simplices conflantur $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x + 6 = 0$, $x - 8 = 0$, $x + 8 = 0$, $x - 12 = 0$, $x + 12 = 0$. Divisio frustra tentatur per $x - 1$ & $x + 1$. Quare 1 nec radix falsa est, nec verarum una, succedit autem divisio per $x - 2$.

$$\begin{array}{lll} x-2) & x^3 - 3x^2 - 10x + 24 & (x^2 - x - 12 \\ & x^3 - 2x^2 & \\ \hline & -x^2 - 10x & \\ & -x^2 + 2x & \\ \hline & -12x + 24 & \\ & -12x + 24 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Est ideo 2 una ex radicibus veris; cumque terminus ultimus sit 12 in quotiente, 8 & 12 non sunt in numero radicum. Divisio aequationis quadraticae $x^2 - x - 12 = 0$ per $x - 3$ frustra tentatur: sed per $x + 3$ succedit.

$$\begin{array}{lll} x+3) & x^2 - x - 12 & (x - 4 \\ & x^2 + 3x & \\ \hline & -4x - 12 & \\ & -4x - 12 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Est ergo 3 radix falsa aequationis &, ob $x - 4 = 0$, 4 verarum altera.

Similiter sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$;

$= 0$; erunt factores termini ultimi, 1, 3, 5, consequenter divisores tentandi $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 5 = 0$. Tentetur divisio per $x - 1$.

$$\begin{array}{lllll} x-1) & x^3 - 3x^2 - 13x + 15 & (x^2 - 2x - 15 \\ & x^3 - x^2 & \\ \hline & -2x^2 - 13x & \\ & -2x^2 + 2x & \\ \hline & -15x + 15 & \\ & -15x + 15 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Est ergo 1 radicum verarum una. Divisio in æquatione quadratica per $x - 3$ non succedit: succedit tamen per $x + 3$.

$$\begin{array}{lll} x+3) & x^2 - 2x - 15 & (x - 5 \\ & x^2 + 3x & \\ \hline & -5x - 15 & \\ & -5x - 15 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Est itaque 3 radix falsa, &, ob $x - 5 = 0$, 5 verarum altera.

COROLLARIUM.

352. Ex modo allatis exemplis manifestum est, problema præsens hanc quoque admittere solutionem.

1. Numerus, quem radicem esse suspicamur, subducendus est ex coefficiente secundi termini.
2. Residuum multiplicandum est per illum ipsum numerum & factum ex coefficiente termini tertii subtrahendum.
3. Quod relinquitur, denuo per illum numerum multiplicetur; factum ex coefficiente termini quarti subtrahatur; & ita porro.

$$\begin{array}{rrrr} & x^3 - 3x^2 & -10x & +24 = 0 \\ & -2 & +2 & +24 \\ \hline & -1 & -12 & 0 \\ \text{Mult. per } -2) & & & \\ \hline & +2 & +24 & \end{array}$$

Quoniam 0 relinquitur, 2 est una radicum verarum.

$$\begin{array}{rrrr} & x^3 - 3x^2 & -13x & +15 = 0 \\ & -1 & +2 & +15 \\ \hline & -2 & -15 & 0 \\ \text{Mult. per } -1) & & & \\ \hline & +2 & +15 & \end{array}$$

Est ergo 1 altera radicum verarum.

SCHOLION.

353. *Ne radicum rationalium investigatio molesta accidat, consultum est, ut vel æquationem propositam in aliam transformemus, in qua terminus ultimus divisores pauciores habet, vel duos numeros investigemus, intra quos radices continentur: quem in finem sequentia subnectimus problemata.*

PROBLEMA 166.

354. *Æquationem propositam, in qua terminus ultimus plures admittit divisores, transformare in aliam, in qua terminus ultimus pauciores divisores habet.*

Fiat $x = 1$, vel $x = -1$, vel $x = 2$, vel $x = -2$, vel $x = 3$, vel $x = -3$, vel $x = 4$, vel $x = -4$ &c. &, his valoribus successive substitutis, observetur, quo in casu summa relinquat numerum pauciores factores habentem, quam terminus ultimus æquationis: eo enim numero radix æquationis vel augenda est, vel minuenda (§. 333).

Sit e. gr. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

$$\begin{array}{rl} \text{Fiat } x & = 1 \\ \hline \text{erit } x^3 & = 1 \\ -3x^2 & = -3 \\ -10x & = -10 \\ +24 & = +24 \\ \hline \text{Summa} & = +12 \end{array}$$

Cum 12 pauciores divisores admittat quam 24;

$$\begin{array}{rl} \text{Fiat } x & = y + 1 \\ \text{erit } x^2 & = y^2 + 2y + 1 \\ \hline x^3 & = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 & = \quad -3y^2 - 6y - 3 \\ -10x & = \quad\quad -10y - 10 \\ +24 & = \quad\quad\quad +24 \\ \hline & y^3 \; * \; -13y + 12 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione est $y = x - 1$.

SCHOLION.

355. *Eadem æquatio* $y^3 * - 13y + 12 = 0$ *habet radicem falsam* -4. *Si enim hunc valorem pro* y *substituas, prodibit* $-64 + 52 + 12 = 0$. *Ergo* $x = y + 1 = -3$. *Reperitur ideo* -3 *radix falsa æquationis propositæ* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *prorsus ut supra* (§. 351).

PROBLEMA 167.

356. ***Invenire limites æquationis, hoc est, duas quantitates, intra quas radix continetur.***

Sit $x^2 + px - q = 0$

erit $x^2 + px = q$

$px < q$ (§. 84 *Arith.*)

$x < q:p$ (§. 182 *Arith.*)

Similiter ob $x^2 + px = q$

$q > x^2$ (§. 84 *Arith.*)

$\sqrt{q} > x$ (§. 246. 180 *Arith.*)

$x\sqrt{q} > x^2$ (§. 180 *Arith.*)

$px \quad px$ Add.

$x\sqrt{q} + px > x^2 + px$ (§. 90 *Arith.*)

ideoque $(\sqrt{q} + p)x > q$ (89 *Arith.*)

$x > q:(\sqrt{q} + p)$ (§. 182 *Arith.*)

Sunt ideo limites æquationis $q:p$ & $q:(\sqrt{q} + p)$. Nempe radix minor esse debet quam $q:p$ & major quam $q:(\sqrt{q} + p)$.

Sit $x^2 - px + q = 0$

erit $x^2 + q = px$

$x^2 < px$

$x < p$

Similiter quia $x^2 = px - q$, ideoque differentia inter px & q positiva, erit

$px > q$

$x > q:p$

Sunt ideo limites æquationis p & $q:p$. Nempe radix minor est quam p & major quam $q:p$.

Sit $x^2 - px - q = 0$

erit $x^2 = px + q$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

$x\sqrt{q} > q$

Ergo $px + x\sqrt{q} > px + q$

hoc est, $px + q < px + x\sqrt{q}$

ideoque $x^2 < px + x\sqrt{q}$

$x < p + \sqrt{q}$

Similiter $x^2 > px$

$x > p$

$px > p^2$

$px + q > p^2 + q$

$x^2 > p^2 + q$

$x > \sqrt{(p^2 + q)}$

Sunt ideo limites $p + \sqrt{q}$ & $\sqrt{(p^2 + q)}$. Nimirum radix minor esse debet quam $p + \sqrt{q}$; sed major quam $\sqrt{(p^2 + q)}$.

Sit $x^3 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = qx$

Ergo $qx > r$

$x > r:q$

Similiter $x^3 < qx$

$x^2 < q$

$x < \sqrt{q}$

Sunt ideo limites $r:q$ & $\sqrt{q}$.

Sit $x^3 + qx - r = 0$

erit $x^3 + qx = r$

$qx < r$

$x < r:q$

Simi-

Similiter $r > x^3$

$r^{1:3} > x$

$\sqrt[3]{r^2} > x^2$

$xr^{2:3} > x^3$

$xr^{2:3} + qx > x^3 + qx$

$xr^{2:3} + qx > r$

$x > r:(r^{2:3} + q)$

Sunt ideo limites $r:q$, & $r:(r^{2:3} + q)$.

Sit $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

erit $x^3 - px^2 = r - qx$

Quodsi ergo $x > p$; erit quoque $r > qx$, consequenter $x < r:q$. Sed si $p > x$; erit $qx > r$, consequenter $x > r:q$.

In utroque igitur casu limites sunt p & $r:q$.

Sit $x^3 - px^2 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = px^2 + qx$

$px^2 + qx > r$

$x^2 + qx:p > r:p$

$x^2 + qx:p + q^2:4p^2 > r:p + q^2:4p^2$

$x + q:2p > \sqrt{(r:p + q^2:4p^2)}$

$x > \sqrt{(r:p + q^2:4p^2)} - q:2p$

Similiter $px^2 + qx > x^3$

$px + q > x^2$

$q > x^2 - px$

$q + \frac{1}{4}p^2 > x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$

$\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} > x - \frac{1}{2}p$

$x < \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{2}p$

Sunt ideo limites $\sqrt{(r:p + q^2:4p^2)} - q:2p$ & $\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{2}p$.

Sit $x^4 - qx^2 - rx - s = 0$

erit $x^4 - qx^2 = rx + s$

Ergo $x^4 > qx^2$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

Similiter $x^4 - rx = qx^2 + s$

Ergo $x^3 > r$

$x > r^{1:3}$

Tandem $x^4 - s = qx^2 + rx$

Ergo $x^4 > s$

$x > s^{1:4}$

$x^3 > s^{3:4}$

$x^3 s^{1:4} > s$

Similiter $x > q^{1:2}$ $\qquad$ $x > r^{1:3}$

$xq^{1:2} > q$ $\qquad$ $x^2 > r^{2:3}$

$x^3 q^{1:2} > qx^2$ $\qquad$ $x^2 r^{1:3} > r$

$x^3 r^{1:3} > rx$

Ergo ob $x^4 = qx^2 + rx + s$

$x^4 < x^3 q^{1:2} + x^3 r^{1:3} + x^3 s^{1:4}$

$x < q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$

Sunt ideo limites $\sqrt{q}$ vel $r^{1:3}$ & $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

Scholion.

357. *In æquatione* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *factores termini ultimi sunt* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. *Limites reperiuntur* $\sqrt{(\frac{24}{3} + \frac{100}{36})} - \frac{10}{6} = \sqrt{\frac{97}{9}} - \frac{5}{3}$, *seu* (*ob* $\sqrt{97} = \frac{49}{5}$ *fere, consequenter* $\sqrt{\frac{97}{9}} = \frac{49}{5 \cdot 3} = \frac{49}{15}$, & $\frac{5}{3} = \frac{25}{15}$), $= \frac{49}{15} - \frac{25}{15} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$, & $\sqrt{(10 + \frac{9}{4})} + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{49}{4}} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$. *Maxima igitur radicum non potest esse minor quam* $1\frac{3}{5}$, *debet tamen esse minor quam* 5. *Unde apparet divisionem tentandam esse per* $x - 2$. *Quo facto reperitur* $x = 2$ & *æquatio reducitur ad quadraticam* $x^2 - x - 12 = 0$ (§. 351). *Unde radix vera altera* $= \frac{1}{2} + \sqrt{(12 + \frac{1}{4})} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (§. 143), & *radix*

& radix falsa $= \frac{3}{2} - \sqrt{(18 + \frac{9}{4})} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{6}{2} = -3$.

PROBLEMA 168.

358. *Ex æquatione cubica radicem extrahere.*

Æquationes cubicæ, sublato secundo termino, ad hos tres casus reducantur (§. 345).

$$x^3 = +px + q$$
$$x^3 = -px + q$$
$$x^3 = +px - q$$

Fiat $x = y + z$

erit $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$3y^2z + 3yz^2 = 3zy(y + z) = 3zyx$

Quamobrem in casu primo

$$y^3 + 3zyx + z^3 = px + q.$$
$$y^3 + 3zyx + z^3 - px - q = 0$$

Porro æquentur nihilo termini in quibus reperitur x, eritque

I. $3zyx - px = 0$. II. $y^3 + z^3 - q = 0$

$3zy = p$ $\qquad$ $y^3 + z^3 = q$.

$3y$ Divid.

$$z = p : 3y$$
$$z^3 = p^3 : 27y^3$$

Ergo $y^3 + p^3 : 27y^3 = q$

$$y^6 + \tfrac{1}{27}p^3 = qy^3$$
$$y^6 - qy^3 = -\tfrac{1}{27}p^3$$
$$\tfrac{1}{4}q^2 \qquad \tfrac{1}{4}q^2$$
$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}q^2 = \tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3$$
$$\left.\begin{matrix} y^3 - \frac{1}{2}q \\ \frac{1}{2}q - y^3 \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$
$$y^3 = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$
$$y = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})}$$

Est nempe $y = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$

& $z = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Ergo $y + z = x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Eodem modo reperitur radix in casu altero $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$.

Denique in casu tertio $x = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

E. gr. Sit $x^3 = 6x + 40$; erit $p = 6$, $q = 40$, ideoque $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}q^2 = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$, consequenter $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 = 392$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{392} = \sqrt{2 \cdot 196} = 14\sqrt{2}$. Unde $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)} = 20 + 14\sqrt{2}$, & $\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)} = 20 - 14\sqrt{2}$, ideoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = 2 + \sqrt{2}$, & $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = 2 - \sqrt{2}$. Quare per regulam primam $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

Sit $x^3 = -3x + 36$. Quia $p = 3$, $q = 36$, ideoque $\frac{1}{2}q = 18$, $\frac{1}{4}q^2 = 324$, $\frac{1}{3}p = 1$, $\frac{1}{27}p^3 = 1$, consequenter $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 325 = \frac{1300}{4}$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = 10\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$. Unde $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = 18 + \frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$, & $\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = 18 - \frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$, ideoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} = \frac{3}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}}$, & $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} = \frac{3}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}}$. Quare per regulam secundam $x = \frac{3}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}} + \frac{3}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}} = 3$.

Sit $x^3 = 6x - 40$. Quoniam $p = 6$, $q = 40$, eodem modo, quo in casu primo, reperitur $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = -2 + \sqrt{2}$, & $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = -2 - \sqrt{2}$, ideoque $x = -2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = -4$.

SCHOLION.

359. *Equidem ex* $20 + \sqrt{392}$ *radix cubica extrahitur per regulas communes* (§. 282 *Arith.*): *ut tamen appareat, quomodo radix inveniri possit, si regulæ communes commode applicari nequeant, methodum generalem apponere libet, qua in aliis casibus similibus utendum. Ceterum formulas illas extrahendi radicem ex æquatione cubica* (§. 358) *Cardani regulas vocat* Cartesius (a), *quia eas primus publicavit: ipse enim* Cardanus *inventionis laudem* Scipioni Ferreo *tribuit.*

PRO-

(a) Geom. lib. 3. p. m. 93 & 94.

PROBLEMA 169.

360. *Extrahere radicem desideratam ex quantitate irrationali composita.*

Sit ex binomio $3 + \sqrt{8}$ extrahenda radix quadrata. Ponamus eam esse $x + \sqrt{y}$, erit $x^2 + 2x\sqrt{y} + y = 3 + \sqrt{8}$.

Fiat $x^2 + y = 3$ $\quad 2x\sqrt{y} = \sqrt{8}$

erit $x^4 + 2x^2y + y^2 = 9$ $\quad 4x^2y = 8$

$$4x^2y = 8$$
$$x^4 - 2x^2y + y^2 = 1$$
$$x^2 - y = 1$$
$$x^2 = y + 1$$

Est vero etiam, ob $x^2 + y = 3$, $x^2 = 3 - y$.

Quare $3 - y = y + 1$
$$3 = 2y + 1$$
$$2 = 2y$$
$$1 = y$$

Ergo $x^2 = y + 1 = 2$
$$x = \sqrt{2}$$

Est ergo $x + \sqrt{y} = \sqrt{(3 + \sqrt{8})} = 1 + \sqrt{2}$.

Sit similiter in problemate præcedente ex $20 + \sqrt{392}$ extrahenda radix cubica. Ponamus radicem esse $x + \sqrt{y}$, erit ejus cubus

$$x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + \sqrt{y^3} = 20 + \sqrt{392}$$

Fiat $3x^2\sqrt{y} + \sqrt{y^3} = \sqrt{392}$

erit $9x^4y + 6x^2y^2 + y^3 = 392$

Porro $x^3 + 3xy = 20$

$$x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 = 400$$
$$9x^4y + 6x^2y^2 + y^3 = 392 \text{ Subtr.}$$
$$x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3 = 8$$
$$x^2 - y = 2$$
$$x^2 - 2 = y$$

Substituto valore ipsius y in æquatione

$$x^3 + 3xy = 20$$

erit $x^3 + 3x^3 - 6x = 20$

hoc est, $4x^3 - 6x = 20$

$$x^3 \; * \; - \tfrac{3}{2}x = 5$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad (\S. 337)$$
$$z^3 \; * \; - 6z = 40$$

Si pro z substituatur 4; erit $64 - 24 = 40$. Est ergo 4 radix hujus æquationis (§. 351), consequenter $x = z : 2 = 2$. Quare cum sit

$x^2 - 2 = y$

erit $4 - 2 = y$
$$2 = y$$

Est ergo radix cubica ex $20 + \sqrt{392}$ extracta, $2 + \sqrt{2}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

PROBLEMA 170.

361. *Æquationem biquadraticam, in qua secundus terminus deficit, reducere ad cubicam.*

Sit æquatio biquadratica $x^4 + qx^2 + rx + f = 0$, ubi retinetur in omnibus terminis signum +, ut omnes casus repræsententur. Cum æquatio biquadratica ex multiplicatione duarum quadraticarum oriatur (§. 329); assumantur duæ quadraticæ $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$, quæ in se invicem ductæ generabunt

$$\begin{aligned} x^4 \; * \; + zx^2 + yvx + vz &= 0 \\ + vx^2 - yzx & \\ - y^2x^2 & \end{aligned}$$

Quoniam hæc æquatio eadem supponitur cum proposita; erit

$z + v$

$z + v - y^2 = q$ $\quad$ $yv - yz = r$ $\quad$ $vz = f$

$q + y^2 = z + v$ $\quad$ $v - z = r : y$

$q + y^2 - v = z$ $\quad$ $v - q - y^2 + v = r : y$

$2v = q + y^2 + r : y$

$v = \frac{q + y^2 + r : y}{2}$

Substituatur valor ipsius v in æquatione $q + y^2 - v = z$, erit

$\frac{2q + 2y^2 - q - y^2 - r : y}{2} = z$, hoc est,

$\frac{q + y^2 - r : y}{2} = z$

Ergo $vz = \left(\frac{q + y^2 + r : y}{2}\right)\left(\frac{q + y^2 - r : y}{2}\right)$

$= \frac{q^2 + 2qy^2 + y^4 - r^2 : y^2}{4} = f$

$4y^2$ Mult.

$q^2y^2 + 2qy^4 + y^6 - r^2 = 4fy^2$

$y^6 + 2qy^4 + q^2y^2 - r^2 = 0$
$\quad - 4fy^2$

Fiat $y^2 = t$, erit
$t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0$
$\quad - 4ft$

PROBLEMA 171.

362. ***Ex æquatione biquadratica radicem extrahere.***

I. Si æquatio fuerit pura, e gr. $x^4 = a^2bc$; extrahatur primum radix quadrata, ut habeatur $x^2 = a\sqrt{bc}$, & hinc denuo educatur radix quadrata. Reperietur $x = \sqrt{(a\sqrt{bc})}$.

E. gr. Sit $x^4 = 32$; erit $x^2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, ideoque $x = 2\sqrt{\sqrt{2}}$.

II. Si æquatio fuerit affecta;

1. Tollatur secundus terminus, si adfuerit (§. 343).
2. Reducatur æquatio ad cubicam (§. 361).
3. Inde extrahatur radix cubica (§. 358).
4. Hac data ex æquationibus, quarum ope biquadraticam ad cubicam reduximus, radices æquationis propositæ erui possunt.

E. gr. Sit $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$; erit $q = -86$, $r = 600$, $f = -851$. Jam cum æquatio cubica, ad quam ea reducenda, sit $t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0$
$\quad - 4ft$
si in ea substituantur valores quantitatum q, r, f, prodibit

$t^3 - 172t^2 + 10800t - 360000 = 0$.

Hæc æquatio cum sit per $t - 100$ divisibilis (§. 351); erit $t = 100$, ideoque in problemate præcedente $y^2 = 100$, & hinc $y = 10$.

Hoc valore substituto in æquatione $\frac{q + y^2 - r : y}{2} = z$, reperitur $z = \frac{-86 + 100 - 600 : 10}{2} = -\frac{46}{2} = -23$.

Eodem valore ipsius y substituto in æquatione $v = \frac{q + v^2 + r : y}{2}$, invenitur $v = \frac{-86 + 100 + 600 : 10}{2} = \frac{74}{2} = 37$.

Tandem valores quantitatum y, z & v substituendi sunt in æquationibus quadraticis $x^2 + yx + z = 0$, & $x^2 - yx + v = 0$ & habebimus

I. $x^2 + 10x - 23 = 0$

$x^2 + 10x = 23$

$\quad 25 \quad 25$

$x^2 + 10 + 25 = 48$

$x + 5 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$x = 4\sqrt{3} - 5$

II. $x^2 - 10x + 37 = 0$

$x^2 - 10x = -37$

$\quad 25 \quad 25$

$x^2 - 10x + 25 = -12$

$\left.\begin{matrix} x - 5 \\ 5 - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{-12} = 2\sqrt{-3}$

$x = 5 \pm 2\sqrt{-3}$

Sunt

Sunt ergo radices æquationis propositæ $4\sqrt{3} - 5, 5 + 2\sqrt{-3}$ & $5 - 2\sqrt{-3}$.

PROBLEMA 172.

363. ***Ex æquatione quacunque extrahere radicem per approximationem.***

Quamvis æquationum quadraticarum radices surdæ extrahi possint (§. 143), nec difficile sit inde ulterius radicem prope veram in fractionibus decimalibus elicere (§. 273 *Arith.*): quoniam tamen methodus, quam nunc explicare intendimus, universalis est, ab exemplo facillimo æquationis quadraticæ ut ordiamur, consultum ducimus.

Sit $x^2 - 5x - 31 = 0$. Quoniam $x < 5 + \sqrt{31}$ & $> \sqrt{56}$, sive $x < 10 +$ & $> 7 +$ (§. 356): ponamus radicem esse $8 + y$, ita ut y denotet fractionem, qua numerus assumtus radicem vel excedit, vel ab ea deficit: erit

$$x^2 = 64 + 16y + y^2$$
$$-5x = -40 - 5y$$
$$-31 = -31$$
$$\overline{-7 + 11y + y^2 = 0}$$

Quoniam fractionum potentiæ continuo decrescunt & radix tantum desideratur prope vera, y^2 abjicitur: quo facto erit

$$-7 + 11y = 0$$
$$\overline{y = \tfrac{7}{11} = \tfrac{6}{10} \text{ fere} = 0.6}$$

Ergo $x = 8 + 0.6 = 8.6$

Ponamus $x = 8.6 + y$, erit

$$x^2 = \tfrac{7396}{100} + \tfrac{172}{10}y + y^2$$
$$-5x = -\tfrac{430}{10} - 5y$$
$$-31 = -31$$
$$\overline{\tfrac{7396}{100} - \tfrac{430}{10} - 31 + \tfrac{172}{10}y - 5y = 0}$$

hoc est, reductione ad eandem denominationem facta, (quod in gratiam tironum semel hic exhibere placuit)

$$\overline{73.96 - 43.00 - 31.00 + (17.20 - 5.00)y = 0}$$
$$-0.04 + 12.20y = 0$$
$$\overline{12.20y = 0.04}$$
$$\overline{y = 0.04 : 12.20 = 0.0032}$$

Ergo $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032$

Ponamus $x = 8.6032 + y$, erit

$$x^2 = 74.01505024 + 17.20640000y + y^2$$
$$-5x = -43.01600000 - 5.00000000y$$
$$-31 = -31.00000000$$
$$\overline{-0.00094976 + 12.20640000y = 0}$$
$$\overline{y = 0.00094976 : 12.20640000}$$
$$= 0.000077808.$$

Ergo $x = 8.603200000 + 0.000077808 = 8.603277808$.

Sit similiter ex æquatione cubica $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ extrahenda radix per approximationem. Ponamus denuo radicem esse $5 + y$ (numerus 5 assumitur vi limitum æquationis (§. 356): quoniam termini, in quibus est y^2 & y^3, omittuntur; non opus est, ut in transformatione æquationis exprimantur. Reperitur ideo

$$x^3 = 125 + 75y \ldots.$$
$$+2x^2 = 50 + 20y \ldots.$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = -70$$
$$\overline{-10 + 72y = 0}$$
$$\overline{y = \tfrac{10}{72} = 0.1}$$

Ergo $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Ponamus $x = 5.1 + y$; erit

$$x^3 = 132.651 + 78.030y \ldots$$
$$+ 2x^2 = 52.020 + 20.400y \ldots$$
$$- 23x = - 117.300 - 23.000y$$
$$- 70 = - 70.000$$
$$- 2.629 + 75.430y = 0$$
$$75.430y = 2.629$$
$$y = 2.629 : 75.430 = 0.0348$$

Ergo $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$.

Eodem modo progredi licet, quousque libuerit.

Nec difficile est eadem methodo regulam generalem investigare. Sit nempe $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + ex^{m-5}$ &c. $+ f = 0$. Ponamus esse $x = t + y$; erit

$$x^m = t^m + mt^{m-1}y + \frac{m \cdot m-1}{2} t^{m-2}y^2 \ldots$$
$$+ ax^{m-1} = at^{m-1} + (m-1)at^{m-2}y + \frac{m-1 \cdot m-2}{2} at^{m-3}y^2 \ldots$$
$$+ bx^{m-2} = bt^{m-2} + (m-2)bt^{m-3}y + \frac{m-2 \cdot m-3}{2} bt^{m-4}y^2 \ldots$$
$$+ cx^{m-3} = ct^{m-3} + (m-3)ct^{m-4}y + \frac{m-3 \cdot m-4}{2} ct^{m-5}y^2 \ldots$$

&c. &c.

$$+ f = + f$$

Fiat $t^m + at^{m-1} + bt^{m-2} + ct^{m-3}$ &c. $= p$

$mt^{m-1} + (m-1)at^{m-2} + (m-2)bt^{m-3} + (m-3)ct^{m-4}$ &c. $= q$

$\frac{m \cdot m-1}{2} t^{m-2} + \frac{m-1 \cdot m-2}{2} at^{m-3} + \frac{m-2 \cdot m-3}{2} bt^{m-4} + \frac{m-3 \cdot m-4}{2} ct^{m-5}$ &c. $= r$

Quoniam termini, in quibus y ad plures dimensiones ascendit, ob parvitatem abjiciuntur, erit

$$p + qy + ry^2 = 0$$

Fiat ut in exemplis specialibus

$$p + qy = 0$$

erit $qy = - p$

$$y = - p : q$$

In applicatione regulæ hujus generalis eadem calculi instauratione opus est, qua in exemplis specialibus paulo ante usi sumus.

Quodsi vero regula desideretur, quæ celerius appropinquat; ex æquatione prima hunc in modum eruitur.

Quoniam $p + qy + ry^2 = 0$

erit $qy + ry^2 = - p$

$y = - p : (q + ry)$ $q + ry$ Divid

Sed $y = - p : q$ per regulam priorem.

Ergo $y = - p : (q - \frac{pr}{q}) = - pq : (q^2 - pr)$.

Vel quia $p + qy + ry^2 = 0$

erit $qy + ry^2 = - p$

$$qy : r + y^2 = - p : r$$
$$q^2 : 4r^2 + qy : r + y^2 = q^2 : 4r^2 - p : r$$
$$q : 2r + y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - pr) : r}$$
$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - pr) : r} - q : 2r$$

Habetur ideo x, si valor ipsius y adjiciatur valori t, signo vel positivo vel privativo prout repertus fuerit.

SCHOLION.

364. *Duas regulas posteriores methodo ab hac diversa investigavit celeberrimus* Hallejus (a), *& eandem aliquot exemplis illustravit. Quamvis vero usus earum ex ante allatis exemplis manifestum esse videatur; non inconsultum tamen judicamus, ut unum apponamus.*

Sit

(a) In Transact. Anglican. n. 210. p. 136.

Sit $x^3 + 438x^2 - 7825x - 98508430 = 0$.
$\qquad\qquad a \qquad\qquad b \qquad\qquad f$

Fiat $x = s + y = 300 + y$; erit

$$x^3 = 27000000 + 2700000y + 900y^2 + y^3$$
$$+ax^2 = 39420000 + 262800y + 438y^2$$
$$-bx = -2347500 - 7825y$$
$$-f = -98508430$$

$$-34435930 + 524975y + 1338y^2 = 0$$

Est itaque $p = -34435930$, ideoque $-p = 34435930$, $q = 524975$, $r = 1338$. Quare $y = -p:(q - pr:q) = 34435930:(524975 + 46075274340:524975) = 34435930:612741 = 56$, consequenter $x = 300 + 56 = 356$.

Fiat jam $x = 356 + y$; erit

$$x^3 = 45118016 + 380208y + 1068y^2 + y^3$$
$$+ax^2 = 55510368 + 311856y + 438y^2$$
$$-bx = -2785700 - 7825y$$
$$-f = -98508430$$

$$-665746 + 684239y + 1506y^2 = 0.$$

Est itaque $p = -665746$, $q = 684239$, $r = 1506$. Quare $y = -p:(q - pr:q) = 665746:(684239 + 1002613476:684239) = 665746:685704 = 0.9708$, consequenter $x = 356 + 0.9708 = 356.9708$.

Per regulam irrationalem radix in pluribus notis per duas operationes inveniri potest, quia rationali accuratior. Possunt quoque plures notæ inveniri per rationalem, si operatio continuetur.

COROLLARIUM.

365. Si $x^m - f = 0$ & fiat $x = s + y$; erit $x^m - f = s^m + ms^{m-1}y + \frac{m.m-1}{2}s^{m-2}y^2$ &c. $-f$. Unde si fiat $s^m + ms^{m-1}y - f = 0$; erit $y = (f - s^m):ms^{m-1}$.

Quæ est regula per approximationem extrahendi radicem ex quavis æquatione pura. Si accuratior desideretur, fiat ut ante $s^m = p$, $ms^{m-1} = q$, $\frac{m \cdot m-1}{2}s^{m-2} = r$; reperietur ut in problemate $y = -p:(q - pr:q)$. Unde apparet, eandem regulam inservire radicum extractioni tum ex æquationibus puris, tum ex affectis.

PROBLEMA 173.

366. *Ex serie infinita radicem extrahere.*

Sit $v = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$ &c.

Fiat $x = bv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. erit (§. 95)

$$x^2 = b^2v^2 + 2biv^3 + i^2v^4 + 2ikv^5 + k^2v^6$$
$$+ 2bkv^4 + 2blv^5 + 2ilv^6$$
$$+ 2bmv^6$$
$$x^3 = b^3v^3 + 3b^2iv^4 + 3bi^2v^5 + i^3v^6$$
$$+ 3b^2kv^5 + 3b^2lv^6$$
$$+ 6bikv^6$$
$$x^4 = b^4v^4 + 4b^3iv^5 + 6b^2i^2v^6$$
$$+ 4b^3kv^6$$
$$x^5 = b^5v^5 + 5b^4iv^6$$
$$x^6 = b^6v^6$$

Substituantur valores modo inventi in æquatione $0 = -u + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. erit

$-v =$	$-v$						
$+ax =$	$+abv$	$+aiv^2$	$+akv^3$	$+alv^4$	$+amv^5$	$+anv^6$	&c.
$+bx^2 =$		$+bb$..	$+2bbi$..	$+2bbk$..	$+2bbl$..	$+2bil$..	
				$+bi^2$..	$+2bik$..	$+bk^2$..	
						$+2bbm$..	
$+cx^3 =$			$+cb^3$..	$+3cb^2i$..	$+3cbi^2$..	$+ci^3$..	
					$+3cb^2k$..	$+3cb^2l$..	
						$+6cbik$..	
$+dx^4 =$				$+db^4$..	$+4db^3i$..	$+6db^2i^2$..	
						$+4db^3k$..	
$+ex^5 =$					$+eb^5$..	$+5eb^4i$..	
$+fx^6 =$						$+fb^6$	

Jam cum æquatio ponatur nihilo æqualis, propterea quod v subducitur ex altero æquationis membro ipsi æquali; omnes terminos v, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6 &c. in nihilum ductos concipere licet.

Fiat ergo in hac æquatione cujuslibet termini coefficiens nihilo æqualis, erit

$$ab - 1 = 0 \qquad\qquad ai + bb^2 = 0$$
$$b = 1 : a \qquad\qquad i = -bb^2 : a$$
$$i = -b : a^3$$

$$ak + 2bbi + cb^3 = 0$$
$$k = (-2bbi - cb^3) : a$$
$$k = (2b^2 - ac) : a^5$$

$$al + bi^2 + 2bbk + 3cb^2 i + db^4 = 0$$
$$l = (-bi^2 - 2bbk - 3cb^2 i - db^4) : a$$

consequenter ob

$$bi^2 = b^3 : a^6$$
$$2bbk = (4b^3 - 2abc) : a^6$$
$$3cb^2 i = -3bc : a^5$$
$$db^4 = d : a^4$$

erit

$$l = -b^3 : a^7 - 4b^3 : a^7 + 2abc : a^7 + 3bc : a^6 - d : a^5$$
$$l = (5abc - 5b^3 - a^2 d) : a^7$$
$$am + 2bik + 2bbl + 3cbi^2 + 3cb^2 k + 4db^3 i + eb^5 = 0$$

Ergo ob

$$2bik = (-4b^4 + 2ab^2 c) : a^8$$
$$2bbl = (10ab^2 c - 10b^4 - 2a^2 bd) : a^8$$
$$3cbi^2 = 3b^2 c : a^7$$
$$3cb^2 k = (6b^2 c - 3ac^2) : a^7$$
$$4db^3 i = -4bd : a^6$$
$$eb^5 = e : a^5$$

erit

$$m = (14b^4 - 21ab^2 c + 6a^2 bd + 3a^2 c^2 - a^3 e) : a^9$$

Eodem modo reperitur $n = (-42b^5 + 84ab^3 c - 28a^2 bc^2 - 28a^2 b^2 d + 7a^3 cd + 7a^3 be - a^4 f) : a^{11}$ & ita porro.

Quodsi tandem in æquatione assumta $x = bv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. valores inventi coefficientium b, i, k, l, m, n &c. substituantur; prodibit radix quæsita

$$x = \frac{v}{a} - \frac{bv^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2 d}{a^7}v^4 + \frac{14b^4 + 6a^2 bd - 21ab^2 c + 3a^2 c^2 - a^3 e}{a^9}v^5$$

&c. in infinitum.



CAPUT

CAPUT VI.

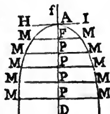
De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicata.

DEFINITIO 20.

367. Per *Geometriam sublimiorem* intelligo eam Geometriæ partem, quæ de lineis curvis & solidis inde genitis tractat.

DEFINITIO 21.

368. *Diameter* curvæ est recta AD rectas MM inter se parallelas bifariam secãs in P. In specie *Axis* vocatur, si rectas æquidistantes ad angulos rectos secet.

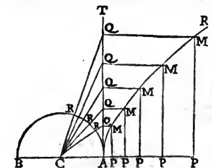


DEFINITIO 22.

369. *Vertex curvæ* est punctum A, ex quo ducitur diameter.

DEFINITIO 23.

370. *Ordinatæ vel ordinatim applicatæ* (*Vid. Fig. præc.*) sunt lineæ æquidistantes MM, quæ a diametro bifariam secantur. Earum dimidiæ PM vocantur *semiordinatæ*. Vocantur etiam *Semiordinatæ* lineæ QM, QM ex punctis curvæ M, M ad lineam AT positione datam ductæ ac inter se parallelæ.



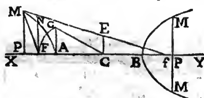
DEFINITIO 24.

371. *Abscissa* AP (*Vid. Fig. §. 368*) est pars diametri vel alterius lineæ, ad quam curva refertur, inter verticem aut aliud punctum fixum & semiordinatam PM intercepta. Quidam *Sagittam* vocant.

SCHOLION.

372. *Abscissa nimirum a quovis puncto in linea positione data computari possunt, ad quam referuntur puncta curvæ, quemadmodum ex sequentibus patebit.*

DEFINITIO 25.



373. *Diameter transversa* AB est recta, quæ utrinque intra curvas continuata rectas intra easdem æquidistantes MM bifariam secat.

DEFINITIO 26.

374. *Diameter conjugata* est recta, quæ alteri diametro æquidistantes bifariam secat.

DEFINITIO 27.

375. *Quantitates variabiles* sunt, quæ crescentibus aliis vel decrescentibus aut crescunt, aut decrescunt.

E. gr.

E. gr. Semiordinata PM & abscissa AP circuli sunt quantitates variabiles: una enim crescente crescit etiam altera.

Quantitates constantes sunt, quæ crescentibus aliis vel decrescentibus eædem manent.

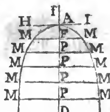
Ita semidiameter circuli AC est quantitas constans: crescentibus enim abscissis & semiordinatis AP & PM semper eadem manet.

HYPOTHESIS 8.

376. *Quantitates constantes primis alphabeti literis indigitentur* a, b, c, &c. *variabiles vero ultimis* z, y, x, &c. *Speciatim* x *abscissam*, y *semiordinatam denotet, nisi aliud expresse moneatur.*

DEFINITIO 28.

377. *Curva Algebraica* est, in qua relatio abscissarum AP ad semiordinatas PM per æquationem algebraicam explicari potest.



Sit e. gr. in circulo (*Vid. Fig. 1 hujus pag.*) AB $= a$, AP $= x$, PM $= y$; erit PB $= a - x$, consequenter ob PM^2 = AP . PB (§. 327. 377 *Geom.*), $y^2 = ax - x^2$. Vel sit PC $= x$, AC $= a$, PM $= y$; erit (§. 417 *Geom.*) MC^2 — PC^2 = PM^2, hoc est, $a^2 - x^2 = y^2$.

SCHOLION I.

378. *Dicuntur æquationes algebraicæ, quæ determinati sunt gradus, ita ut æquatio semper eadem maneat in singulis punctis curvæ.*

SCHOLION 2.

379. *Vulgo cum* Cartesio (a) *lineas algebraicas* Geometricas *vocant, quod eas tantum ad construenda problemata admittant, ideoque in Geometriam recipiant. Aliter vero nobis videtur, non refragantibus summis in re Geometrica arbitris* Leibnitio *atque* Newtono (b).

(a) Lib. 2. p. m. 17 & seq.
(b) Act. Erud. L. p. An. 1709. p. 526.

DEFINITIO 29.

380. *Curva transcendens* est, quæ per æquationem algebraicam definiri nequit.

SCHOLION.

381. *Curvæ transcendentes ab aliis* Cartesii *exemplo dicuntur* mechanicæ *& ex Geometria ejiciuntur, aliter sentientibus viris summis* Leibnitio *atque* Newtono. *Invenit quoque* Leibnitius *novum æquationum transcendentium genus, quibus curvæ transcendentes definiuntur & quæ sunt gradus indefiniti, hoc est, non constanter eadem in omnibus curvæ punctis* (c).

DEFINITIO 30.

382. *Curvæ algebraicæ ejusdem generis* sunt, quarum æquationes ad eandem dimensionem assurgunt. Cum vero sola æquatio, quæ rectam definit, unius dimensionis esse possit: *Curva primi generis* vocatur, in qua æquatio ad duas dimensiones assurgit; si ad tres, *Curva secundi generis*; si ad quatuor, *Curva tertii generis* &c.

E. gr. Æquatio pro circulo est $y^2 = ax - x^2$, vel etiam $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 377). Est ergo circulus curva primi generis. Similiter curva primi generis est, quæ definitur per æquationem $ax = y^2$. Sed curva secundi generis est, quam definit æquatio $a^2x = y^3$.

DEFINITIO 31.

383. *Familia curvarum* vocatur plurium curvarum diversi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, sed pro diversitate generis diversimode explicandi, definiuntur.

E. gr. Sit æquatio indeterminati gradus $a^{m-1}x = y^m$. Si $m = 2$, erit $ax = y^2$. Si $m = 3$, erit $a^2x = y^3$. Si $m = 4$, erit $a^3x = y^4$ &c. in infinitum. Omnes istæ curvæ dicuntur ejusdem familiæ.

SCHOLION.

384. *Æquationes, per quas curvarum familia definiuntur, cum transcendentibus non sunt confundendæ. Licet enim intuitu totius familiæ sint gradus inde-*

(c) Acta Erudit. Lips. An. 1684. p. 234. 235.

indeterminati; cujuslibet tamen ex familia curvæ respectu gradum determinatum habent, cum æquationes transcendentes respectu ejusdem curvæ indefiniti gradus existant (§. 381).

COROLLARIUM.

385. Omnes ideo curvæ algebraicæ familiam quandam componunt, ex innumeris aliis constantem, quarum unaquælibet infinita genera complectitur. Cum enim æquationes, per quas curvæ definiuntur, ingrediantur facta vel ex potentiis abscissarum & semiordinatarum in coefficientes datos, vel ex potentiis abscissarum in potentias semiordinatarum, vel ex meris quantitatibus datis, omnes vero æquationes nihilo æquales fieri possint (e. gr. si $ax = y^2$, erit $ax - y^2 = 0$): æquatio pro omnibus curvis algebraicis erit $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$. Signum + in omnibus terminis retinetur, quia in casibus singularibus infinitæ variationes occurrere possunt. Et, si plures potentiæ ejusdem indeterminatæ quantitatis, v. gr. x occurrunt, coefficiens termini in formula, v. gr. b explicatur per omnes ejus coefficientes & exponens dignitatis, v. gr. n per omnes dignitatum exponentes.

DEFINITIO 32.

386. *Sectiones conicæ* sunt lineæ curvæ, quæ ex coni sectione oriuntur.

SCHOLION.

387. *Sectiones conicæ præter circulum sunt tres* Parabola, Hyperbola & Ellipsis. *Nos præcipuas earum proprietates, quæ scilicet frequentioris sunt usus, ex æquationibus eas definientibus per calculum algebraicum eruemus, quia nobis propositum est, Algebræ ad Geometriam sublimiorem applicationem exemplis docere, licet non diffiteamur, communes earum proprietates una eademque opera demonstrari, si in solido seu in cono, ex quo secantur, considerentur.*

DEFINITIO 33.

388. *Parabola* est curva, in qua $ax = y^2$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex abscissa in rectam constantem, quæ axis *Parameter*, ab aliis *Latus rectum* dicitur.

SCHOLION.

389. *Hanc proprietatem parabolæ competere assumimus respectu axis, quod vero etiam ipsi competere debeat respectu cujuslibet diametri, inferius demonstrabitur.*

COROLLARIUM 1.

390. Est ergo parabola curva primi generis (§. 382) & crescentibus abscissis crescunt semiordinatæ, consequenter curva in se non redit.

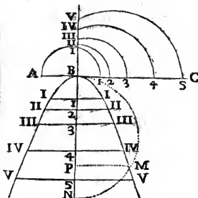
COROLLARIUM 2.

391. Et in ea $x = y^2 : a$, atque $a = y^2 : x$, hoc est, abscissa est tertia proportionalis ad parametrum & semiordinatam: parameter vero tertia proportionalis ad abscissam & semiordinatam.

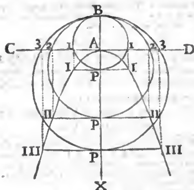
COROLLARIUM 3.

392. Porro $\sqrt{ax} = y$, hoc est, semiordinata est media proportionalis inter parametrum & abscissam.

COROLLARIUM 4.

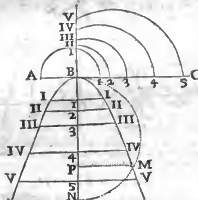


393. Data itaque parametro AB describi potest parabola. Continuetur enim parameter AB in C & in B erigatur perpendicularis infra lineam AC continuanda in N. Ex centris ad libitum assumtis in linea AC circino usque ad A aperto ducantur arcus, rectam BV in I, II, III, IV, V &c. rectam vero BC in 1, 2, 3, 4, 5 &c. intersecantes: erunt B1, B2, B3, B4, B5 &c. abscissæ, BI, BII, BIII, BIV, BV, &c. semiordinatæ (§. 327 *Geom.*). Quare si lineæ B1, B2, B3 &c. ex recta BC in BN transferantur & in punctis 1, 2, 3 &c. normales applicentur 1I = BI, 2II = BII, 3III = BIII &c. curva per puncta I, II, III &c. transiens parabola est; BN vero ejus axis (§. 368). Elegantius parabola describitur,



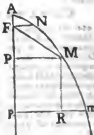
bitur, si sumta AX pro axe parabolæ & puncto A pro vertice fiat AB parametro æqualis & ducta recta CD, quæ rectam BX ad angulos rectos secet, describantur pro arbitrio circuli quotcunque transeuntes per B & axem secantes in P, P, P &c. erunt enim AP, AP, AP &c. abscissæ, PI = A1, PII = A2, PIII = A3 &c. semiordinatæ parabolæ (§. 327 *Geom.*).

COROLLARIUM 5.



394. Quodlibet etiam punctum parabolæ geometrice determinari potest. E. gr. quæritur, utrum punctum M sit in parabola, nec ne. Demittatur ex M ad BN perpendicularis MP & fiat PN parametro AB æqualis. Super BN describatur semicirculus. Quodsi enim is transeat per M; erit punctum M in parabola (§. 327 *Geom.* & §. 391 *Analys.*).

DEFINITIO 34.



395. *Focus* est punctum axis F, in quo semiordinata FN æquatur semiparametro.

PROBLEMA 174.

396. *Invenire distantiam foci a vertice* AF.

Sit AF = x, parameter = a, erit FN = $\frac{1}{2}a$ (§. 395), consequenter

$$\frac{1}{4}a^2 = ax \quad (\S. 388)$$

$$\frac{1}{4}a = x.$$

Theorema: In parabola distantia foci a vertice AF est ad parametrum in ratione subquadrupla, seu quarta pars parametri.

COROLLARIUM 2.

397. Quoniam $y^2 = ax$ (§. 388): quadratum semiordinatæ PM est quadruplum rectanguli ex distantia foci a vertice in abscissam $\frac{1}{4}ax$ sive AF . AP.

COROLLARIUM 2.

398. Invenitur ergo distantia foci a vertice AF, si ad abscissam quamcunque AP & dimidiam semiordinatam $\frac{1}{2}$PM quæratur tertia proportionalis (§. 327 *Geom.*). Est enim $\frac{1}{4}PM^2$ = AP . AF (§. 377 *Geom.*), consequenter PM^2 = 4AF . AP.

PROBLEMA 175.

399. *Determinare quantitatem rectæ* FM *ex foco* F *ad extremitatem semiordinatæ* M *ductæ* (*Vid. Fig. §. 395*).

Sit AP = x. Quoniam AF = $\frac{1}{4}a$ (§. 396), erit PF = $x - \frac{1}{4}a$, vel $\frac{1}{4}a - x$, si AF > AP, consequenter

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$

$$PM^2 = ax \quad (\S. 388)$$

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (\S. 417\ Geom.)$$

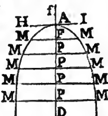
$$FM = x + \frac{1}{4}a$$

Theore-

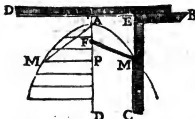
Theorema: Recta PM, ex foco F ad extremitatem semiordinatae parabolae ducta, aequatur aggregato ex abscissa AP & distantia foci a vertice AF.

COROLLARIUM I.

400. Si quarta pars parametri ex A in f & F transfertur & per AD parallelae quotcunque ipsi in punctis P normales MM aguntur, tandemque ex F intervallo Pf puncta M determinantur; curva per haec puncta transiens est parabola.



COROLLARIUM 2.



401. Potest ergo parabola etiam continuo motu describi. Nimirum assumta recta pro axe fiat $fA = AF = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB secans axem fD ad angulos rectos. Extremitati C regulae alterius EC alligetur filum, altero sui extremo in foco F fixum, quod sit $= AD + AF$. Quodsi stylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorsum & dein sinistrorsum promoveatur; stylus parabolam designabit. Est enim constanter $PM = EM = Pf = x + \frac{1}{4}a$, consequenter punctum M in parabola (§. 399).

PROBLEMA 176.

402. *Invenire rationem semiordinatarum in parabola.*

Sint abscissae x & v, semiordinatae y & z; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 388) consequenter

$$y^2 : z^2 = ax : av$$
$$y^2 : z^2 = x : v \quad (§. 124)$$
$$y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}$$

Theorema: Quadrata semiordinatarum sunt inter se ut abscissae: ipsae autem semiordinatae in ratione subduplicata abscissarum.

PROBLEMA 177.

403. *Determinare (Vid. Fig. seq.) quantitatem rectanguli ex summa duarum semiordinatarum* PM + pm *in differentiam earundem* Rm.

$$PM + pm = \sqrt{ax} + \sqrt{av} \quad (§. 402, 388)$$
$$mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax}$$

$$(PM + pm)\, mR = av - ax = a(v - x) = a . Pp$$

Theorema: Rectangulum ex summa duarum semiordinatarum in differentiam earundem aequatur rectangulo ex parametro in differentiam abscissarum.

COROLLARIUM.

404. Est ergo parameter ad summam duarum semiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abscissarum (§. 299 *Arith.*).

PROBLEMA 178.

405. *Determinare quantitatem rectanguli ex semiordinata in abscissam.*

Quoniam $PM = \sqrt{ax}$ (§. 392); erit $PM . AP = x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3}$ (§. 65). Quare cum sit $ax : \sqrt{ax^3} = \sqrt{ax^3} : x^2$, hoc est, $ax : x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$; erit $a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$ (§. 124), hoc est, $a : PM = PM . AP : AP^2$.

Theorema: In parabola est rectangulum ex semiordinata in abscissam ad quadratum abscissae ut parameter ad semiordinatam.

PROBLEMA 179.

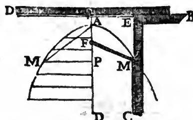
406. *Determinare quantitatem rectanguli ex abscissa una in alteram.*

Sit abscissa una $= x$, altera $= v$, semiordinata una $= y$, altera $= z$; erit $x = y^2 : a$ & $v = z^2 : a$ (§. 391), conse-

consequenter $xv = y^2 z^2 : a^2$, ideoque $a^2 : y^2 = z^2 : xv$.

Theorema: In parabola quadratum parametri est ad quadratum semiordinatæ unius, ut quadratum semiordinatæ alterius ad rectangulum abscissarum.

PROBLEMA 180.



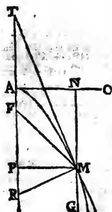
407. *Determinare quantitatem chordæ* AM.

Sit parameter $= a$; $AP = x$, erit $PM^2 = ax$ (§. 388). Quare cum $AP^2 = x^2$; erit $AM^2 = ax + x^2$ (§. 417 *Geom.*) $= (a+x)x = (a+AP).AP$.

Theorema: In parabola chorda est media proportionalis inter abscissam & compositam ex parametro & abscissa.

DEFINITIO 35.

408. Si TM curvam tangit in M, ducatur MR ad tangentem normalis; recta PT, inter tangentem TM & semiordinatam PM intercepta, *Subtangens* vocatur: quæ vero inter semiordinatam & normalem intercipitur PR, *Subnormalis* audit.



COROLLARIUM.

409. Est ideo TMR triangulum rectangulum (§. 91 *Geom.*), ideoque ob PM ad AR normalem, PR : PM = PM : PT & PM : PT = MR : TM (§. 329. 267 *Geom.*), hoc est, in omni curva, ac proinde etiam in parabola subnormalis est tertia proportionalis ad subtangentem & semiordinatam, & normalis est ad tangentem ut semiordinata ad subtangentem.

PROBLEMA 181.

410. *Determinare quantitatem* (*Vid. Fig.* §. 408) *subtangentis* PT *& subnormalis* PR *in parabola.*

Sit $AP = x$, MR ad tangentem TM perpendicularis $= t$, $RA = v$, erit $PR = v - x$, $PM^2 = ax$ (§. 388), & (§. 417 *Geom.*)

$$ax = t^2 - v^2 + 2vx - x^2$$

hoc est, $x^2 - 2vx + v^2 = 0$
$\quad + ax - t^2$

Eadem æquatio provenit, si recta TM parabolam secet, & quidem ad utrumque sectionis punctum. Quoniam itaque in puncto contactus duo illa puncta coincidunt; æquatio duas radices æquales habere debet, coincidentibus nimirum etiam abscissis per x designatis. Quare si fiat $x = z$ seu $x - z = 0$, & inde formetur æquatio $x^2 - 2zx + z^2 = 0$, duas æquales radices continens (§. 329); hæc cum antea inventa eadem esse debet, consequenter

$$-2z = -2v + a$$

Ergo, ob $z = x$, $x = v - \frac{1}{2}a$

$$\tfrac{1}{2}a = v - x = PR$$

Porro (§. 409) $PR : PM = PM : PT$
hoc est, $\frac{1}{2}a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax} : PT$
Ergo $PT = ax : \frac{1}{2}a = 2x$.

Theorema: In parabola subtangens PT est abscissæ AP dupla; subnormalis vero PR parametri subdupla, ideoque constans.

COROL-

Corollarium 1.

411. Quoniam TA $= x$ & distantia foci a vertice AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396); erit TF $= \frac{1}{4}a + x$. Ergo (§. 399) recta FM, distantia foci F a puncto contactus M, æquatur distantiæ FT ejusdem foci ab extremo tangentis puncto T, consequenter TFM triangulum æquicrurum.

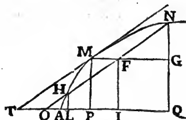
Corollarium 2.

412. Quoniam PA $= x$ & AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396); erit PF $= x - \frac{1}{4}a$, consequenter cum sit PR $= \frac{1}{2}a$ (§. 410), FR $= x + \frac{1}{4}a$, ideoque FR $=$ FM (§. 399) $=$ TF (§. 411). Circulus igitur ex foco parabolæ F per punctum ejus M ductus subtangentem PT & subnormalem PR determinat, consequenter punctum T, ex quo ducitur tangens TM.

Corollarium 3.

413. Quodsi MG ducatur parallela axi AR; erit angulus GMS $=$ FTM (§. 233 *Geom.*). Cumque sit TF $=$ FM (§. 411); erit FTM $=$ FMT (§. 184 *Geom.*), consequenter FMT $=$ GMS (§. 87 *Arith.*).

Problema 182.



414. *Ducta* ON *tangenti* TM, *&* MG *axi* AQ *parallela, determinare rationem segmentorum* HF *&* FN.

Sit AP $=$ AT (§. 410) $= x$; erit PM $=$ IF $= \sqrt{ax}$ (§. 392), atque PT $=$ IO (ob TO $=$ MF $=$ PI (§. 257 *Geom.*)) $= 2x$ (§. 410). Sit MF $=$ PI $= v$, erit TI $= v + 2x$, IA $= v + x$. Sit denique IQ $=$ FG $= t$, erit OQ $=$ OI $+$ IQ $= 2x + t$, QA $= x + v + t$, & hinc QN^2 $= ax + av + at$ (§. 388). Porro (§. 268 *Geom.*)

$$\text{OI} : \text{IF} = \text{OQ} : \text{QN}$$

h. e. $\text{OI}^2 : \text{IF}^2 = \text{OQ}^2 : \text{QN}^2$

$$4x^2 : ax = (2x + t)^2 : \text{QN}^2$$

$$4x : a = (2x+t)^2 : \frac{a(2x+t)^2}{4x}$$

Est itaq. $a(x + v + t) = a(2x + t)^2 : 4x$

$$4x^2 + 4xv + 4tx = 4x^2 + 4tx + t^2$$

$$4xv = t^2$$

Quodsi LI dicatur t; reperietur eodem modo $t^2 = 4xv$, reliquis manentibus iisdem. Unde patet, esse LI $=$ IQ. Est vero (§. 268 *Geom.*) OH : OL $=$ HN : LQ & OH : OL $=$ HF : LI, ideoque HN : HF $=$ LQ : LI (§. 167. 173 *Arith.*). Sed LI $= \frac{1}{2}$LQ $=$ IQ *per demonstrata*. Ergo FH $= \frac{1}{2}$HN $=$ FN (§. 149 *Arith.*).

Theorema: Si recta HN tangenti TM parallela ducatur; recta MG ex puncto contactus M cum axe parallela ducta eam bifariam secat in F.

Corollarium 1.

415. Est ergo MG diameter, HN ejus ordinata, MF abscissa (§. 368. 370. 371).

Corollarium 2.

416 Quoniam anguli recti ad G & I *per construct.* æquales sunt (§. 145 *Geom.*) & ob parallelismum rectarum FG & OQ *per construct.* anguli F & O in △△ FNG & FOI æquales sunt (§. 233 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$\text{OI} : \text{FI} = \text{FG} : \text{GN}$$

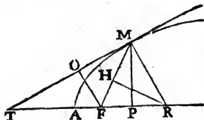
$$2x : \sqrt{ax} = \sqrt{4vx} : \sqrt{av}$$

Et quia (§. 417 *Geom.*) FN^2 $=$ FG^2 $+$ GN^2; erit FN^2 $= 4vx + av = (a + 4x)v$. Jam cum FM $= v$, & x respectu puncti M constans; $a + 4x$ est parameter diametri, & quadratum etiam ad diametrum applicatæ æquale rectangulo ex parametro in abscissam.

COROLLARIUM 3.

417. Recta ex foco ad verticem diametri M ducta est $\frac{1}{4}a + x$ (§. 399); parameter ergo diametri est rectæ illius quadrupla.

PROBLEMA 183.



418. *Si* TM *parabolam tangit in* M *&* MR *fuerit ad eam normalis & ex foco* F *ducatur ad contactum* M *recta* FM *atque* FO *ad* TM *normalis, demittatur etiam ex* R *ad rectam* FM *normalis* RH; *determinare quantitatem segmentorum* MH *&* FH, *itemque rectæ* OF.

Sit parameter $= a$, AP $= x$, erit FM $= \frac{1}{4}a + x$ (§. 399), PR $= \frac{1}{2}a$ & TP $= 2x$ (§. 410). Cum TFM sit triangulum æquicrurum (§. 411), atque FO ad basin TM normalis *per construct.* erit TO $=$ OM (§. 184 *Geom.*), nec non $FM^2 - OM^2 = FO^2$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam itaque $TM^2 = TP^2 + PM^2$ (§. *cit.*); erit $TM^2 = 4x^2 + ax$ (§. 388), consequenter $OM^2 = x^2 + \frac{1}{4}ax$, quod ex $FM^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{2}ax + x^2$ subductum relinquit $FO^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ax = (\frac{1}{4}a + x)\frac{1}{4}a$. Porro $MR^2 = PR^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}a^2 + ax = (\frac{1}{4}a + x)a$. Jam cum in △△ OFM & MHR anguli ad O & H recti *per hypoth.* sint inter se æquales (§. 145 *Geom.*) & ob parallelismum rectarum MR & FO (§. 256 *Geom.*) anguli F & M æquales (§. 233 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*)

$$FM : OF = MR : MH$$

ideoque $FM^2 : OF^2 = MR^2 : MH^2$ (§. 124)

$$(\tfrac{1}{4}a + x)^2 : (\tfrac{1}{4}a + x)\tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)a : MH^2$$

$$\tfrac{1}{4}a + x : \tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)a : MH^2 \text{ (§. 124)}$$

$$1 : \tfrac{1}{4}a = a : MH^2 \text{ (§. cit.)}$$

$$MH^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$MH = \tfrac{1}{2}a = PR$$

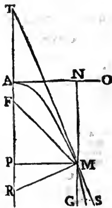
Ergo HF $=$ FM $-$ HM $= x - \frac{1}{4}a =$ FP: est enim AP $= x$, & AF $= \frac{1}{4}a$ (§ 396).

Theorema 1: Recta FO ex foco parabolæ F ad tangentem TM perpendiculariter ducta, est media proportionalis inter quartam parametri partem & rectam FM ex foco F ad punctum contactus M ductam.

Theorema 2: Si MR fuerit ad parabolam in puncto M normalis & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem parabolæ punctum M ductam, normalis RH; erit MH subnormali PR, & HF portioni axis inter focum F & semiordinatam PM interceptæ æqualis.

PROBLEMA 184.

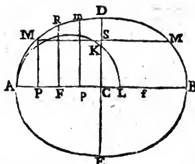
419. *Invenire æquationem ad parabolam externam, hoc est, punctis parabolæ* M *ad rectam* AO, *quæ ad axem* AR *in vertice* A *perpendicularis, relatis.*



Sit abscissa AN $= x$, semiordinata NM $= y$, parameter $= a$. Quoniam AN *per hypoth.* & PM (§. 368) perpendiculares ad AR; erit AN ipsi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Cum ex eadem ratione NM sit parallela ipsi AR; erit AN $=$ PM & NM $=$ AP (§. 257 *Geom.*), consequenter PM $= x$, AP $= y$, atque ideo $x^2 = ay$ (§. 388).

DEFI-

DEFINITIO 36.



420. *Ellipsis* est linea curva, in qua quadratum semiordinatæ PM est ad rectangulum ex segmentis axis AP & PB ut parameter ad axem, hoc est, si AB $= a$, parameter $= b$, PM $= y$, AP $= x$; erit $b : a = y^2 : ax - x^2$, ideoque $ay^2 = abx - bx^2$.

COROLLARIUM 1.

421. Est ergo $y^2 = bx - bx^2 : a$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abscissam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abscissa in quartam proportionalem ad axem, parametrum & abscissam.

COROLLARIUM 2.

422. Fiat $y = 0$, erit $bx - bx^2 : a = 0$, ideoque $abx = bx^2$, consequenter $a = x$. Patet ideo curvam secare AB in A & B, consequenter in se redire.

COROLLARIUM 3.

423. Fiat $x = \frac{1}{2}a$; erit $y^2 = \frac{1}{2}ab - a^2b : 4a = \frac{1}{4}ab$, consequenter $y =$ CD $= \sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Ergo DE $= 2\sqrt{\frac{1}{4}ab} = \sqrt{ab}$, hoc est, axis minor ED est medius proportionalis inter majorem AB & parametrum, consequenter parameter tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

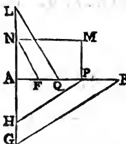
COROLLARIUM 4.

424. Quia $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420)

erit $bx^2 = abx - ay^2$

$bx^2 : (bx - y^2) = a$

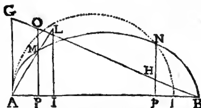
Invenitur ergo axis parametro, abscissa & semiordinata datis, si fiat 1°. $b : y = y : \frac{y^2}{b}$. 2°. $x - \frac{y^2}{b} = \frac{(bx - y^2)}{b} : x = x : a$. Nimirum sic



axis AB positione datus & parameter AL ad eum perpendicularis. Datis abscissa AP & semiordinata PM, fiat AN $=$ AQ $=$ PM; ducta NF ipsi LQ parallela, erit AF $= y^2 : b$, consequenter FP $= x - y^2 : b$. Continuetur LA in G factaque AH $=$ FP & AG $=$ AP, ducatur GB ipsi HP parallela; erit AB $= bx^2 : (bx - y^2)$, ideoque axis quæsitus.

COROLLARIUM 5.

425. Quia $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420)
erit $ay^2 : (ax - x^2) = b$, consequenter 1°. $x : y = y : \frac{y^2}{x}$, & 2°. $a - x : \frac{y^2}{x} = a : b$;



Datis ergo axe AB, abscissa AP & semiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1°. Fiat AI $=$ PM & ex A per M ducatur recta AL. 2°. In I erigatur perpendicularis IL; erit, ob AP : PM $=$ AI : LI (§. 268 *Geom.*), IL $= y^2 : x$. 3°. Producatur PM in O, donec PO $=$ LI $= y^2 : x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4°. In A excitetur perpendicularis AG $=$ (ob BP : PO $=$ BA : AG) $ay^2 : (ax - x^2)$, quæ erit parameter AG.

COROL-

COROLLARIUM 6.

G O L M N H A P I P I B

426. $y = \sqrt{\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right)} = \sqrt{\frac{bx(a-x)}{a}}$.
Datis itaque axe AB & parametro AG, cuilibet abscissæ Bp semiordinata pN assignatur, si parametro AG axi AB ad angulos rectos juncta ducatur GB, & erecta perpendiculari pN, fiat $pl = pH$, tandemque super Al semicirculus describatur. Est enim $AB(a) : GA(b) = Bp(x) : pH(bx : a)$ & $pN = \sqrt{(Ap \cdot pl)} = \sqrt{((a - x)\,bx : a)} = \sqrt{(bx - bx^2 : a)}$.

PROBLEMA 185.

R m D M S K A P F P C L f B E

427. *Invenire distantiam foci a vertice* AF.

Sit $AB = a$, parameter $= b$, $AF = x$, erit $FR = \frac{1}{2}b$ (§. 395) &

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2 \quad (\text{§}.420)$$

$$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{4}a^2 \qquad \frac{1}{4}a^2$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{2}a - x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}ab)}$$

$$\frac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}ab)} = x$$

Constructio: Ex B in L transferatur dimidia parameter, erit $CL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. In centro C erigatur perpendicularis CK occurrens semicirculo super AL descripto in K, erit $CK = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$ (§. 377). Fiat itaque $CF = CK$; erit in F focus.

Aliter. Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}ab} = CD$ (§. 423), si intervallo $DF = \frac{1}{2}a$ intersecetur AB in F; erit in F focus. Nam $CD^2 = \frac{1}{4}ab$ & $DF^2 = \frac{1}{4}a^2$. Ergo $CF = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$, ut ante.

Æquatio secunda sequens suppeditat

Theorema: Si axis AB in foco F secetur; erit rectangulum ex segmentis axis AF . FB subquadruplum rectanguli ex parametro in axem, seu quadrato axis dimidii minoris CD æquale (§. 423).

COROLLARIUM.

428. Distantia foci a centro est $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$, hoc est, quadratum ejus est differentia quadratorum DC & AC.

PROBLEMA 186.

429. *Invenire rationem ordinatarum* PM & pm *in ellipsi*. (*Vid. Fig.* §. 427)

Sit $AB = a$, parameter $= b$, $AP = x$, $PM = y$, $Ap = z$, $pm = v$; erit

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= bx - bx^2 : a \\ v^2 &= bz - bz^2 : a \end{aligned}\right\} (\text{§}.421.)$$

Ergo $y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$

h. e. $y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$

seu $PM^2 : pm^2 = AP \cdot PB : Ap \cdot pB$

Theorema. In ellipsi quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex axis segmentis.

COROLLARIUM I.

430. Est igitur etiam $DC^2 : PM^2 = CB^2 : AP \cdot PB$, consequenter $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP \cdot PB$ (§. 173. *Arith.*), hoc est, quadratum semiaxis minoris est ad quadratum semiaxis majoris ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum ex axis segmentis.

COROLLARIUM 2.

431. Sit $CP = x$, erit $AP = \frac{1}{2}a - x$ & $PB = \frac{1}{2}a + x$, consequenter $AP \cdot PB = \frac{1}{4}a^2 - x^2$. Habemus ideo (§. 423. 430.

$\frac{1}{4}ab$

$$\tfrac{1}{4}ab : \tfrac{1}{4}a^2 = y^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - x^2$$

hoc est, $b : a = y^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - x^2$

$$ay^2 = \tfrac{1}{4}a^2b - bx^2$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}ab - bx^2 : a$$

En æquationem aliam, quæ naturam ellipsis definit, abscissis a centro C computatis.

COROLLARIUM 3.

432. Sit CD $= d$, AC $= r$, PC $= x$; erit AP $= r - x$ & PB $= r + x$, consequenter AP . PB $= r^2 - x^2 = \text{AC}^2 - \text{PC}^2$. Habemus ergo ut ante (§. 430)

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

unde $r^2y^2 = d^2(r^2 - x^2)$

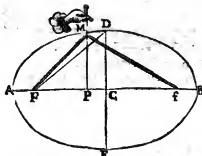
$$y^2 = d^2(r^2 - x^2) : r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem ellipsis naturam definit, abscissis denuo a centro C computatis, & qua in subsequentibus ob commoditatem utemur.

COROLLARIUM 4.

433. Crescentibus ideo abscissis x, semiordinatæ decrescere debent. Quodsi tandem fiat $x = r$; erit $r^2 - x^2 = 0$, consequenter $y^2 = 0$, ideoque ellipsis cum axe tandem concurrit. Unde porro intelligitur ellipsin esse lineam in se redeuntem.

PROBLEMA 187.



434. *Determinare quantitatem rectarum* FM & fM *ex utroque foco* F & f *ad idem peripheriæ punctum* M *ductarum.*

Sint FC $= f$C $= c$, reliqua ut ante; erit PC $= \tfrac{1}{2}a - x$, P$f = c + \tfrac{1}{2}a - x$, PF $= c - \tfrac{1}{2}a + x$, ideoque PF$^2 = c^2 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$, P$f^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + x^2$. Jam DC^2 = FD^2 − FC^2 (§. 417 *Geom.*), hoc est, cum FD *per demonstrata in* §. 427 sit æqualis $\tfrac{1}{2}a$, $= \tfrac{1}{4}a^2 - c^2$. Porro (§. 430)

$$\text{CB}^2 : \text{DC}^2 = \text{AP} . \text{PB} : \text{PM}^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : \text{PM}^2.$$

Habemus ideo

$$\text{PM}^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$\text{PF}^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$$

$$\text{FM}^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$\text{FM} = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

$$\text{PM}^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$\text{P}f^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + x^2$$

$$f\text{M}^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$f\text{M} = \tfrac{1}{2}a + c - 2cx : a$$

$$\text{FM} = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

$$f\text{M} + \text{FM} = a = \text{AB}$$

Theorema: Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.

COROLLARIUM 1.

435. Datis ergo axibus conjugatis ellipsis facillime describitur. Determinatis enim focis F & f (§. 427), clavi in iis defigantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodsi immisso stylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, ellipsis designabitur.

COROLLARIUM 2.

436. Imo eodem modo geometrice determinatur quodlibet punctum ellipseos M. Axis enim AB dividitur pro arbitrio utcunque in duas partes, modo inter focos divisio cadat, & intervallo partis unius ex foco F atque intervallo alterius ex foco f describuntur arcus: duo enim hi arcus se mutuo secabunt aut tangent in puncto M. Possunt autem una eademque opera quatuor simul determinari puncta, singula nempe in singulis quadrantibus AD, DB, BE & EA.

PRO-

PROBLEMA 188.

437. *Determinare quantitatem rectæ* MS *ex quovis ellipsis puncto* M *ad axem conjugatum* DC *perpendicularis.*

Sit $MS = PC = v$, $AC = r$; erit $AP = r - v$ & $PB = r + v$. Sit $DS = z$, $DC = c$, erit $SC = PM = c - z$, consequenter (§. 430)

$$DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP . PB$$

$$c^2 : r^2 = c^2 - 2cz + z^2 : r^2 - v^2$$

$$c^2 : c^2 - 2cz + z^2 = r^2 : r^2 - v^2 \text{ (§. 173 Arith.)}$$

$$2cz - z^2 : c^2 = v^2 : r^2 \text{ (§. 193 Arith.)}$$

$$2cz - z^2 : v^2 = c^2 : r^2 \text{ (§. 173 Arith.)}$$

$$DS . SE : MS^2 = DC^2 : AC^2.$$

Theorema: Rectangulum ex segmentis axis conjugati est ad quadratum semiordinatæ ipsius ut quadratum semiaxis conjugati ad quadratum semiaxis majoris; seu etiam ut quadratum axis conjugati ad quadratum axis majoris.

COROLLARIUM 1.

438. Habent ergo ad axem conjugatum coordinatæ eandem relationem, quæ inter coordinatas ad axem majorem intercedit (§. 429).

COROLLARIUM 2.

439. Quoniam $v^2 = \frac{2r^2z}{c} - \frac{r^2z^2}{c^2}$ (§. 437), si fiat $2r^2 : c = p$; erit $v^2 = pz - pz^2 : 2c$. Est ideo p parameter axis conjugati (§. 420). Quare parameter axis conjugati est tertia proportionalis ad $2c$ & $2r$, seu ad axem conjugatum & axem majorem.

PROBLEMA 189.

440. *Determinare subtangentem* PT *& subnormalem* PR *in ellipsi.*

Eadem prorsus methodo utendum, qua in parabola usi sumus (§. 410). Nimirum sit parameter $= b$, axis major $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $MR = t$, $RA = z$; erit $PR = z - x$, consequenter $PM^2 = t^2 - z^2 + 2zx - x^2$ (§. 417 *Geom.*). Est vero etiam $PM^2 = bx - bx^2 : a$ (§. 421). Quare.

$$t^2 - z^2 + 2zx - x^2 = bx - bx^2 : a$$

$$at^2 - az^2 + 2azx - ax^2 = abx - bx^2$$

$$ax^2 - bx^2 + abx - 2azx + az^2 - at^2 = 0$$

$$x^2 + \frac{(ab - 2az)}{a - b}x + \frac{az^2 - at^2}{a - b} = 0$$

Cum ex superioribus constet, æquationem hanc duas habere debere radices æquales; ponatur ut supra (§. 410) $x - v = 0$, erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$ æquatio eadem cum anteriore, consequenter

$$(ab - 2az) : (a - b) = -2v$$

$$ab - 2az = -2av + 2bv$$

$$ab + 2av - 2bv = 2az$$

$$\tfrac{1}{2}b + v - bv : a = z$$

Est vero $v = x$ *per hypoth.* Quare si x pro v substituatur, prodibit $z = \frac{1}{2}b + x - bx : a = AR$. Ergo $PR = \frac{1}{2}b + x - bx : a - x = \frac{1}{2}b - bx : a = (\frac{1}{2}ab - bx) : a$,

quæ

quæ expressio hanc suppeditat analogiam

$$a:b = \tfrac{1}{2}a - x : PR$$

Theorema 1: In ellipsi est ut axis primus ad parametrum, ita distantia semiordinatæ a centro ad subnormalem.

Porro PR : PM = PM : PT (§.409)

$$\frac{\frac{1}{2}ab - bx}{a} : y = y : \frac{ay^2}{\frac{1}{2}ab - bx}$$

Est vero $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420). Ergo PT $= (abx - bx^2) : (\tfrac{1}{2}ab - bx) = (ax - x^2) : (\tfrac{1}{2}a - x)$. Habemus ideo

$$\tfrac{1}{2}a - x : x = a - x : PT$$
$$PC : AP = PB : PT$$

Ergo PB . AP = CP . PT

Theorema 2: In ellipsi rectangulum ex segmentis axis æquatur rectangulo ex distantia semiordinatæ a centro in subtangentem.

Tandem AT = PT — AP $= (ax - x^2) : \tfrac{1}{2}a - x) - x = (ax - x^2 - \tfrac{1}{2}ax + x^2) : (\tfrac{1}{2}a - x) = \tfrac{1}{2}ax : (\tfrac{1}{2}a - x)$. Quare

$$\tfrac{1}{2}a - x : \tfrac{1}{2}a = x : AT$$
$$PC : AC = AP : AT$$

Theorema 3: Ut distantia semiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abscissa ad portionem subtangentis inter verticem ellipsis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM I.

441. Quia PC : AC = AP : AT; erit etiam PC : AP = AC : AT (§.173 *Arith.*), consequenter PC : PC + PA = AC : CA + AT (§.190 *Arith.*), hoc est, PC : AC = AC : CT.

COROLLARIUM 2.

442. Est ergo AC^2 = PC . CT (§. 377 *Geom.*), hoc est, quadratum dimidii axis AC æquatur rectangulo ex TC in PC.

COROLLARIUM 3.

443. Crescentibus abscissis x, decrescit $\tfrac{1}{2}a - x$, consequenter ratio $\tfrac{1}{2}a - x : \tfrac{1}{2}a$ minuitur (§. 203 *Arith.*). Abscissa igitur major ad AT rationem minorem habet quam minor.

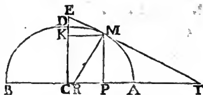
COROLLARIUM 4.

444. Si $x = \tfrac{1}{2}a$, hoc est, quando AC fit abscissa; $\tfrac{1}{2}a - x = 0$, consequenter AT ad abscissam rationem infinitam habet, ideoque tangens TM cum subtangente TP nunquam concurrit. est igitur axi parallela.

COROLLARIUM 5.

445. Hinc vero ulterius liquet, quantitatem finitam AC respectu infinitæ pro nihilo habendam esse.

PROBLEMA 190.



446. *Determinare quantitatem rectanguli ex subtangente* PT *in abscissam* CP.

Sit PC = x, PT = t, AC = r; erit AP = $r - x$, & PB = $r + x$, CT = $t + x$. Quoniam (§. 441)

$$PC : AC = AC : CT$$
$$x : r = r : t + x$$

erit $tx + x^2 = r^2$

$$tx = r^2 - x^2 = AP . PB$$

Theorema: Rectangulum ex subtangente PT in abscissam CP æquatur rectangulo ex segmentis axis.

PROBLEMA 191.

447. *Determinare valorem subtangentis* PT, *abscissis a centro computatis.*

Sit PT = t, AC = r, PC = v; erit PB = $r + v$, AP = $r - v$, consequenter (§. 440)

$$PC : PB = AP : PT$$
$$v : r + v = r - v : t$$

$$tv = r^2 - v^2$$

Theorema: Rectangulum ex subtangente in distantiam ordinatæ a centro æquatur differentiæ quadrati hujus distantiæ a quadrato semiaxis transversi.

PRO-

PROBLEMA 192.

448. ***Determinare quantitatem subtangentis* KE *in axe conjugato.***

Si tangens TM continuetur, donec axi conjugato continuato in E occurrat, & ex M demittatur perpendicularis MK = PC (§. 256. 257 *Geom.*); erit ob parallelismum rectarum KM & CT angulus T = EMK (§. 233 *Geom.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$TP : PM = MK : KE$$

$$\frac{r^2 - v^2}{v} (\text{§. } 447) : y = v : \frac{v^2 y}{r^2 - v^2}$$

Quodsi fiat DC $= c$, DK $= z$, erit KC = PM $= y = c - z$ & $v^2 = \frac{2r^2 z}{c} - \frac{r^2 z^2}{c^2}$ (§. 439). Hinc $r^2 - v^2 = (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) : c^2$ & $v^2 y = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : c^2$. Quare $v^2 y : (r^2 - v^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2) : (cr^2 - r^2 z) = (2cz - z^2) : (c - z)$.

Expressio itaque subtangentis in axe conjugato eadem, quae in transverso (§. 440).

PROBLEMA 193.

449. *Si recta* HN *tangenti* TM *parallela ducatur & punctum contactus* M *atque centrum* C *jungantur recta* MC, *quae secat* HN *in* G; *determinare rationem rectarum* HG *&* GN.

Sit AB $= a$, PM $= y$, PC $= c$, FG = KD $= t$, GI = KS $= z$; erit IF = HL = DS $= t - z$, HL$^2 = t^2 - 2tz + z^2$. Opera nunc danda, ut HL^2 alia adhuc ratione exprimatur. Est itaque (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = FG : FC$$

$$y : c = t : \frac{tc}{y}$$

Et quia △ TMP ∽ △ FOG (§. 233 §. 267 *Geom.*), & △ GIH ∽ △ FOG (§. 268 *Geom.*); erit etiam △ TMP ∽ △ GIH, consequenter (§. 175 *Geom.*)

$$PM : PT = GI : HI$$

$$y : \frac{ax - x^2}{c} = z : \frac{(ax - x^2) z}{cy} (\text{§. } 440)$$

Ponamus brevitatis gratia $ax - x^2 = v$; erit FL = HI $= vz : cy$. Ergo CL = FL + FC $= tc : y + vz : cy = (tc^2 + vz) : cy$. Hinc AL = AC − CL $= \frac{1}{2}a - (tc^2 - vz) : cy = (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy$, & BL = AB − AL $= a - (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy = (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy$. Est vero (§. 429)

$$AP \cdot PB : LA \cdot LB = PM^2 : HL^2$$

$$v : \frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - 2c^2 vz - v^2 z^2}{c^2 y^2} = y^2 : HL^2$$

Hinc HL^2 =

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - 2tc^2 vz - v^2 z^2}{c^2 v} = t^2 - 2tz + z^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - 2tc^2 vz - v^2 z^2 = t^2 c^2 v - 2tc^2 zv + z^2 c^2 v$$

$$\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - v^2 z^2 = t^2 c^2 v + z^2 c^2 v$$

$$\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - t^2 c^2 v = v^2 z^2 + c^2 v z^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - t^2 c^2 v}{v^2 + c^2 v} = z^2$$

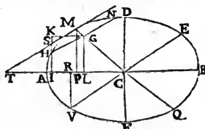
Quodsi jam KN dicatur z, & reliqua maneant ut ante; reperietur eodem modo

modo $z^2 = \frac{\frac{1}{2}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v}$, consequenter $KN^2 = KS^2$, ideoque & $KN = KS$.

Est vero (§. 268 *Geom.*) $KN : KS = GN : HG$. Ergo $GN = HG$.

Theorema: Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MC per contactum M & centrum ellipsis C transiens eam bifariam secat.

COROLLARIUM I.



450. Est ergo MQ diameter, HN ejus ordinata (§. 368. 370).

COROLLARIUM 2.

451. Cum vero parallelæ HN quamcunque aliam, & rectæ MQ itidem quamcunque aliam substituere liceat; omnes rectæ per centrum transeuntes & in peripheria utrinque terminatæ, sunt diametri, ipsisque coordinatæ sunt tangentibus parallelæ.

COROLLARIUM 3.

452. Est ergo etiam ECV diameter, consequenter (si eadem parallela sit ipsi HN) MQ & EV sunt diametri conjugatæ (§. 374).

PROBLEMA 194.

453. *Si ex diametri* VE *tangenti* TM *parallelæ, extremitate* V *perpendicularis* VR *demittatur in axem* AB; *determinare quantitatem rectæ* RC.

Sit $CA = r$, $CR = v$, $PT = t$, $PC = x$; erit $AR = r - v$, $RB = r + v$, consequenter $AP.PB = tx$ (§.446), $AR.RB = r^2 - v^2 = tx + x^2 - v^2$ (§. 442). Quoniam VE ipsi TM parallela *per hypoth.* erit $MTC = TCV$ (§. 233 *Geom.*). Quare cum anguli ad P & R sint recti *per constr.* erit (§. 267 *Geom.*) $PM : RV = TP : RC$. Hinc $PM^2 : RV^2 = TP^2 : RC^2$ (§.124). Est vero etiam $PM^2 : RV^2 = AP.PB : AR.RB$ (§. 429). Ergo (§. 167 *Arith.*)

$$AP.PB : AR.RB = TP^2 : RC^2$$
$$tx : tx + x^2 - v^2 = t^2 : v^2$$
$$tv^2x = t^3x + t^2x^2 - t^2v^2$$
$$v^2x = t^2x + tx^2 - tv^2$$
$$tv^2 + xv^2 = t^2x + tx^2$$
$$v^2 = tx$$

hoc est, $CR^2 = AP.PB$, consequenter $AP : CR = CR : PB$.

PROBLEMA 195.

454. *Determinare quantitatem semiordinatæ* GH *ad diametrum ellipsis* MQ.

Ductis KI ipsi FD, & KG ipsi AB parallelis, fiat $CP = x$, $AC = r$, $PT = t$, $PM = y$, $KG = IL = m$, $LC = n$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : PM = CL : LG$$
$$x : y = n : \frac{ny}{x}$$

Porro ob parallelas TM & HN *per construct.* angulus $TSI = KHG$ (§.233 *Geom.*), ideoque ob rectos ad A & K *per constr.* $T = HGK$ (§. 246 *Geom.*), & hinc (§. 267 *Geom.*)

$$TP : PM = KG : KH$$
$$t : y = m : \frac{my}{t}$$
$$HI = KI - KH = \frac{ny}{x} - \frac{my}{t}$$
$$CI = CL + LI = n + m$$
$$HI^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2}$$
$$CI^2 = n^2 + 2mn + m^2$$
$$AP.PB = AC^2 - PC^2 = r^2 - x^2$$
(§.432)

$$AI.IB = AC^2 - CI^2 = r^2 - n^2 - 2mn - m^2 \text{ (§. cit.)}$$

Est vero (§. 429)

$$AP.PB : AI.IB = PM^2 : HI^2$$

$$r^2 - x^2 : r^2 - n^2 - 2mn - m^2 = y^2 : HI^2$$

Unde elicitur $HI^2 = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$

Quare

$$\frac{r^2y^2}{x^4} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

Sed $\frac{2mny^2}{tx} = \frac{2mny^2}{r^2 - x^2}$ (§. 446). Ergo

$$\frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

y^2 Divid.

$$\frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{r^2 - n^2 - m^2}{r^2 - x^2}$$

x^2 Mult.

$$n^2 + \frac{m^2x^2}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} - n^2$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2 + n^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2}{r^2 - x^2}$$

hoc est, ob $t^2x^2 = (r^2 - x^2)^2$ (§. 446),

$$m^2x^4 = (r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2)(r^2 - x^2)$$

$$= r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + m^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^2 - m^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} - x^2 + n^2$$

$$m^2 = r^2 + n^2 - x^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} = KG^2$$

Sit jam $CM = v$, erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : CM = CL : CG$$

$$x : v = n : \frac{vn}{x}$$

Ergo $MG = MC - CG = v - vn : x$, & $GQ = GC + MC = v + vn : x$, ac proinde $MG.GQ = v^2 - v^2n^2 : x^2$.

Quodsi $v^2 - v^2n^2 : x^2 = MG.QG$ multiplices per $r^2 - x^2 = CR^2$ (§. 453), & $r^2 + n^2 - x^2 - r^2n^2 : x^2 = KG^2$ per $v^2 = CM^2$; utrobique prodit $r^2v^2 + n^2v^2 - x^2v^2 - r^2n^2v^2 : x^2$. Est itaque $MG.QG.CR^2 = KG^2.CM^2$, ideoque (§. 299 *Arith.*) $KG^2 : CR^2 = MG.QG : CM^2$. Jam ob parallelas EV & HN *per hypoth.* MCV = MGH (§. 233 *Geom.*), & ob parallelas KG & RC *per constr.* MGK = MCR (§. *cit.*). Ergo KGH = RCV (§. 91 *Arith.*), consequenter $KG^2 : CR^2 = HG^2 : CV^2$ (§. 267 *Geom.* & §. 260 *Arith.*). Unde tandem habetur (§. 167 *Arith.*) $MG.QG : CM^2 = HG^2 : CV^2$.

Theorema: In ellipsi est quadratum semiordinatæ ad quadratum semidiametri conjugatæ ut rectangulum ex segmentis diametri ad quadratum semidiametri.

COROLLARIUM.

455. Sit $MQ = a$, $EV = c$, $MG = x$, $HG = y$; erit $GQ = a - x$, consequenter (§. 454)

$$ax - x^2 : \tfrac{1}{4}a^2 = y^2 : \tfrac{1}{4}c^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2ax - \tfrac{1}{4}c^2x^2 = \tfrac{1}{4}a^2y^2$$

$$c^2x - \frac{c^2x^2}{a} = ay^2$$

Fiat $\frac{c^2}{a} = b$, erit $c^2 = ab$.

Hinc $abx - bx^2 = ay^2$.

Eadem ergo est relatio semiordinatarum ad diametros, quæ ad axem (§. 420), & diametri parameter est tertia proportionalis ad diametros a & c.

SCHOLION.

456. *Cum ex hac æquatione fundamentali reliquas ellipsis proprietates respectu axis deduxerimus; evidens est, omnes quoque istas proprietates ellipsi competere intuitu diametri.*

PRO-

PROBLEMA 196.

457. *Determinare quantitatem rectæ* FO *ex foco* F *ad tangentem ellipsis* TM *perpendicularis.*

Sit RM ad tangentem TM normalis: erunt MR & OF inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), ideoque TR : RM = TF : FO (§. 268 *Geom.*). Porro cum in triangulo rectangulo TMR semiordinata PM sit ad hypothenusam TR perpendicularis (§. 368. 370); erit △TMR ∽ △PMR (§. 329 *Geom.*), ideoque TR : RM = RM : PR (§. 175 *Geom.*). Est ergo RM : PR = TF : FO (§. 167 *Arith.*), consequenter FO . RM = PR . TF (§. 378 *Geom.*).

Theorema: Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari FO.

PROBLEMA 197.

458. *Si in* F *fuerit focus ellipsis &* MR *ad eam normalis*, HR *vero normalis ad* FM *ex foco ad punctum contactus ductam; determinare quantitatem segmentorum* MH *&* HF.

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$; erit FM $= \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$ (§. 434), PR $= (\frac{1}{2}ab - bx) : a$ (§. 440), AT $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ (§. *cit.*), & AF $= \frac{1}{2}a - c$, consequenter TF $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x) + \frac{1}{2}a - c = ax : (a - 2x) + \frac{1}{2}a - c = (\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx) : (a - 2x)$. Ducatur FO ad tangentem TM normalis, erit OF parallela ipsi MR (§. 256 *Geom.*), ideoque angulus OFM ipsi HMR æqualis (§. 233 *Geom.*), & hinc ob rectos ad O & H æquales (§. 145 *Geom.*) reperitur (§. 267 *Geom.*) FM : FO = MR : MH, hoc est, FM : $\frac{PR . TF}{MR}$ = MR : MH (§. 457). Est itaque MH = PR . TF : FM, consequenter FM : TF = PR : MH. Quare

$$\tfrac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ae + 2cx}{a - 2x} = \frac{ab - 2bx}{2a} : \text{MH}$$

h.e. $a^2 - 2ac + 4cx : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ae + 2cx}{a - 2x} = ab - 2bx : \text{MH}$ (§. 184 *Arith.*)

& $\frac{a^2 - 2ac + 4cx}{a - 2x} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ae + 2cx}{a - 2x} = b : \text{MH}$ (§. 183 *Arith.*)

Est ergo MH $= \frac{1}{2}b$ (§. 149 *Arith.*).

Theorema: Si MR fuerit ad ellipsin normalis & ex R ducatur ad rectam FM, ex foco F in idem ellipsis punctum M ductam, normalis RH; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO 37.

459. *Hyperbola* est linea curva, in qua $ay^2 = abx + bx^2$, hoc est, $b : a = y^2 : ax + x^2$, seu quadratum semiordinatæ est ad rectangulum ex abscissa in rectam compositam ex eadem abscissa & recta quadam constante, quæ *Axis transversus, aut determinatus, vel latus transversum* audit, ut recta alia constans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transversum.

COROLLARIUM.

460. Est ergo etiam hic ut in ellipsi $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + x^2)$, $a = bx^2 : (y^2 - bx)$ &c. nisi quod hic contraria signa occurrant (§. 421 & seqq.).

DEFINITIO 38.

461. In hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem

axem transversum & parametrum, quia talis est axis conjugatus in ellipsi (§. 423).

DEFINITIO 39.

462. Si axis transversus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C *Centrum* appellatur.

PROBLEMA 198.

463. *Datis parametro & axe transverso* AB, *invenire distantiam foci a vertice* AF.

Sit parameter $= b$, AB $= a$; erit FN $= \frac{1}{2}b$ (§. 395), & (§. 459)

$$b : a = \tfrac{1}{4}b^2 : ax + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}ab^2 = abx + bx^2$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}a^2 + ax + x^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Invenitur ergo x quærendo inter $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ mediam proportionalem, ac inde auferendo $\frac{1}{2}a$: vel, quia $\sqrt{\frac{1}{4}ab} =$ CE (§. 461), si fiat AG $=$ EC, erit GC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Quare cum sit AC $= \frac{1}{2}a$, si ex centro C radio CG describatur arcus GF axem secans in F, erit AF $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a$, ideoque in F focus.

COROLLARIUM I.

464. Est ideo distantia foci a centro FC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Quare si FC$^2 = c^2$; erit CE$^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM 2.

465. Quia $ax + x^2 = \frac{1}{4}ab$, & $ax + x^2 =$ AF . FB (*per demonstr. in* §. 463), $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum semiaxis conjugati (§. 461); rectangulum ex AF in FB huic quadrato æquale est.

PROBLEMA 199.

466. *Invenire rationem semiordinatarum* PM & pm.

Sit axis transversus $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, Ap $= v$, pm $= z$; erit (§. 460)

$$y^2 : z^2 = bx + \frac{bx^2}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}$$

$$y^2 : z^2 = ax + x^2 : av + v^2 \text{ (§. 124)}$$

$$y^2 : z^2 = (a + x)x : (a + v)v$$

Theorema: In hyperbola quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex abscissa in rectam quandam compositam ex abscissa & axe transverso.

COROLLARIUM.

467. Crescentibus ideo abscissis x, crescunt quoque rectangula $ax + x^2$, consequenter & quadrata semiordinatarum y^2, ideoque semiordinatæ ipsæ. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA 200.

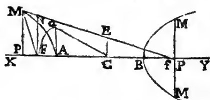
468. *Invenire rationem axis transversi ad axem conjugatum.*

Sit axis transversus $= a$, parameter $= b$; erit quadratum axis conjugati $= ab$ (§. 461). Hoc ergo ad quadratum transversi, ut ab ad a^2, hoc est, ut b ad a (§. 124).

Theorema: Quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi, ut parameter ad axem transversum.

COROL-

COROLLARIUM.



469. Quoniam $b : a = PM^2 : AP . PB$ (§. 459); quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum ex abscissa in compositam ex abscissa & axe transverso.

PROBLEMA 201.

470. *Sint duæ hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes* AX *&* BY *cum axe transverso communi* AB *in directum jacent. Ex focis* F *&* f *ad punctum* M *hyperbolæ unius ducantur rectæ* fM *&* FM: *determinare quantitatem harum rectarum.*

Sit $FC = fC = c$, reliqua ut in præcedentibus; erit $AF = c - \frac{1}{2}a$, $Af = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4}a^2$, $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$. Jam (§. 464) quadratum semiaxis conjugati $CE = c^2 - \frac{1}{4}a^2$. Porro (§. 469)

$$AC^2 : CE^2 = AP . BP : PM^2$$
$$\frac{1}{4}a^2 : c^2 - \frac{1}{4}a^2 = ax + x^2 : PM^2$$

Est itaque

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4}a^2$$

$$FM^2 = c^2 - 2cx - ac + \frac{1}{4}a^2 + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

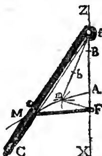
$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$

$$fM^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$fM = c + \frac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB.$$

COROLLARIUM 1.

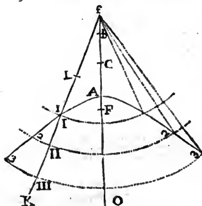


471. Datis ergo axe transverso & distantia foci a vertice, hyperbola motu continuo ita describitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero sui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipsum superet axe transverso AB. Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur, & stylo ad filum applicato regula emoveatur.

COROLLARIUM 2.

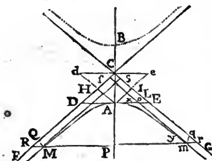
472. Iisdem datis puncta quotcunque hyperbolæ determinantur, si ex foco f intervallo æquali rectæ fA ex axe transverso AB & distantia foci a vertice Bf compositæ, vel intervallo quocunque majore quam eadem fA describatur arcus, &, facto $fb = AB$, intervallo residuo bm ex altero foco F alius ducatur arcus, qui priorem in primo casu tanget, in secundo semper secabit, e. gr. in m; erit enim ob $fm - Fm = AB$, punctum contactus vel intersectionis m in hyperbola (§. 470).

Vel



Vel commodius hyperbola ita describitur: fiat AB axi transverso æqualis determinenturque foci f & F (§. 463). Jungatur ipsi fO recta fK sub angulo acuto quocunque & ex centro f radiis ipsa fA majoribus describantur arcus quotcunque concentrici secantes rectam fK in I, II, III &c. Fiat fL = AB & ex foco F intervallis LI, LII, LIII &c. intersecentur arcus isti utrinque in 1, 2, 3; erunt puncta 1, 2, 3 &c. in hyperbola. Est enim fI = f1, fII = f2, fIII = f3 &c. (§. 40 *Geom.*). Sed F1 = LI, F2 = LII, F3 = LIII &c. *per constr.* Ergo f1 − F1 = fI − LI = AB, f2 − F2 = fII − LII = AB, f3 − F3 = fIII − LIII = AB &c. consequenter puncta 1, 2, 3 &c. in hyperbola (§. 470).

PROBLEMA 202.



473. *Determinare situm rectæ* DE, *quæ per verticem* A *ipsi ordinatæ* Mm *parallela ducitur.*

Sit AP $= x$, PM $= y$, parameter $= b$, axis transversus $= a$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$ (§. 460). Quoniam in vertice A fit $x = 0$; erit etiam $y = 0$, consequenter DE tota extra hyperbolam cadit, eamque ideo tangit.

Theorema: Si recta DE per verticem A ordinatis Mm parallela ducatur; hyperbolam in vertice A tangit.

DEFINITIO 40.

474. Si recta DE per verticem hyperbolæ A ordinatis Mm parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE semiaxi, præterea ex centro C per D & E agantur rectæ CF & CG; rectæ hæ dicuntur *Asymptoti hyperbolæ*.

COROLLARIUM 1.

475. Quoniam (§. 268 *Geom.*) CA : AE = CP : Pr, & CA : (DA) AE = CP : PR; erit Pr = PR (§. 177 *Arith.*). Quare cum sit PM = Pm; erit quoque MR = mr (§. 91 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

476. Si AI ducatur parallela ipsi DC & AH ipsi CE; erit EA : ED = AI : DC (§. 268 *Geom.*). Sed EA = $\frac{1}{2}$ED (§. 474). Ergo AI = $\frac{1}{2}$DC = $\frac{1}{2}$CE. Et quoniam porro EA : AD = EI : IC (§. 268 *Geom.*); erit EI = CI = $\frac{1}{2}$EC, consequenter AI = CI (§. 87 *Arith.*).

DEFINITIO 41.

477. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia hyperbolæ*.

PROBLEMA 203.

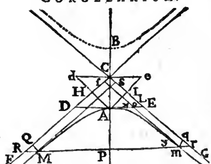
478. *Determinare potentiam hyperbolæ.*

Sit CA $= \frac{1}{2}a$, AE $= \frac{1}{2}c$; erit CE $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ (§. 417 *Geom.*), ideoque CI $= \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$. Ergo CI^2 $= \frac{a^2 + c^2}{16}$.

Theorema: Potentia hyperbolæ est decima sexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum semiaxium conjugatorum.

COROL-

COROLLARIUM.



479. Quoniam $c^2 = ab$ (§. 461); erit $CI^2 = \frac{a^2+ab}{16} = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$, hoc est, potentia hyperbolæ æquatur rectangulo ex quarta parte axis transversi in quartam partem aggregati ex axe transverso & parametro.

PROBLEMA 204.

480. *Determinare differentiam quadratorum* PM *&* PR.

Quoniam $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 461) & $CP = \frac{1}{2}a + x$, præterea (§. 268 *Geom.*)

$$CA : AD = CP : PR$$
$$\tfrac{1}{2}a : \sqrt{\tfrac{1}{4}ab} = \tfrac{1}{2}a + x : PR$$

erit $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{a}$. Quare

$$PR^2 = \tfrac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$
$$PM^2 = \quad\quad bx + bx^2 : a \quad (\S.460)$$
$$PR^2 - PM^2 = \tfrac{1}{4}ab = DA^2$$

Theorema: Si in hyperbola semiordinata PM producatur, donec asymptoto in R occurrat; erit differentia quadratorum PM & PR æqualis quadrato semiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

481. Crescente igitur semiordinata PM, decrescit recta MR, ideoque hyperbola ad asymptotum propius accedit. Nunquam tamen cum ea concurrere potest, quia cum sit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHOLION.

482. *En rationem, cur lineas* CF *&* CG *ἀσυμπτώτους seu non coincidentes vocaverint veteres.*

PROBLEMA 205.

483. *Determinare quantitatem rectanguli ex* MR *in* Mr.

Sit $PR = z$, $PM = y$; erit $MR = z - y$, $Mr = z + y$, consequenter $MR \cdot Mr = z^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$.

Theorema: In hyperbola rectangulum ex MR & Mr æquatur differentiæ quadratorum PR^2 & PM^2.

COROLLARIUM.

484. Idem ergo rectangulum æquale est quadrato semiaxis conjugati DA (§. 480), consequenter omnia rectangula eodem modo formata æqualia sunt.

PROELBMA 206.

485. *Si* QM *&* fm *cum asymptoto* CG, qm *&* SM *cum altera* CF *parallelæ ducantur; determinare rationem rectangulorum* QM . MS *&* qm . mf.

Sit $MR = mr$ (§. 475) $= a$, $Rm = rM$ (§. 88 *Arith.*) $= b$, $QM = v$, $mq = z$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : mf$$
$$a : v = b : \tfrac{bv}{a}$$
$$rm : mq = rM : MS$$
$$a : z = b : \tfrac{bz}{a}$$

Est ergo $MQ \cdot MS = bvz : a$, & $mq \cdot mf = bvz : a$, consequenter $MQ \cdot MS = mq \cdot mf$.

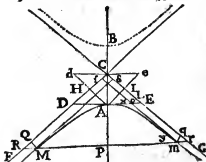
Theorema: Si QM & *mf* cum asymptoto CG, *qm* vero & MS cum altera CF parallelæ ducantur; rectangula ex QM in MS, & *qm* in *mf* æqualia sunt.

COROLLARIUM.

486. Quoniam $Cq = fm$ & $CQ = SM$ (§. 257 *Geom.*); etiam rectangula ex Cq in qm & ex CQ in QM æqualia sunt.

PROBLEMA 207.

487. *Determinare rationem rectanguli ex* qm *in* mf *ad potentiam hyperbolæ seu* AI^2.



Sit $mr = z$, $qm = y$, AE $= c$; erit, ob parallelas AE & Pr, angulus E $= r$, & ob parallelas AI & qm, angulus I $= q$ (§. 233 *Geom.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mr : qm = AE : AI$$
$$z : y = c : \frac{cy}{z}$$

Sed IE $=$ CI, & AI $=$ CI (§. 476). Igitur IE $=$ AI (§. 87 *Arith.*), ac proinde etiam IE $= \frac{cy}{z}$

Porro ob mR . $mr =$ AE² (§. 484), erit (§. 299 *Arith.*)

$$mr : AE = AE : mR$$
$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Denique ob parallelas fm & CE, $o = x$, & ob parallelas DE & Rm, $x = y$ (§. 233 *Geom.*), ideoque $o = y$ (§. 87 *Arith.*). Similiter ob parallelas AI & CR, angulus IAE $=$ CDE, & ob parallelas DE & Rm, angulus CDE $= f$Rm (§. 233 *Geom.*). Ergo angulus IAE $=$ R (§. 87 *Arith.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$AE : IE = mR : fm$$
$$c : \frac{cy}{z} = \frac{c^2}{z} : \frac{c^2y}{z^2}$$

Quare fm, $qm = c^2y^2 : z^2$. Est vero etiam AI² $= c^2y^2 : z^2$. Ergo $fm . qm$ $=$ AI².

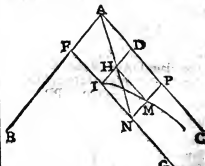
Theorema: Si qm cum asymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex qm in Cq æquatur potentiæ hyperbolæ.

COROLLARIUM 1.

488. Quare si fiat CI $=$ AI (§. 476) $= a$, C$q = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$; quæ est æquatio naturam hyperbolæ intra asymptotos declarans.

COROLLARIUM 2.

489. Datis ergo (*Vid. Fig. præc.*) asymptotis positione & latere potentiæ hyperbolæ CI vel AI, si in una asymptotorum CG sumantur abscissæ quotcunque, invenientur totidem semiordinatæ & per eas puncta quotlibet hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abscissas & latus potentiæ CI tertias proportionales (§. 272 *Geom.*).



Nimirum sint AB & AC asymptoti, AD $=$ DI $= a$ latus potentiæ hyperbolæ. Sit AP $= x$. Ducatur FG parallela ipsi AC & PN parallela ipsi DI; erit PN $=$ DI (§. 257 *Geom.*) $= a$. Ducatur AN secans DI in H; erit (§. 268 *Geom.*)

$$AP : PN = AD : DH$$
$$x : a = a : DH$$

ideoque DH $= a^2 : x$. Quare si fiat PM ($= y$) $=$ DH; erit $y = a^2 : x$, consequenter $yx = a^2$, ideoque punctum M in hyperbola (§. 488).

COROLLARIUM 3.

490. Quodsi abscissæ (*Vid. Fig. 1 hujus pag.*) non computentur a centro C, sed ab alio quovis puncto L, dicaturque CL $= b$; erit C$q = b + x$, consequenter $a^2 = by + xy$,

PRO-

PROBLEMA 208.

491. *Determinare in hyperbola subtangentem* PT *& subnormalem* PR.

Sit parameter $= b$, axis transversus $= a$, AP $= x$, PM $= y$, RM $= z$, RA $= t$; erit PR $= t - x$, PM$^2 = z^2 - t^2 + 2tx - x^2$ (§. 417 *Geom.*). Quare (§. 460)

$$z^2 - t^2 + 2tx - x^2 = bx + bx^2 : a$$

$$az^2 - at^2 + 2atx - ax^2 = abx + bx^2$$

$$bx^2 + ax^2 + abx + at^2 = 0$$
$$- 2atx - az^2$$

$b + a$ Divid.

$$x^2 + \frac{ab - 2at}{b + a}x + \frac{at^2 - az^2}{b + a} = 0$$

Fiat jam ob rationes supra (§. 410) allatas $x - v = 0$; erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, & quia hæc æquatio eadem cum præcedente, habetur

$$\frac{ab - 2at}{b + a} = - 2v$$

$$ab - 2at = - 2bv - 2av$$

$$ab + 2bv + 2av = 2at$$

$$\tfrac{1}{2}b + \frac{bv}{a} + v = t$$

hoc est, quia $x = v$,

$\tfrac{1}{2}b + bx : a + x = t =$ RA.

Ergo PR $= \tfrac{1}{2}b + bx : a + x - x = \tfrac{1}{2}b + bx : a = (\tfrac{1}{2}a + x)b : a$.

Theorema: In hyperbola est ut axis transversus ad parametrum, ita aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad subnormalem.

Porro (§. 409)

PR : PM $=$ PM : PT

$$\frac{\tfrac{1}{2}a + x}{a}b : \sqrt{(bx + \frac{bx^2}{a})} \text{ (§. 460)} = \sqrt{(bx + \frac{bx^2}{a})} : \text{PT}$$

Reperitur ergo PT $= (abx + bx^2) : (\tfrac{1}{2}a + x)b = (ax + x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x)$.

Theorema: In hyperbola est ut aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam ita aggregatum ex integro axe transverso & abscissa ad subtangentem.

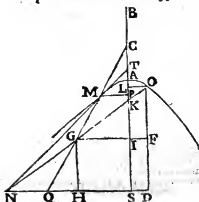
Denique AT $= (ax + x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x) - x = (ax + x^2 - \tfrac{1}{2}ax - x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x) = \tfrac{1}{2}ax : (\tfrac{1}{2}a + x)$.

Theorema: In hyperbola est ut aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam, ita semiaxis transversus ad rectam AT inter verticem & tangentem interceptam.

PROBLEMA 209.

492. *Ducta* NO *tangenti* TM *parallela, & ex centro* C *per contactum* M *recta* CQ, *quæ* NO *secat in* G, *determinare rationem segmentorum* GN *&* GO.

Ducatur ex N perpendicularis NS ad axem AS continuanda in D, donec rectæ OD axi AS parallelæ occurrat in D. Ducantur porro GH ad ND, & GF, MP, OL ad axem AS



perpendiculares; erit GI ipsi PM parallela (§.256 *Geom.*). Sit AB axis transversus $= a$, AP $= x$, PM $= y$, PC $= \frac{1}{2}a + x = p$, GI $=$ HS $= v$, GF $=$ HD $= z$; erit IF $=$ DS $=$ LO $= z - v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = GI : IC$$

$$y : p = v : \frac{pv}{y}$$

Ob parallelas TM & GO (§. 233 *Geom.*) angulus K $=$ T & ob parallelas KI & OF *per constr.* angulus K $=$ O, consequenter O $=$ T. Quare cum praeterea F & P sint recti; erit (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GF : FO$$

$$y : \frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} (\S.491) = z : \frac{(ax + x^2)z}{(\frac{1}{2}a + x)y}$$

Ponatur brevitatis gratia $ax + x^2 = q$ & $\frac{1}{2}a + x = p$ ut ante; erit FO $= qz : py$. Ergo LC $=$ IC $-$ FO $= pv : y - qz : py = (p^2v - qz) : py$, & LA $=$ LC $-$ AC $= (p^2v - qz - \frac{1}{2}apy) : py$, LB $=$ LC $+$ CB $= (p^2v - qz + \frac{1}{2}apy) : py$. Est vero (§. 466)

$$AP . PB : AL . LB = PM^2 : OL^2$$

$$q : \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2y^2} = y^2 : OL^2$$

Quare

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2q}$$

Jam $y^2 = (ax + x^2)b : a$ (§.459). Cum itaque posuerimus $ax + x^2 = q$; erit $y^2 = bq : a$. Hoc valore in expressione ipsius OL^2 substituto habetur

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}.$$

Enimvero $LO^2 = z^2 - 2zv + v^2$.

Habemus ergo

$$z^2 - 2zv + v^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}$$

$$p^2qz^2 - 2p^2qzv + p^2qv^2 = p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq$$

$$\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2 = q^2z^2 - p^2qz^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q} = z^2$$

Quodsi HN dicatur z & calculus eodem modo instituatur; reperietur denuo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$. Unde liquet esse HN$^2 =$ GF$^2 =$ HD^2, consequenter HN $=$ HD. Quoniam igitur (§.268 *Geom.*) HN : HD $=$ NG : GO; erit NG $=$ GO.

Theorema: Recta CQ ex centro C per contactum M ducta dividit rectas NO tangenti TM parallelas bifariam.

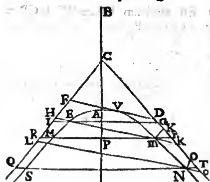
COROLLARIUM.

493. Est itaque CQ diameter, NO ordinatim ad eam applicata (§. 368. 370); MC vero est semidiameter transversa.

PROBLEMA 210.

494. *Ductis* (Vid. Fig. seq.) *duabus rectis* Hm *&* mK *ex eodem hyperbolae puncto* m, *quae utrinque in asymptotis* CQ *&* CT *terminentur*, *itidemque ex alio hyperbolae puncto* N *ductis duabus aliis* LN *&* NO *prioribus parallelis*, *determinare rationem rectangulorum* Hm . mK *&* LN . NO.

Ducan-



Ducantur ordinatæ ad axem utrinque usque ad asymptotos continuandæ Rr & QT.

Sit $Rm = y$, $QN = z$, $TN = t$. Quoniam $Rm \cdot mr = QN \cdot NT$ (§.484); erit (§. 299 *Arith.*)

$$Rm : QN = TN : mr$$

$$y : z = t : \frac{tz}{y}$$

Sit porro $Hm = a$, $mK = b$. Quoniam ob parallelas mr & NT, angulus $r = T$, & ob parallelas Km & NO, $K = O$ (§.233 *Geom.*), erit (§.267 *Geom.*)

$$mr : Km = TN : NO$$

$$\frac{tz}{y} : b = t : \frac{by}{z}$$

Ob similem rationem, nempe similitudinem △△ QLN & RHm

$$Rm : Hm = QN : LN$$

$$y : a = z : \frac{az}{y}$$

Ergo $LN \cdot NO = abzy : zy = ab$. Est vero etiam $Hm \cdot mK = ab$. Sunt igitur duo ista rectangula æqualia.

Theorema: Si intra asymptotos hyperbolæ ex ejus puncto *m* ducantur uteunque duæ rectæ Hm & mK & iis aliæ duæ parallelæ LN & NO; erit $Hm \cdot mK = LN \cdot NO$.

Idem invenitur, si ductæ rectæ Hmk agatur parallela LNo. Nempe in hoc etiam casu $Hm \cdot mk = LN \cdot No$.

COROLLARIUM.

495. Omnia igitur rectangula ex rectis eidem Hk vel duabus Hm & mK parallelis eodem modo formata inter se æqualia sunt.

PROBLEMA 211.

496. *Si recta* Hk *utcunque intra asymptotos* CQ *&* CT *ducatur, determinare rationem segmentorum* HE *&* mk *inter hyperbolam & asymptotos intercepturum.*

Ducantur per E & *m* rectæ IG & Rr ad axem normales, fiatque $Rm = a$, $IE = b$, $EG = c$, $Hm = x$, $mk = y$. Quia $IE \cdot EG = Rm \cdot mr$ (§.484); erit (§. 299 *Arith.*)

$$mR : IE = EG : mr$$

$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Porro ob IG ipsi Rr parallelam (§.268 *Geom.*)

$$mR : Hm = IE : EH$$

$$a : x = b : \frac{bx}{a}$$

$$rm : km = EG : Ek$$

$$\frac{bc}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$$

Est itaque $Ek \cdot EH = abxy : ab = xy = Hm \cdot mk$. Quare

$$Ek \cdot mk = mH : HE$$

$Ek - mk : mk = mH - HE : HE$ (§.193 *Arith.*),

hoc est, $Em : mk = Em : HE$,

consequenter $mk = HE$ (§.177 *Arith.*).

Theorema: Si inter asymptotos recta Hk utcunque ducatur, segmenta HE & mk inter hyperbolam & asymptotos utrinque intercepta æqualia sunt.

COROLLARIUM I.

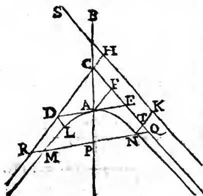
497. Quando fit $Em = 0$; recta Hk hyperbolam tangit. Tangens ideo FD inter asymptotos intercepta in contactu V bifariam dividitur.

COROLLARIUM 2.

498. Rectangulum itaque ex segmentis Hm & mk rectæ tangenti FD parallelæ, æquatur quadrato tangentis dimidiæ DV (§. 495).

PRO-

PROBLEMA 212.



499. *Determinare relationem semiordinatæ* PM *ad diametri abscissam* AP.

Sit AB diameter transversa, DE diameter conjugata, ideoque ordinatæ NM parallela. Sit in C centrum hyperbolæ & CQ atque CR sint ejus asymptoti. Fiat $DA = c$, $CA = r$, $PM = y$, $CP = v$, & $CB = AC$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$CA : DA = CP : PR$$

$$r : c = v : \frac{cv}{r}$$

Quare $RM = \frac{cv}{r} - y = \frac{cv - ry}{r}$ & $MQ = \frac{cv + ry}{r}$ (§. 496), consequenter $RM . MQ = (c^2v^2 - r^2y^2) : r^2$. Est vero $RM . MQ = DA^2 = c^2$ (§. 498). Habemus itaque

$$(c^2v^2 - r^2y^2) : r^2 = c^2$$

$$c^2v^2 - r^2y^2 = r^2c^2$$

$$c^2v^2 - r^2c^2 = r^2y^2$$

quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam

$$y^2 : v^2 - r^2 = c^2 : r^2$$

$$PM^2 : AP . PB = DA^2 : AC^2$$

Est nimirum $BP = BC + CP = r + v$, & $AP = CP - CA = v - r$, ideoque $AP . PB = (v - r(v + r) = v^2 - r^2$.

Theorema: Quadratum semiordinatæ in hyperbola est ad rectangulum ex abscissa & aggregato ex diametro transversa AB & abscissa AP, ut quadratum semidiametri conjugatæ AD ad quadratum semidiametri transversæ CA.

COROLLARIUM.

500. Quodsi fiat $AP = x$, & $2r = AB = a$; erit $v^2 - r^2 = ax + x^2$, consequenter $y^2 = (c^2ax + c^2x^2) : \frac{1}{4}a^2 = \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$. Fiat $4c^2 : a = b$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$. Eadem ergo æquatio hyperbolæ naturam definit respectu diametri, quæ eam exprimit respectu axis (§. 459), estque parameter tertia proportionalis ad diametros conjugatas AB & DE (§. 461). Unde liquet easdem proprietates hyperbolæ competere respectu diametri, quæ superius ex æquatione fundamentali respectu axis deduximus.

PROBLEMA 213.

501. *Ductis* AF *&* TN *asymptoto* CR *parallelis, determinare rationem rectanguli ex* TN *in* TC *ad rectangulum ex* AF *in* FC.

Sit $CF = a$, $AF = b$, $AD = c$, $RN = z$; erit ob $AE = DA$, etiam $EF = FC = a$ (§. 268 *Geom.*). Et quoniam $RN . NQ = DA^2$ (§. 498), erit (§. 299 *Arith.*)

$$RN : DA = DA : NQ$$

$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Porro ob parallelas AF & NT, angulus AFE = NTQ, & ob parallelas AE & NQ, angulus AEF = NQT (§. 233 *Geom.*); ideoque (§. 267 *Geom.*)

$$AE : AF = QN : TN$$

$$c : b = \frac{c^2}{z} : \frac{bc}{z}$$

$$AE : FE = QN : TQ$$

$$c : a = \frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z}$$

QN

QN : QT = RN : TC (§. 168 *Geom.*)

$$\frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z} = z : \frac{az}{c}$$

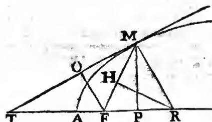
Ergo $TC.TN = \frac{azbc}{cz} = ab = CF.AF.$

Theorema: Si ex vertice A & quocunque hyperbolæ puncto N ducantur AF & NT cum asymptoto CR parallelæ; erit rectangulum ex NT in TC æquale rectangulo ex FA in FC.

COROLLARIUM.

502. Quodsi igitur fiat $TC = x$, $TN = y$; æquatio hyperbolæ naturam inter asymptotos respectu diametri declarans, erit $xy = ab$, vel ob FA = FC (§. 476), $= a^2$.

PROBLEMA 214.



503. *Determinare quantitatem rectæ FO ex foco F ad tangentem hyperbolæ TM perpendicularis.*

Eodem prorsus, quo supra (§. 457), modo reperitur FO . RM = PR . TF, ut verba singula huc transcribere liceat.

Theorema: Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta FO ex foco ad tangentem perpendiculari.

PROBLEMA 215.

504. *Si in F fuerit focus hyperbolæ & MR ad eam normalis, HR vero normalis ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam; determinare quantitatem segmentorum MH & HF.*

Sit parameter $= b$, axis transversus $= a$, distantia foci a centro $= c$; erit $FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$ (§. 470), $PR = (\frac{1}{2}ab + bx) : a$ & $AT = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$ (§. 491), $AF = c - \frac{1}{2}a$, $TF = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x) + c - \frac{1}{2}a = ax : (a + 2x) + c - \frac{1}{2}a = (ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx) : (a + 2x)$. Ducta FO ad tangentem TM normalis, reperitur prorsus ut supra, iisdem retentis verbis, FM : TF = PR : MH (§. 458). Quare

$$c - \tfrac{1}{2}a + \frac{2cx}{a} : \frac{ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx}{a + 2x} = \frac{\frac{1}{2}ab + bx}{a} : MH$$

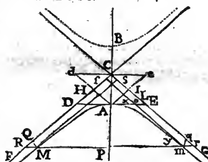
h.e. $2ac - a^2 + 4cx : \frac{ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx}{a + 2x} = ab + 2bx : MH$ (§. 184 *Arith.*)

$$\frac{2ac - a^2 + 4cx}{a + 2x} : \frac{ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx}{a + 2x} = b : MH \text{ (§. 183 Arith.)}$$

Est ergo $MH = \frac{1}{2}b$ (§. 149 *Arith.*).

Theorema: Si MR fuerit ad hyperbolam normalis & ex R ducatur ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam, normalis RH; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO 42.



505. *Hyperbola æquilatera* dicitur, in qua axes conjugati AB & DE sunt æquales.

COROLLARIUM 1.

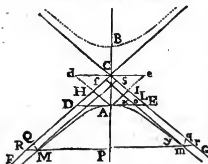
506. Cum parameter sit tertia proportionalis ad axes conjugatos (§. 461); ipsa etiam axibus æqualis est.

COROLLARIUM 2.

507. Quare si in æquatione $y^2 = bx + bx^2 : a$ fiat $b = a$; æquatio $y^2 = ax + x^2$ naturam hyperbolæ æquilateræ declarat.

COROL-

COROLLARIUM 3.



508. Hinc quadrata ordinatarum y^2 & z^2 sunt inter se ut $ax + x^2$ & $av + v^2$, hoc est, ut rectangula ex abscissis in rectas compositas ex abscissis & axe determinato vel parametro.

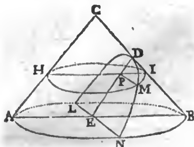
COROLLARIUM 4.

509. Si sint $CP = x$, $CA = r$, erit $AP = x - r$ & $PB = r + x$, consequenter $y^2 = x^2 - r^2$.

COROLLARIUM 5.

510. Quoniam $AE = CA$ (§. 506); erit ACE angulus semirectus (§ 241 *Geom.*), consequenter angulus asymptotorum FCG in hyperbola æquilatera rectus.

PROBLEMA 216.



511. *Investigare naturam curvæ, quæ oritur, si conus* ABC *ita secetur ut sectionis axis* DE *sit lateri coni* AC *parallelus, ipsum vero planum sectionis* LDN *secet basin coni secundum rectam* LN, *quæ ad basin sectionis triangularis* AB *sit perpendicularis.*

Secetur conus plano HMI basi ANB parallelo: erit HMI circulus (§. 468 *Geom.*), consequenter cum uterque circulus HMI & ANB per sectionem triangularem ACB secetur in HI & AB, & a sectione data in PM & LN; erunt cum HI & AB, tum PM & LN inter se parallelæ (§. 499 *Geom.*). Quare cum sit EN perpendicularis ad AB *per hypoth.* erit etiam PM perpendicularis ad HI (§. 492 *Geom.*), consequenter cum DE & HI, itemque DE & AB sint in eodem plano sectionis triangularis, EN & PM etiam perpendiculares sunt ad DE (§. 484 *Geom.*), ideoque semiordinatæ ad axem DE applicatæ (§. 368. 370). Et quia AH parallela ipsi EP *per hypoth.* HP vero parallela ipsi AE *per demonstr.* erit $HP = AE$ (§. 257 *Geom.*). Sit jam $AE = HP = v$, $PI = t$, $DP = x$, $DE = z$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DP : DE = PI : EB$$

$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

Ergo $PM^2 = HP \cdot PI$ (§. 377) $= tv$, & $EN^2 = AE \cdot EB$ (§. *cit.*) $= tzv : x$. Est ergo (positis $PM^2 = y^2$, $EN^2 = q^2$)

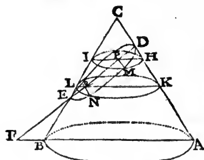
$$y^2 : q^2 = tv : \frac{tzv}{x}$$

hoc est $\left.\begin{aligned} &= tvx : tzv \\ &= x \;\; : z \end{aligned}\right\}$ (§. 124)

Est itaque curva DMNLD parabola (§. 402).

PRO-

PROBLEMA 217.



512. *Si conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DE *continuatus cum basi* AB *sectionis triangularis continuata in* F *concurrat, & planum sectionis continuatum eam ad angulos rectos secet, sectio vero non sit subcontraria, hoc est* △△ CED, CBA *similia non sint, neque anguli* CED, BAC *æquales; invenire naturam curvæ ex hac sectione prodeuntis* DMNELD.

Eodem, quo ante (§. 511), modo ostenditur esse PM & QN cum semiordinatas circulorum IMH & LNK, tum curvæ DMNE. Sit jam DE $= a$, DP$=x$, DQ$=v$, PH$=t$, QL $=f$; erit PE $= a-x$, QE$=a-v$ & (§. 268 *Geom.*)

$$DP : PH = DQ : QK$$

$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$

$$EQ : QL = EP : PI$$

$$a-v : f = a-x : \frac{fa-fx}{a-v}$$

Quare (§. 377) PM^2 = HP . PI $= (tfa-tfx):(a-v)$ & QN^2=KQ . QL $= vtf : x$. Est ideo.

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tfa-tfx}{a-v} : \frac{vtf}{x}$$

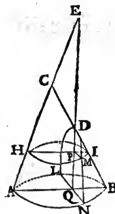
hoc est
$$\left.\begin{array}{l} = tfax-tfx^2 : avtf-v^2tf \\ = ax-x^2 : av-v^2 \end{array}\right\} (\S\ 124)$$

Est itaque curva DMNELD circulus aut ellipsis (§. 377. 429).

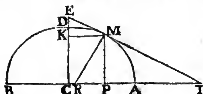
Ponamus curvam hanc esse circulum; erit EQ . QD = QN^2 (§. 377), est vero etiam LQ . QK = QN^2 (§. *cit.*). Igitur EQ . QD = LQ . QK (§. 87 *Arith.*); ideoque EQ : LQ = QK : QD (§. 299 *Arith.*). Cum vero præterea æquales sint anguli ad verticem Q (§. 156 *Geom.*), erunt similia △△ ELQ & QDK (§. 183 *Geom.*), consequenter (§. 175 *Geom.*) æquales anguli homologi LEQ & QKD seu BAC (§. 233 *Geom.*), quod est contra *hypothesin*. Non est igitur circulus curva DMNELD, ac proinde ellipsin esse reliquum est.

PROBLEMA 218.

513. *Si conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DQ *continuatus cum latere coni* AC *continuato in* E *cōcurrat, planum vero sectionis* LDN *secet basin coni secundum rectam* LN, *quæ ad basin* AB *sectionis triangularis sit perpendicularis; invenire naturam curvæ* LDN, *quæ ex hac sectione resultat.*



PROBLEMA 192.



448. *Determinare quantitatem subtangentis* KE *in axe conjugato.*

Si tangens TM continuetur, donec axi conjugato continuato in E occurrat, & ex M demittatur perpendicularis MK = PC (§. 256. 257 *Geom.*); erit ob parallelismum rectarum KM & CT angulus T = EMK (§. 233 *Geom.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

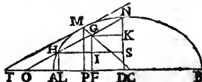
$$TP : PM = MK : KE$$

$$\frac{r^2 - v^2}{v} (\S. 447) : y = v : \frac{v^2 y}{r^2 - v^2}$$

Quodsi fiat DC $= c$, DK $= z$, erit KC = PM $= y = c - z$ & $v^2 = \frac{2r^2 z}{c} - \frac{r^2 z^2}{c^2}$ (§. 439). Hinc $r^2 - v^2 = (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) : c^2$ & $v^2 y = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : c^2$. Quare $v^2 y : (r^2 - v^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2) : (cr^2 - r^2 z) = (2cz - z^2) : (c - z)$.

Expressio itaque subtangentis in axe conjugato eadem, quæ in transverso (§. 440).

PROBLEMA 193.



449. *Si recta* HN *tangenti* TM *parallela ducatur & punctum contactus* M *atque centrum* C *jungantur recta* MC, *quæ secat* HN *in* G; *determinare rationem rectarum* HG & GN.

Sit AB $= a$, PM $= y$, PC $= c$, FG $=$ KD $= t$, GI $=$ KS $= z$; erit IF $=$ HL $=$ DS $= t - z$, HL$^2 = t^2 - 2tz + z^2$. Opera nunc danda, ut HL^2 alia adhuc ratione exprimatur. Est itaque (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = FG : FC$$

$$y : c = t : \frac{tc}{y}$$

Et quia △ TMP ∽ △ FOG (§. 233 §. 267 *Geom.*), & △ GIH ∽ △ FOG (§. 268 *Geom.*); erit etiam △ TMP ∽ △ GIH, consequenter (§. 175 *Geom.*)

$$PM : PT = GI : HI$$

$$y : \frac{ax - x^2}{c} = z : \frac{(ax - x^2)z}{cy} (\S. 440)$$

Ponamus brevitatis gratia $ax - x^2 = v$; erit FL = HI $= vz : cy$. Ergo CL = FL + FC $= tc : y + vz : cy = (tc^2 + vz) : cy$. Hinc AL = AC − CL $= \frac{1}{2}a - (tc^2 - vz) : cy = (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy$, & BL = AB − AL $= a - (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy = (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy$. Est vero (§. 429)

$$AP . PB : LA . LB = PM^2 : HL^2$$

$$v : \frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - 2c^2 vz - v^2 z^2}{c^2 y^2} = y^2 : HL^2$$

Hinc HL$^2 =$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - 2tc^2 vz - v^2 z^2}{c^2 v} = t^2 - 2tz + z^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - 2tc^2 vz - v^2 z^2 = t^2 c^2 v - 2tc^2 zv + z^2 c^2 v$$

$$\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - v^2 z^2 = t^2 c^2 v + z^2 c^2 v$$

$$\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - t^2 c^2 v = v^2 z^2 + c^2 v z^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 y^2 - t^2 c^4 - t^2 c^2 v}{v^2 + c^2 v} = z^2$$

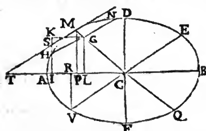
Quodsi jam KN dicatur z, & reliqua maneant ut ante; reperietur eodem modo

modo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2e^2y^2 - t^2c^4 - z^2c^2v}{v^2 + c^2v}$, consequenter $KN^2 = KS^2$, ideoque & $KN = KS$.

Est vero (§. 268 *Geom.*) $KN : KS = GN : HG$. Ergo $GN = HG$.

Theorema: Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MC per contactum M & centrum ellipsis C transiens eam bifariam secat.

COROLLARIUM I.



450. Est ergo MQ diameter, HN ejus ordinata (§. 368. 370).

COROLLARIUM 2.

451. Cum vero parallelæ HN quamcunque aliam, & rectæ MQ itidem quamcunque aliam substituere liceat; omnes rectæ per centrum transeuntes & in peripheria utrinque terminatæ, sunt diametri, ipsisque coordinatæ sunt tangentibus parallelæ.

COROLLARIUM 3.

452. Est ergo etiam ECV diameter, consequenter (si eadem parallela sit ipsi HN) MQ & EV sunt diametri conjugatæ (§. 374).

PROBLEMA 194.

453. *Si ex diametri* VE *tangenti* TM *parallelæ, extremitate* V *perpendicularis* VR *demittatur in axem* AB; *determinare quantitatem rectæ* RC.

Sit $CA = r$, $CR = v$, $PT = t$, $PC = x$; erit $AR = r - v$, $RB = r + v$, consequenter $AP.PB = tx$ (§. 446), $AR.RB = r^2 - v^2 = tx + x^2 - v^2$ (§. 442). Quoniam VE ipsi TM parallela *per hypoth.* erit $MTC = TCV$ (§. 233 *Geom.*). Quare cum anguli ad P & R sint recti *per constr.* erit (§. 267 *Geom.*) $PM : RV = TP : RC$. Hinc $PM^2 : RV^2 = TP^2 : RC^2$ (§. 124). Est vero etiam $PM^2 : RV^2 = AP.PB : AR.RB$ (§. 429). Ergo (§. 167 *Arith.*)

$$AP.PB : AR.RB = TP^2 : RC^2$$
$$tx : tx + x^2 - v^2 = t^2 : v^2$$
$$tv^2x = t^3x + t^2x^2 - t^2v^2$$
$$v^2x = t^2x + tx^2 - tv^2$$
$$tv^2 + xv^2 = t^2x + tx^2$$
$$v^2 = tx$$

hoc est, $CR^2 = AP.PB$, consequenter $AP : CR = CR : PB$.

PROBLEMA 195.

454. *Determinare quantitatem semiordinatæ* GH *ad diametrum ellipsis* MQ.

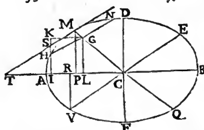
Ductis KI ipsi FD, & KG ipsi AB parallelis, fiat $CP = x$, $AC = r$, $PT = t$, $PM = y$, $KG = IL = m$, $LC = n$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : PM = CL : LG$$
$$x : y = n : \frac{ny}{x}$$

Porro ob parallelas TM & HN *per constr.* angulus $TSI = KHG$ (§. 233 *Geom.*), ideoque ob rectos ad A & K *per constr.* $T = HGK$ (§. 246 *Geom.*), & hinc (§. 267 *Geom.*)

$$TP : PM = KG : KH$$
$$t : y = m : \frac{my}{t}$$
$$HI = KI - KH = \frac{ny}{x} - \frac{my}{t}$$
$$CI = CL + LI = n + m$$
$$HI^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2}$$
$$CI^2 = n^2 + 2mn + m^2$$
$$AP.PB = AC^2 - PC^2 = r^2 - x^2$$

(§. 432)



$AI . IB = AC^2 - CI^2 = r^2 - n^2 - 2mn - m^2$ (§. *cit.*)
Est vero (§. 429)

$$AP . PB : AI . IB = PM^2 : HI^2$$
$$r^2 - x^2 : r^2 - n^2 - 2mn - m^2 = y^2 : HI^2$$

Unde elicitur $HI^2 = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$

Quare

$$\frac{r^2v^2}{x^4} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

Sed $\frac{2mny^2}{tx} = \frac{2mny^2}{r^2 - x^2}$ (§. 446). Ergo

$$\frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

y^2 Divid.

$$\frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{r^2 - n^2 - m^2}{r^2 - x^2}$$

x^2 Mult.

$$n^2 + \frac{m^2x^2}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} - n^2$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2 + n^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2}{r^2 - x^2}$$

hoc est, ob $t^2x^2 = (r^2 - x^2)^2$ (§. 446),

$$m^2x^4 = (r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2)(r^2 - x^2)$$
$$= r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + m^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^2 - m^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} - x^2 + n^2$$

$$m^2 = r^2 + n^2 - x^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} = KG^2$$

Sit jam $CM = v$, erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : CM = CL : CG$$
$$x : v = n : \frac{vn}{x}$$

Ergo $MG = MC - CG = v - vn : x$, & $GQ = GC + MC = v + vn : x$, ac proinde $MG . GQ = v^2 - v^2n^2 : x^2$.

Quodsi $v^2 - v^2n^2 : x^2 = MG . QG$ multiplices per $r^2 - x^2 = CR^2$ (§. 453), & $r^2 + n^2 - x^2 - r^2n^2 : x^2 = KG^2$ per $v^2 = CM^2$; utrobique prodit $r^2v^2 + n^2v^2 - x^2v^2 - r^2n^2v^2 : x^2$. Est itaque $MG . QG . CR^2 = KG^2 . CM^2$, ideoque (§. 299 *Arith.*) $KG^2 : CR^2 = MG . QG : CM^2$. Jam ob parallelas EV & HN *per hypoth.* MCV = MGH (§. 233 *Geom.*), & ob parallelas KG & RC *per constr.* MGK = MCR (§. *cit.*). Ergo KGH = RCV (§. 91 *Arith.*), consequenter $KG^2 : CR^2 = HG^2 : CV^2$ (§. 267 *Geom.* & §. 260 *Arith.*). Unde tandem habetur (§. 167 *Arith.*) $MG . QG : CM^2 = HG^2 : CV^2$.

Theorema: **In ellipsi est quadratum semiordinatæ ad quadratum semidiametri conjugatæ ut rectangulum ex segmentis diametri ad quadratum semidiametri.**

COROLLARIUM.

455. Sit $MQ = a$, $EV = c$, $MG = x$, $HG = y$; erit $GQ = a - x$, consequenter (§. 454)

$$ax - x^2 : \tfrac{1}{4}a^2 = y^2 : \tfrac{1}{4}c^2$$
$$\tfrac{1}{4}c^2ax - \tfrac{1}{4}c^2x^2 = \tfrac{1}{4}a^2y^2$$
$$c^2x - \frac{c^2x^2}{a} = ay^2$$

Fiat $\frac{c^2}{a} = b$, erit $c^2 = ab$.

Hinc $abx - bx^2 = ay^2$.

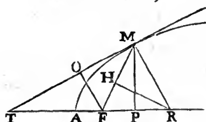
Eadem ergo est relatio semiordinatarum ad diametros, quæ ad axem (§. 420), & diametri parameter est tertia proportionalis ad diametros a & c.

SCHOLION.

456. *Cum ex hac æquatione fundamentali reliquas ellipsis proprietates respectu axis deduxerimus; evidens est, omnes quoque istas proprietates ellipsi competere intuitu diametri.*

PRO-

PROBLEMA 196.



457. ***Determinare quantitatem rectæ*** FO ***ex foco*** F ***ad tangentem ellipsis*** TM ***perpendicularis.***

Sit RM ad tangentem TM normalis: erunt MR & OF inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), ideoque TR : RM = TF : FO (§.268 *Geom.*). Porro cum in triangulo rectangulo TMR semiordinata PM sit ad hypothenusam TR perpendicularis (§. 368. 370); erit △TMR ∽ △PMR (§. 329 *Geom.*), ideoque TR : RM = RM : PR (§. 175 *Geom.*). Est ergo RM : PR = TF : FO (§.167 *Arith.*), consequenter FO . RM = PR . TF (§. 378 *Geom.*).

Theorema: Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari FO.

PROBLEMA 197.

458. ***Si in*** F ***fuerit focus ellipsis &*** MR ***ad eam normalis***, HR ***vero normalis ad*** FM ***ex foco ad punctum contactus ductam; determinare quantitatem segmentorum*** MH ***&*** HF.

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$; erit FM $= \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$ (§.434), PR $= (\frac{1}{2}ab - bx) : a$ (§.440), AT $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ (§.*cit.*), & AF $= \frac{1}{2}a - c$, consequenter TF $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x) + \frac{1}{2}a - c = ax : (a - 2x) + \frac{1}{2}a - c = (\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx) : (a - 2x)$. Ducatur FO ad tangentem TM normalis, erit OF parallela ipsi MR (§. 256 *Geom.*), ideoque angulus OFM ipsi HMR æqualis (§. 233 *Geom.*), & hinc ob rectos ad O & H æquales (§.145 *Geom.*) reperitur (§.267 *Geom.*) FM : FO = MR : MH, hoc est, FM : $\frac{PR . TF}{MR}$ = MR : MH (§.457). Est itaque MH = PR . TF : FM, consequenter FM : TF = PR : MH. Quare

$$\frac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx}{a - 2x} = \frac{ab - 2bx}{2a} : MH$$

$$\text{h.e. } a^2 - 2ac + 4cx : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx}{a - 2x} = ab - 2bx : MH$$

(§. 184 *Arith.*)

$$\& \ \frac{a^2 - 2ac + 4cx}{a - 2x} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx}{a - 2x} = b : MH$$ (§. 183 *Arith.*)

Est ergo MH $= \frac{1}{2}b$ (§. 149 *Arith.*).

Theorema: Si MR fuerit ad ellipsin normalis & ex R ducatur ad rectam FM, ex foco F in idem ellipsis punctum M ductam, normalis RH; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO 37.

459. *Hyperbola* est linea curva, in qua $ay^2 = abx + bx^2$, hoc est, $b : a = y^2 : ax + x^2$, seu quadratum semiordinatæ est ad rectangulum ex abscissa in rectam compositam ex eadem abscissa & recta quadam constante, quæ *Axis transversus, aut determinatus, vel latus transversum* audit, ut recta alia constans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transversum.

COROLLARIUM.

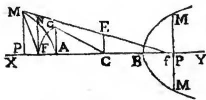
460. Est ergo etiam hic ut in ellipsi $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + x^2)$, $a = bx^2 : (y^2 - bx)$ &c. nisi quod hic contraria signa occurrant (§.422 & seqq.).

DEFINITIO 38.

461. In hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem

axem transversum & parametrum, quia talis est axis conjugatus in ellipsi (§. 423).

DEFINITIO 39.



462. Si axis transversus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C *Centrum* appellatur.

PROBLEMA 198.

463. *Datis parametro & axe transverso* AB, *invenire distantiam foci a vertice* AF.

Sit parameter $= b$, AB $= a$; erit FN $= \frac{1}{2}b$ (§. 395), & (§. 459)

$$b : a = \tfrac{1}{4}b^2 : ax + x^2$$
$$\tfrac{1}{4}ab^2 = abx + bx^2$$
$$\tfrac{1}{4}ab = ax + x^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}a^2 + ax + x^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Invenitur ergo x quærendo inter $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ mediam proportionalem, ac inde auferendo $\frac{1}{2}a$: vel, quia $\sqrt{\frac{1}{4}ab} =$ CE (§. 461), si fiat AG $=$ EC, erit GC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Quare cum sit AC $= \frac{1}{2}a$, si ex centro C radio CG describatur arcus GF axem secans in F, erit AF $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a$, ideoque in F focus.

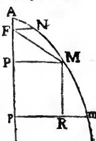
COROLLARIUM I.

464. Est ideo distantia foci a centro FC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Quare si FC$^2 = c^2$; erit CE^2 $= c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM 2.

465. Quia $ax + x^2 = \frac{1}{4}ab$, & $ax + x^2 =$ AF . FB (*per demonstr. in* §. 463), $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum semiaxis conjugati (§. 461); rectangulum ex AF in FB huic quadrato æquale est.

PROBLEMA 199.



466. *Invenire rationem semiordinatarum* PM *&* pm.

Sit axis transversus $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, Ap $= v$, $pm = z$; erit (§. 460)

$$y^2 : z^2 = bx + \frac{bx^2}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}$$
$$y^2 : z^2 = ax + x^2 : av + v^2 \text{ (§. 124)}$$
$$y^2 : z^2 = (a + x)x : (a + v)v$$

Theorema: In hyperbola quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex abscissa in rectam quandam compositam ex abscissa & axe transverso.

COROLLARIUM.

467. Crescentibus ideo abscissis x, crescunt quoque rectangula $ax + x^2$, consequenter & quadrata semiordinatarum y^2, ideoque semiordinatæ ipsæ. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA 200.

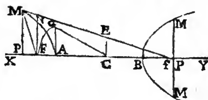
468. *Invenire rationem axis transversi ad axem conjugatum.*

Sit axis transversus $= a$, parameter $= b$; erit quadratum axis conjugati $= ab$ (§. 461). Hoc ergo ad quadratum transversi, ut ab ad a^2, hoc est, ut b ad a (§. 124).

Theorema: Quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi, ut parameter ad axem transversum.

COROL-

COROLLARIUM.



469. Quoniam $b : a = PM^2 : AP \cdot PB$ (§. 459); quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum ex abscissa in compositam ex abscissa & axe transverso.

PROBLEMA 201.

470. *Sint duæ hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes* AX & BY *cum axe transverso communi* AB *in directum jacent. Ex focis* F & f *ad punctum* M *hyperbolæ unius ducantur rectæ* fM & FM: *determinare quantitatem harum rectarum.*

Sit $FC = fC = c$, reliqua ut in præcedentibus; erit $AF = c - \frac{1}{2}a$, $Af = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4}a^2$, $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$. Jam (§. 464) quadratum semiaxis conjugati $CE = c^2 - \frac{1}{4}a^2$. Porro (§. 469)

$$AC^2 : CE^2 = AP \cdot BP : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 : c^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = ax + x^2 : PM^2$$

Est itaque

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$FM^2 = c^2 - 2cx - ac + \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

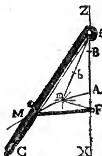
$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$

$$fM^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$fM = c + \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB.$$

COROLLARIUM 1.

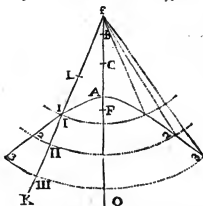


471. Datis ergo axe transverso & distantia foci a vertice, hyperbola motu continuo ita describitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero sui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipsum superet axe transverso AB. Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur, & stylo ad filum applicato regula emoveatur.

COROLLARIUM 2.

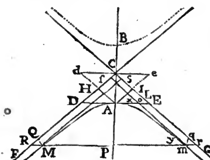
472. Iisdem datis punctis quotcunque hyperbolæ determinantur, si ex foco f intervallo æquali rectæ fA ex axe transverso AB & distantia foci a vertice Bf compositæ, vel intervallo quocunque majore quam eadem fA describatur arcus, &, facto $fb = AB$, intervallo residuo bm ex altero foco F alius ducatur arcus, qui priorem in primo casu tanget, in secundo semper secabit, e. gr. in m; erit enim ob $fm - Fm = AB$, punctum contactus vel intersectionis m in hyperbola (§. 470).

Vel



Vel commodius hyperbola ita describitur: fiat AB axi transverso æqualis determinenturque foci f & F (§. 463). Jungatur ipsi fO recta fK sub angulo acuto quocunque & ex centro f radiis ipsa fA majoribus describantur arcus quotcunque concentrici secantes rectam fK in I, II, III &c. Fiat fL = AB & ex foco F intervallis LI, LII, LIII &c. intersecentur arcus isti utrinque in 1, 2, 3; erunt puncta 1, 2, 3 &c. in hyperbola. Est enim fI = f1, fII = f2, fIII = f3 &c. (§. 40 *Geom.*). Sed F1 = LI, F2 = LII, F3 = LIII &c. *per constr.* Ergo f1 − F1 = fI − LI = AB, f2 − F2 = fII − LII = AB, f3 − F3 = fIII − LIII = AB &c. consequenter puncta 1, 2, 3 &c. in hyperbola (§. 470).

PROBLEMA 202.



473. *Determinare situm rectæ* DE, *quæ per verticem* A *ipsi ordinatæ* Mm *parallela ducitur.*

Sit AP = x, PM = y, parameter = b, axis transversus = a; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$ (§. 460). Quoniam in vertice A fit $x = 0$; erit etiam $y = 0$, consequenter DE tota extra hyperbolam cadit, eamque ideo tangit.

Theorema: Si recta DE per verticem A ordinatis Mm parallela ducatur; hyperbolam in vertice A tangit.

DEFINITIO 40.

474. Si recta DE per verticem hyparabolæ A ordinatis Mm parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE semiaxi, præterea ex centro C per D & E agantur rectæ CF & CG; rectæ hæ dicuntur *Asymptoti hyperbolæ*.

COROLLARIUM 1.

475. Quoniam (§. 268 *Geom.*) CA : AE = CP : Pr, & CA : (DA) AE = CP : PR; erit Pr = PR (§. 177 *Arith.*). Quare cum sit PM = Pm; erit quoque MR = mr (§. 91 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

476 Si AI ducatur parallela ipsi DC & AH ipsi CE; erit EA : ED = AI : DC (§. 268 *Geom.*). Sed EA = $\frac{1}{2}$ED (§. 474). Ergo AI = $\frac{1}{2}$DC = $\frac{1}{2}$CE. Et quoniam porro EA : AD = EI : IC (§. 268 *Geom.*); erit EI = CI = $\frac{1}{2}$EC, consequenter AI = CI (§. 87 *Arith.*).

DEFINITIO 41.

477. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia hyperbolæ*.

PROBLEMA 203.

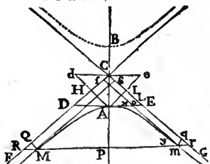
478. *Determinare potentiam hyperbolæ.*

Sit CA = $\frac{1}{2}a$, AE = $\frac{1}{2}c$, erit CE = $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ (§. 417 *Geom.*), ideoque CI = $\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$. Ergo CI² = $\frac{a^2 + c^2}{16}$.

Theorema: Potentia hyperbolæ est decima sexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum semiaxium conjugatorum.

COROL-

COROLLARIUM.



479. Quoniam $c^2 = ab$ (§. 461); erit $CI^2 = \frac{a^2 + ab}{16} = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$, hoc eſt, potentia hyperbolæ æquatur rectangulo ax quarta parte axis tranſverſi in quartam partem aggregati ex axe tranſverſo & parametro.

PROBLEMA 204.

480. *Determinare differentiam quadratorum* PM & PR.

Quoniam $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 461) & $CP = \frac{1}{2}a + x$, præterea (§. 268 *Geom.*)

$$CA : AD = CP : PR$$

$$\tfrac{1}{2}a : \sqrt{\tfrac{1}{4}ab} = \tfrac{1}{2}a + x : PR$$

erit $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{a}$. Quare

$$PR^2 = \tfrac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$

$$PM^2 = \quad bx + bx^2 : a \quad (§.460)$$

$$PR^2 - PM^2 = \tfrac{1}{4}ab = DA^2$$

Theorema: Si in hyperbola ſemiordinata PM producatur, donec aſymptoto in R occurrat; erit differentia quadratorum PM & PR æqualis quadrato ſemiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

481. Creſcente igitur ſemiordinata PM, decreſcit recta MR, ideoque hyperbola ad aſymptotum propius accedit. Nunquam tamen eum ea concurrere poteſt, quia cum ſit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHOLION.

482. *En rationem, cur lineas* CF & CG *ἀσυμπτώτας ſeu non coincidentes vocaverint veteres.*

PROBLEMA 205.

483. *Determinare quantitatem rectanguli ex* MR *in* Mr.

Sit $PR = z$, $PM = y$; erit $MR = z - y$, $Mr = z + y$, conſequenter $MR \cdot Mr = z^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$.

Theorema: In hyperbola rectangulum ex MR & Mr æquatur differentiæ quadratorum PR^2 & PM^2.

COROLLARIUM.

484. Idem ergo rectangulum æquale eſt quadrato ſemiaxis conjugati DA (§. 480), conſequenter omnia rectangula eodem modo formata æqualia ſunt.

PROELBMA 206.

485. *Si* QM & ſm *cum aſymptoto* CG, qm & SM *cum altera* CF *parallelæ ducantur; determinare rationem rectangulorum* QM . MS & qm . mſ.

Sit $MR = mr$ (§. 475) $= a$, $Rm = rM$ (§. 88 *Arith.*) $= b$, $QM = v$, $mq = z$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : mſ$$

$$a : v = b : \frac{bv}{a}$$

$$rm : mq = rM : MS$$

$$a : z = b : \frac{bz}{a}$$

Eſt ergo $MQ \cdot MS = bvz : a$, & $mq \cdot mſ = bvz : a$, conſequenter $MQ \cdot MS = mq \cdot mſ$.

Theorema: Si QM & *mſ* cum aſymptoto CG, *qm* vero & MS eum altara CF parallelæ ducantur; rectangula ex QM in MS, & *qm* in *mſ* æqualia ſunt.

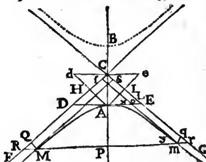
COROLLARIUM.

486. Quoniam $Cq = ſm$ & $CQ = SM$ (§. 257 *Geom.*); etiam rectangula ex Cq in qm & ex CQ in QM æqualia ſunt.

PROBLEMA 207.

487. *Determinare rationem rectanguli ex* qm *in* mſ *ad potentiam hyperbolæ ſeu* AI^2.

Zz Sit



Sit $mr = z$, $qm = y$, $AE = c$; erit, ob parallelas AE & Pr, angulus E $= r$, & ob parallelas AI & qm, angulus $I = q$ (§. 233 *Geom.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mr : qm = AE : AI$$
$$z : y = c : \frac{cy}{z}$$

Sed IE = CI, & AI = CI (§. 476). Igitur IE = AI (§. 87 *Arith.*), ac proinde etiam $IE = \frac{cy}{z}$

Porro ob $mR \cdot mr = AE^2$ (§. 484), erit (§. 299 *Arith.*)

$$mr : AE = AE : mR$$
$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Denique ob parallelas fm & CE, $o = x$, & ob parallelas DE & Rm, $x = y$ (§. 233 *Geom.*), ideoque $o = y$ (§. 87 *Arith.*). Similiter ob parallelas AI & CR, angulus IAE = CDE, & ob parallelas DE & Rm, angulus $CDE = fRm$ (§. 233 *Geom.*). Ergo angulus IAE = R (§. 87 *Arith.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$AE : IE = mR : fm$$
$$c : \frac{cy}{z} = \frac{c^2}{z} : \frac{c^2 y}{z^2}$$

Quare $fm, qm = c^2y^2 : z^2$. Est vero etiam $AI^2 = c^2y^2 : z^2$. Ergo $fm \cdot qm = AI^2$.

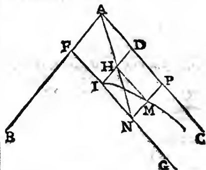
Theorema: Si qm cum asymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex qm in Cq æquatur potentiæ hyperbolæ.

COROLLARIUM 1.

488. Quare si fiat CI = AI (§. 476) $= a$, $Cq = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$; quæ est æquatio naturam hyperbolæ intra asymptotos declarans.

COROLLARIUM 2.

489. Datis ergo (*Vid. Fig. præc.*) asymptotis positione & latere potentiæ hyperbolæ CI vel AI, si in una asymptotorum CG sumantur abscissæ quotcunque, invenientur totidem semiordinatæ & per eas puncta quotlibet hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abscissas & latus potentiæ CI tertias proportionales (§. 272 *Geom.*).



Nimirum sint AB & AC asymptoti, AD = DI $= a$ latus potentiæ hyperbolæ. Sit $AP = x$. Ducatur FG parallela ipsi AC & PN parallela ipsi DI; erit PN = DI (§. 257 *Geom.*) $= a$. Ducatur AN secans DI in H; erit (§. 268 *Geom.*)

$$AP : PN = AD : DH$$
$$x : a = a : DH$$

ideoque $DH = a^2 : x$. Quare si fiat PM $(= y)$ = DH; erit $y = a^2 : x$, consequenter $yx = a^2$, ideoque punctum M in hyperbola (§. 488).

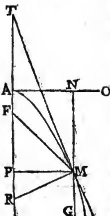
COROLLARIUM 3.

490. Quodsi abscissæ (*Vid. Fig. 1 hujus pag.*) non computentur a centro C, sed ab alio quovis puncto L, dicaturque $CL = b$; erit $Cq = b + x$, consequenter $a^2 = by + xy$,

PRO-

PROBLEMA 208.

491. *Determinare in hyperbola subtangentem* PT *& subnormalem* PR.



Sit parameter $= b$, axis transversus $= a$, AP $= x$, PM $= y$, RM $= z$, RA $= t$; erit PR $= t - x$, PM$^2 = z^2 - t^2 + 2tx - x^2$ (§. 417 *Geom.*). Quare (§. 460)

$$z^2 - t^2 + 2tx - x^2 = bx + bx^2 : a$$

$$az^2 - at^2 + 2atx - ax^2 = abx + bx^2$$

$$bx^2 + ax^2 + abx + at^2 = 0$$
$$- 2atx - az^2$$

$$b + a \text{ Divid.}$$

$$x^2 + \frac{ab - 2at}{b + a}x + \frac{at^2 - az^2}{b + a} = 0$$

Fiat jam ob rationes supra (§. 410) allatas $x - v = 0$; erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, & quia hæc æquatio eadem cum præcedente, habetur

$$\frac{ab - 2at}{b + a} = -2v$$

$$ab - 2at = -2bv - 2av$$

$$ab + 2bv + 2av = 2at$$

$$\tfrac{1}{2}b + \frac{bv}{a} + v = t$$

hoc est, quia $x = v$,
$\frac{1}{2}b + bx : a + x = t =$ RA.

Ergo PR $= \frac{1}{2}b + bx : a + x - x = \frac{1}{2}b + bx : a = (\frac{1}{2}a + x)b : a$.

Theorema: In hyperbola est ut axis transversus ad parametrum, ita aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad subnormalem.

Porro (§. 409)

$$\text{PR} : \text{PM} = \text{PM} : \text{PT}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a + x}{a}b : \sqrt{(bx + \frac{bx^2}{a})}\ (\text{§. } 460) = \sqrt{(bx + \frac{bx^2}{a})} : \text{PT}$$

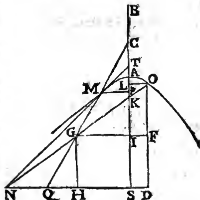
Reperitur ergo PT $= (abx + bx^2) : (\frac{1}{2}a + x)b = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x)$.

Theorema: In hyperbola est ut aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam ita aggregatum ex integro axe transverso & abscissa ad subtangentem.

Denique AT $= (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x) - x = (ax + x^2 - \frac{1}{2}ax - x^2) : (\frac{1}{2}a + x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$.

Theorema: In hyperbola est ut aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam, ita semiaxis transversus ad rectam AT inter verticem & tangentem interceptam.

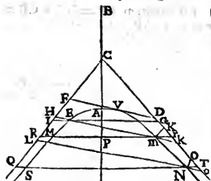
PROBLEMA 209.



492. *Ducta* NO *tangenti* TM *parallela, & ex centro* C *per contactum* M *recta* CQ, *quæ* NO *secat in* G, *determinare rationem segmentorum* GN *&* GO.

Ducatur ex N perpendicularis NS ad axem AS continuanda in D, donec recta OD axi AS parallelæ occurrat in D. Ducantur porro GH ad ND, & GF, MP, OL ad axem AS

 per-



Ducantur ordinatæ ad axem utrinque usque ad asymptotos continuandæ Rr & QT.

Sit $Rm = y$, $QN = z$, $TN = t$. Quoniam $Rm \cdot mr = QN \cdot NT$ (§.484); erit (§. 299 *Arith.*)

$$Rm : QN = TN : mr$$
$$y : z = t : \frac{tz}{y}$$

Sit porro $Hm = a$, $mK = b$. Quoniam ob parallelas mr & NT, angulus $r = T$, & ob parallelas Km & NO, $K = O$ (§.233 *Geom.*), erit (§.267 *Geom.*)

$$mr : Km = TN : NO$$
$$\frac{tz}{y} : b = t : \frac{by}{z}$$

Ob similem rationem, nempe similitudinem $\triangle\triangle$ QLN & RHm

$$Rm : Hm = QN : LN$$
$$y : a = z : \frac{az}{y}$$

Ergo $LN \cdot NO = abzy : zy = ab$. Est vero etiam $Hm \cdot mK = ab$. Sunt igitur duo ista rectangula æqualia.

Theorema: Si intra asymptotos hyperbolæ ex ejus puncto m ducantur utcunque duæ rectæ Hm & mK & iis aliæ duæ parallelæ LN & NO; erit $Hm \cdot mK = LN \cdot NO$.

Idem invenitur, si ductæ rectæ Hmk agatur parallela LNo. Nempe in hoc etiam casu $Hm \cdot mk = LN \cdot No$.

COROLLARIUM.

495. Omnia igitur rectangula ex rectis eidem Hk vel duabus Hm & mK parallelis eodem modo formata inter se æqualia sunt.

PROBLEMA 211.

496. *Si recta* Hk *utcunque intra asymptotos* CQ *&* CT *ducatur, determinare rationem segmentorum* HE *&* mk *inter hyperbolam & asymptotos interceptorum.*

Ducantur per E & m rectæ IG & Rr ad axem normales, fiatque $Rm = a$, $IE = b$, $EG = c$, $Hm = x$, $mk = y$. Quia $IE \cdot EG = Rm \cdot mr$ (§.484); erit (§. 299 *Arith.*)

$$mR : IE = EG : mr$$
$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Porro ob IG ipsi Rr parallelam (§.268 *Geom.*)

$$mR : Hm = IE : EH$$
$$a : x = b : \frac{bx}{a}$$
$$rm : km = EG : Ek$$
$$\frac{bc}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$$

Est itaque $Ek \cdot EH = abxy : ab = xy = Hm \cdot mk$. Quare

$$Ek \cdot mk = mH : HE$$

$Ek - mk : mk = mH - HE : HE$ (§.193 *Arith.*),

hoc est, $Em : mk = Em : HE$,

consequenter $mk = HE$ (§.177 *Arith.*).

Theorema: Si inter asymptotos recta Hk utcunque ducatur, segmenta HE & mk inter hyperbolam & asymptotos utrinque intercepta æqualia sunt.

COROLLARIUM 1.

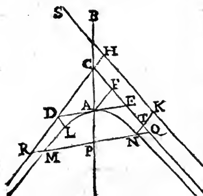
497. Quando fit $Em = 0$; recta Hk hyperbolam tangit. Tangens ideo FD inter asymptotos intercepta in contactu V bifariam dividitur.

COROLLARIUM 2.

498. Rectangulum itaque ex segmentis Hm & mk rectæ tangenti FD parallelæ, æquatur quadrato tangentis dimidiæ DV (§. 495).

PRO-

PROBLEMA 212.



499. *Determinare relationem semiordinatæ* PM *ad diametri abscissam* AP.

Sit AB diameter transversa, DE diameter conjugata, ideoque ordinatæ NM parallela. Sit in C centrum hyperbolæ & CQ atque CR sint ejus asymptoti. Fiat DA $= c$, CA $= r$, PM $= y$, CP $= v$, & CB $=$ AC; erit (§. 268 *Geom.*)

$$CA : DA = CP : PR$$

$$r : c = v : \frac{cv}{r}$$

Quare RM $= \frac{cv}{r} - y = \frac{cv - ry}{r}$ & MQ $= \frac{cv + ry}{r}$ (§. 496), consequenter RM . MQ $= (c^2v^2 - r^2y^2) : r^2$. Est vero RM . MQ $=$ DA$^2 = c^2$ (§. 498). Habemus itaque

$$(c^2v^2 - r^2y^2) : r^2 = c^2$$

$$c^2v^2 - r^2y^2 = r^2c^2$$

$$c^2v^2 - r^2c^2 = r^2y^2$$

quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam

$$y^2 : v^2 - r^2 = c^2 : r^2$$

$$PM^2 : AP . PB = DA^2 : AC^2$$

Est nimirum BP $=$ BC $+$ CP $= r + v$, & AP $=$ CP $-$ CA $= v - r$, ideoque AP . PB $= (v - r(v + r) = v^2 - r^2$.

Theorema: Quadratum semiordinatæ in hyperbola est ad rectangulum ex abscissa & aggregato ex diametro transversa AB & abscissa AP, ut quadratum semidiametri conjugatæ AD ad quadratum semidiametri transversæ CA.

COROLLARIUM.

500. Quodsi fiat AP $= x$, & $2r =$ AB $= a$; erit $v^2 - r^2 = ax + x^2$, consequenter $y^2 = (c^2ax + c^2x^2) : \frac{1}{4}a^2 = \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$. Fiat $4c^2 : a = b$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$. Eadem ergo æquatio hyperbolæ naturam definit respectu diametri, quæ eam exprimit respectu axis (§. 459), estque parameter tertia proportionalis ad diametros conjugatas AB & DE (§. 461). Unde liquet easdem proprietates hyperbolæ competere respectu diametri, quæ superius ex æquatione fundamentali respectu axis deduximus.

PROBLEMA 213.

501. *Ductis* AF & TN *asymptoto* CR *parallelis, determinare rationem rectanguli ex* TN *in* TC *ad rectangulum ex* AF *in* FC.

Sit CF $= a$, AF $= b$, AD $= c$, RN $= z$; erit ob AE $=$ DA, etiam EF $=$ FC $= a$ (§. 268 *Geom.*). Et quoniam RN . NQ $=$ DA^2 (§. 498), erit (§. 299 *Arith.*)

$$RN : DA = DA : NQ$$

$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Porro ob parallelas AF & NT, angulus AFE $=$ NTQ, & ob parallelas AE & NQ, angulus AEF $=$ NQT (§. 233 *Geom.*); ideoque (§. 267 *Geom.*)

$$AE : AF = QN : TN$$

$$c : b = \frac{c^2}{z} : \frac{bc}{z}$$

$$AE : FE = QN : TQ$$

$$c : a = \frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z}$$

QN

$QN : QT = RN : TC$ (§. 268 *Geom.*)

$\frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z} = z : \frac{az}{c}$

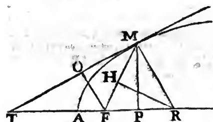
Ergo $TC . TN = \frac{azbc}{cz} = ab = CF . AF$.

Theorema: Si ex vertice A & quocunque hyperbolæ puncto N ducantur AF & NT cum asymptoto CR parallelæ; erit rectangulum ex NT in TC æquale rectangulo ex FA in FC.

COROLLARIUM.

502. Quodsi igitur fiat $TC = x$, $TN = y$; æquatio hyperbolæ naturam inter asymptotos respectu diametri declarans, erit $xy = ab$, vel ob $FA = FC$ (§. 476), $= a^2$.

PROBLEMA 214.



503. *Determinare quantitatem rectæ* FO *ex foco* F *ad tangentem hyperbolæ* TM *perpendicularis*.

Eodem prorsus, quo supra (§. 457), modo reperitur $FO . RM = PR . TF$, ut verba singula huc transcribere liceat.

Theorema: Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentia TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta FO ex foco ad tangentem perpendiculari.

PROBLEMA 215.

504. *Si in* F *fuerit focus hyperbolæ &* MR *ad eam normalis*, HR *vero normalis ad* FM *ex foco* F *ad punctum contactus* M *ductam*; *determinare quantitatem segmentorum* MH *&* HF.

Sit parameter $= b$, axis transversus $= a$, distantia foci a centro $= c$; erit $FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$ (§. 470), $PR = (\frac{1}{2}ab + bx) : a$ & $AT = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$ (§. 491), $AF = c - \frac{1}{2}a$, $TF = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x) + c - \frac{1}{2}a = ax : (a + 2x) + c - \frac{1}{2}a = (ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx) : (a + 2x)$. Ducta FO ad tangentem TM normalis, reperitur prorsus ut supra, iisdem retentis verbis, $FM : TF = PR : MH$ (§. 458). Quare

$$c - \frac{1}{2}a + \frac{2cx}{a} : \frac{ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx}{a + 2x} = \frac{\frac{1}{2}ab + bx}{a} : MH$$

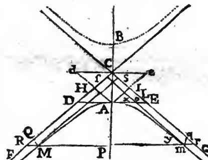
h.e. $2ac - a^2 + 4cx : \frac{ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx}{a + 2x} = ab + 2bx : MH$ (§. 184 *Arith.*)

$$\frac{2ac - a^2 + 4cx}{a + 2x} : \frac{ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx}{a + 2x} = b : MH \quad (§. 183\ \textit{Arith.})$$

Est ergo $MH = \frac{1}{2}b$ (§. 149 *Arith.*).

Theorema: Si MR fuerit ad hyperbolam normalis & ex R ducatur ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam, normalis RH; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO 42.



505. *Hyperbola æquilatera* dicitur, in qua axes conjugati AB & DE sunt æquales.

COROLLARIUM 1.

506. Cum parameter sit tertia proportionalis ad axes conjugatos (§. 461); ipsa etiam axibus æqualis est.

COROLLARIUM 2.

507. Quare si in æquatione $y^2 = bx + bx^2 : a$ fiat $b = a$; æquatio $y^2 = ax + x^2$ naturam hyperbolæ æquilateræ declarat.

COROL-

COROLLARIUM 3.

508. Hinc quadrata ordinatarum y^2 & z^2 sunt inter se ut $ax + x^2$ & $av + v^2$, hoc est, ut rectangula ex abscissis in rectas compositas ex abscissis & axe determinato vel parametro.

COROLLARIUM 4.

509. Si sint $CP = x$, $CA = r$, erit $AP = x - r$ & $PB = r + x$, consequenter $y^2 = x^2 - r^2$.

COROLLARIUM 5.

510. Quoniam $AE = CA$ (§. 506); erit ACE angulus semirectus (§ 241 *Geom.*), consequenter angulus asymptotorum FCG in hyperbola æquilatera rectus.

PROBLEMA 216.

511. *Investigare naturam curvæ, quæ oritur, si conus* ABC *ita secetur ut sectionis axis* DE *sit lateri coni* AC *parallelus, ipsum vero planum sectionis* LDN *secet basin coni secundum rectam* LN, *quæ ad basin sectionis triangularis* AB *sit perpendicularis.*

Secetur conus plano HMI basi ANB parallelo: erit HMI circulus (§. 468 *Geom.*), consequenter cum uterque circulus HMI & ANB per sectionem triangularem ACB secetur in HI & AB, & a sectione data in PM & LN; erunt cum HI & AB, tum PM & LN inter se parallelæ (§. 499 *Geom.*). Quare cum sit EN perpendicularis ad AB *per hypoth.* erit etiam PM perpendicularis ad HI (§. 492 *Geom.*), consequenter cum DE & HI, itemque DE & AB sint in eodem plano sectionis triangularis, EN & PM etiam perpendiculares sunt ad DE (§. 484 *Geom.*), ideoque semiordinatæ ad axem DE applicatæ (§. 368. 370). Et quia AH parallela ipsi EP *per hypoth.* HP vero parallela ipsi AE *per demonstr.* erit $HP = AE$ (§. 257 *Geom.*). Sit jam $AE = HP = v$, $PI = t$, $DP = x$, $DE = z$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DP : DE = PI : EB$$

$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

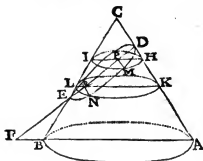
Ergo $PM^2 = HP \cdot PI$ (§. 377) $= tv$, & $EN^2 = AE \cdot EB$ (§. *cit.*) $= tzv : x$. Est ergo (positis $PM^2 = y^2$, $EN^2 = q^2$)

$$y^2 : q^2 = tv : \frac{tzv}{x}$$

hoc est $\left.\begin{array}{l} = tvx : tzv \\ = x : z \end{array}\right\}$ (§. 124)

Est itaque curva DMNLD parabola (§. 402).

PROBLEMA 217.



512. *Si conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DE *continuatus cum basi* AB *sectionis triangularis continuata in* F *concurrat, & planum sectionis continuatum eam ad angulos rectos secet, sectio vero non sit subcontraria, hoc est* △△ CED, CBA *similia non sint, neque anguli* CED, BAC *æquales; invenire naturam curvæ ex hac sectione prodeuntis* DMNELD.

Eodem, quo ante (§. 511), modo ostenditur esse PM & QN cum semiordinatas circulorum IMH & LNK, tum curvæ DMNE. Sit jam DE $= a$, DP$=x$, DQ$=v$, PH$=t$, QL $=f$; erit PE $= a-x$, QE$=a-v$ & (§. 268 *Geom.*)

$$DP : PH = DQ : QK$$
$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$
$$EQ : QL = EP : PI$$
$$a-v : f = a-x : \frac{fa-fx}{a-v}$$

Quare (§. 377) PM^2 = HP . PI = $(tfa-tfx):(a-v)$ & QN^2=KQ . QL $= vtf:x$. Est ideo.

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tfa-tfx}{a-v} : \frac{vtf}{x}$$

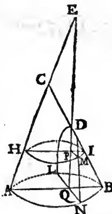
hoc est
$$\left.\begin{aligned} &= tfax-tfx^2 : avtf-v^2tf \\ &= ax-x^2 : av-v^2 \end{aligned}\right\} (\text{§ } 124)$$

Est itaque curva DMNELD circulus aut ellipsis (§. 377. 429).

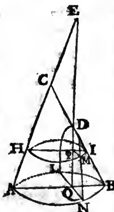
Ponamus curvam hanc esse circulum; erit EQ . QD = QN^2 (§. 377), est vero etiam LQ . QK = QN^2 (§. *cit.*). Igitur EQ . QD = LQ . QK (§. 87 *Arith.*); ideoque EQ : LQ = QK : QD (§. 299 *Arith.*). Cum vero præterea æquales sint anguli ad verticem Q (§. 156 *Geom.*), erunt similia △△ ELQ & QDK (§. 183 *Geom.*), consequenter (§. 175 *Geom.*) æquales anguli homologi LEQ & QKD seu BAC (§. 233 *Geom.*), quod est contra *hypothesin*. Non est igitur circulus curva DMNELD, ac proinde ellipsin esse reliquum est.

PROBLEMA 218.

513. *Si conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DQ *continuatus cum latere coni* AC *continuato in* E *cõcurrat, planum vero sectionis* LDN *secet basin coni secundum rectam* LN, *quæ ad basin* AB *sectionis triangularis sit perpendicularis; invenire naturam curvæ* LDN, *quæ ex hac sectione resultat.*



Eodem modo, quo paulo ante (§.511), ostenditur, QN & PM esse semiordinatas cum circulorum HMI atque ANB, tum curvæ LDN.



Sit ED $= a$, DP $= x$, DQ $= v$, PH $= t$, PI $= s$; erit EP $= a + x$, EQ $= a + v$, & (§.268 *Geom.*)

$$EP : PH = EQ : AQ$$
$$a + x : t = a + v : \frac{at + vt}{a + x}$$
$$DP : PI = DQ : QB$$
$$x : s = v : \frac{sv}{x}$$

Ergo HP . PI $= ts$ & AQ . QB $= (atsv + v^2ts) : (ax + x^2)$, consequenter ob $PM^2 =$ HP . PI & $QN^2 =$ AQ . QB (§. 377)

$$PM^2 : QN^2 = ts : \frac{atsv + v^2st}{ax + x^2}$$

hoc est, $= 1 : \frac{av + v^2}{ax + x^2}$ $= ax + x^2 : av + v^2$ } (§.124)

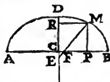
Est itaque LDN hyperbola (§.466), DE ejus axis transversus, E vertex hyperbolæ oppositæ.

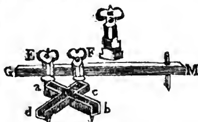
Scholion.

514. *Hinc intelligimus, quod statim ab initio parabolam, hyperbolam atque ellipsin tanquam ex cono sectas proponere & ex indole sectionis æquationem fundamentalem eruere licuisset, nisi nobis constitutum fuisset ostendere, quomodo ex æquationibus utcunque assumtis vel datis curvarum proprietates ac descriptiones per algebram & arithmeticam speciosam eruere debeamus. Imo potuissent quoque (quod faciunt alii) earundem curvarum per motum continuum descriptiones fundamenti loco assumi, & inde æquationes elici: quod ut appareat, unum de ellipsi exemplum proposuisse sufficerit.*

Problema 219.

515. *Sit descripta curva* ADMB, *circumductu regulæ* GM *in instrumento, cujus structura* ex Fig. sequente *manifesta est, ita ut paxilli in* E *defixi basis mobilis incedat per canalem* ab, *alterius vero in* F *per* cd; *investigare naturam ejus.*





Ex curvæ descriptione manifestum, longitudinem regulæ EM esse axi majori dimidio CB ipsius curvæ, partem vero ejus FM axi dimidio minori DC æqualem, consequenter distantiam paxillorum EF differentiam inter semiaxem majorem CB & semiaxem minorem DC.

Assumamus itaque quemcunque regulæ situm EFM & determinetur curva ADMB, in qua sit punctum ejus M. Demittantur ex puncto M ordinatæ ad utrumque axem PM & MR.

Fiat in curva CP $=$ RM $= x$, PM $= y$, ME $=$ AC $= a$, CD $=$ FM $= b$; erit EF $= a - b$, & (§.268 *Geom.*)

$$EM : MR = EF : FC$$
$$a : x = a - b : \frac{ax - bx}{a}$$

Ergo PF $= x - x + bx : a = bx : a$. Hinc

Hinc $PM^2 = FM^2 - FP^2$ (§.417 *Geom.*)

$$y^2 = b^2 - b^2x^2 : a^2$$
$$y^2 = (a^2b^2 - b^2x^2) : a^2.$$

Est ideo curva ADMB ellipsis (§.432).

DEFINITIO 43.

516. *Circuli superiorum generum* sunt curvæ, in quibus est $AP^m : PM^m = PM : PB$, vel etiam $AP^m : PM^m = PM^n : PB^n$.



COROLLARIUM 1.

517. Sit $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; erit $PB = a - x$, consequenter $x^m : y^m = y : a - x$. Hinc æquatio infinitos circulos definiens est $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$, & alios adhuc infinitos definiens $y^{m+n} = (a - x)^n x^m$.

COROLLARIUM 2.

518. Si $m = 1$; erit $y^2 = ax - x^2$; ideoque circulus primi generis sub hac æquatione una continetur. Si $m = 2$, $n = 1$; erit $y^3 = ax^2 - x^3$: quæ æquatio circulum secundi generis definit.

DEFINITIO 44.

519. *Parabolæ superiorum generum* sunt curvæ algebraicæ, quæ definiuntur per $a^{m-1}x = y^m$, e. gr. per $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^4x = y^5$, $a^5x = y^6$ &c. Dicuntur a nonnullis *Paraboloides*: speciatim *Paraboloidem cubicalem* vocant, si $a^2x = y^3$; *Paraboloidem biquadraticalem*, si $a^3x = y^4$; *surdesolidalem*, si $a^4x = y^5$ &c. Harum curvarum respectu *Parabola* primi generis, superius explicata, dicitur *Apolloniana*, item *quadratica*. Ad parabolas quoque referri solent curvæ, in quibus $ax^{m-1} = y^m$, veluti $ax^2 = y^3$, $ax^3 = y^4$, quæ a nonnullis *semiparabolæ* appellantur. Omnes comprehenduntur sub communi æquatione $a^m x^n = y^r$, quæ ad alias quoque curvas extenditur, veluti ad eas, in quibus $a^2x^2 = y^4$, $a^2x^3 = y^5$, $a^3x^4 = y^7$.

COROLLARIUM 1.

520. Cum in parabolis superiorum generum sit $y^m = a^{m-1}x$, si alia quæcunque semiordinata dicatur v, abscissa ipsi respondens z; erit $v^m = a^{m-1}z$, consequenter

$$y^m : v^m = a^{m-1}x : a^{m-1}z$$

hoc est, $\quad = x : z$

Communis ideo parabolarum proprietas est, quod ordinatarum potentiæ rationem abscissarum habeant.

COROLLARIUM 2.

521. In semiparabolis vero est $y^m : v^m = ax^{m-1} : az^{m-1} = x^{m-1} : z^{m-1}$, seu potentiæ semiordinatarum sunt ut potentiæ abscissarum uno gradu inferiores e. gr. in semiparabolis cubicalibus cubi ordinatarum y^3 & v^3 sunt ut quadrata abscissarum x^2 & z^2. Et in genere in omnibus curvis parabolæ agnatis $y^{m+n} : v^{m+n} = a^m x^n : a^m z^n = x^n : z^n$.

DEFINITIO 45.

522. *Ellipses infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m(a - x)^n$, quæ a nonnullis *Elliptoides* dicuntur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$. E. gr. *Elliptoidem cubicalem appellant*, si $ay^3 = bx^2(a - x)$ atque *Elliptoidem biquadraticalem* ellipsin tertii generis, in qua $ay^4 = bx^2(a - x)^2$. Harum curvarum respectu *Ellipsis* primi generis *Apolloniana* vocatur.

COROLLARIUM 1.

523. Si alia quæcunque ordinata dicatur v & abscissa respondens z; erit $av^{m+n} = bz^m(a - z)^n$, consequenter $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m(a - x)^n : bz^m(a - z)^n$, hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m(a - x)^n : z^m(a - z)^n$.

COROLLARIUM 2.

524. Si fiat $a = b$; erit $y^{m+n} = x^m(a - x)^n$, & si porro fiat $n = 1$; erit $y^{m+1} = x^m(a - x) = ax^m - x^{m+1}$, hoc est, ellipses superiorum generum degenerant in circulos superiorum generum.

DEFINITIO 46.

525. *Hyperbolas infinitas* definit æ-

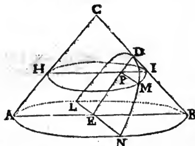
quatio $ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$, quæ a nonnullis *Hyperboloides* appellantur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$, e. gr. $ay^3 = bx^2(a+x)$. Et harum curvarum respectu *Hyperbola* primi generis *Apolloniana* salutatur.

COROLLARIUM.

526. Est ergo in infinitis hyperboloidibus $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m(a+x)^n : bz^m(a+z)^n$ hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m(a+x)^n : z^m(a+z)^n$.

DEFINITIO 47.

527. *Conos superiorum generum* appello, quorum bases & sectiones basibus parallelæ sunt circuli superio-



rum generum. Generatur istiusmodi conus, si recta linea AC in puncto sublimi C fixa, sed quæ pro re nata magis aut minus extendi posse concipitur, circa peripheriam circuli ANBL convertatur.

PROBLEMA 120.

528. *Investigare naturas curvarum, quæ prodeunt, si coni superiorum generum ita secentur, ut axis sectionis* DE *sit lateri coni* AC *parallelus, planum vero sectionis* LDN *secet basin coni secundum rectam* LN, *quæ ad basin sectionis triangularis* AB *sit perpendicularis*.

Eodem, quo supra (§. 511), modo ostenditur, esse PM & EN inter se parallelas & cum circulorum HMI atque ANB, tum curvæ LDN semiordinatas. Sit $PM = y$, $EN = q$, $AE = HP = v$, $DP = x$, $DE = z$, $PI = t$; reperietur ut *in probl.* 216 (§. 511) $EB = tz : x$. Est vero (§. 516)

$$HP^m : PM^m = PM : PI$$
$$v^m : y^m = y : t$$
$$\overline{}$$
$$y^{m+1} = tv^m$$

Porro $AE^m : EN^m = EN : EB$

$$v^m : q^m = q : \frac{tz}{x}$$
$$\overline{}$$
$$q^{m+1} = tzv^m : x$$

Quare $y^{m+1} : q^{m+1} = tv^m : \frac{tzv^m}{x}$

hoc est $\quad = 1 : \frac{z}{x}$ (§. 124)

seu $\quad = x : z$

Sunt ergo curvæ istæ parabolæ superiorum generum (§. 520).

Vel sit generaliter (§. 516)

$$HP^m : PM^m = PM^n : PI^n$$
$$v^m : y^m = y^n : t^n$$
$$\overline{}$$
$$y^{m+n} = t^n v^m$$

$$AE^m : EN^m = EN^n : EB^n$$
$$v^m : q^m = q^n : \frac{t^n z^n}{x^n}$$
$$\overline{}$$
$$q^{m+n} = \frac{t^n z^n v^m}{x^n}$$

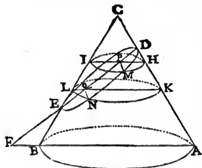
Quare

$$y^{m+n} : q^{m+n} = t^n v^m : \frac{t^n z^n v^m}{x^n}$$
$$\left.\begin{aligned} &= t^n v^m x^n : t^n z^n v^m \\ &= x^n : z^n \end{aligned}\right\} (§. 124)$$

Sunt itaque curvæ DLN superiorum generum parabolis agnatæ (§. 521).

PRO-

PROBLEMA 221.



529. *Inveſtigare naturam curvarum, quæ enaſcuntur, ſi coni ſuperiorum generum ita ſecentur, ut axis ſectionis* DE *continuatus cum baſi* AB *ſectionis triangularis continuata in* F *concurrat, planum vero ſectionis continuatum eandem ad angulos rectos ſecet.*

Patet, ut ſupra (§. 511), PM & QN eſſe inter ſe parallelas atque ſemiordinatas cum circulorum HMI & KNL, tum curvæ DMNE. Sit DE $= a$, DP $= x$, DQ $= v$, PH $= t$, QL $= ſ$, PM $= y$, QN $= z$; erit PE $= a - x$, QE $= a - v$ & reperietur ut in *probl.* 217 (§. 512) QK $= vt : x$, PI $= (ſa - ſx) : a - v)$. Eſt vero (§. 516)

$$\text{IP}^m : \text{PM}^m = \text{PM}^n : \text{PH}^n$$
$$\frac{ſ^m(a-x)^m}{(a-v)^m} : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n ſ^m (a-x)^m : (a-v)^m$$

Porro $\text{QL}^m : \text{QN}^m = \text{QN}^n : \text{KQ}^n$
$$ſ^m : z^m = z^n : \frac{v^n t^n}{x^n}$$

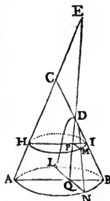
$$z^{m+n} = t^n ſ^m v^n : x^n$$

Quare
$$y^{m+n} : z^{m+n} = \frac{t^n ſ^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : \frac{v^n t^n ſ^m}{x^n}$$
hoc eſt $= (a-x)^m x^n : (a-v)^m v^n$

Sunt ideo curvæ iſtæ in numero ellipſium ſuperiorum generum (§. 523)

PROBLEMA 222.

530. *Inveſtigare naturam curvarum, quæ gignuntur, ſi coni ſuperiorum generum ita ſecentur, ut axis ſectionis* DQ *cum latere coni continuato* AC *continuatus & ipſe in* E *concurrat, planum vero ſectionis* LDN *ſecet baſin coni ſecundum rectam* LN, *quæ ad baſin* AB *ſectionis triangularis ſit perpendicularis.*



Patet ut ſupra (§. 511), PM & QN eſſe inter ſe parallelas, atque ſemiordinatas cum circulorum HMI & ANB, tum curvæ DLN. Sit DE $= a$, DP $= x$, DQ $= v$, PH $= t$, PI $= ſ$; erit EP $= a + x$, EQ $= a + v$ & reperietur ut in *probl.* 218 (§. 513) AQ $= t(a+v) : (a+x)$ & QB $= ſv : x$. Eſt vero (§. 516)

$$\text{PI}^m : \text{PM}^m = \text{PM}^n : \text{PH}^n$$
$$ſ^m : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n ſ^m$$

Porro $\text{QB}^m : \text{QN}^m = \text{QN}^n : \text{AQ}^n$
$$\frac{ſ^m v^m}{x^m} : z^m = z^n : \frac{t^n(a+v)^n}{(a+x)^n}$$

$$z^{m+n} = \frac{t^n ſ^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

Quare

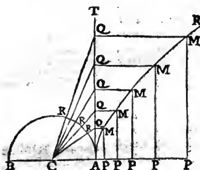
Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = t^n s^m : \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n} \; (\S.\ 124)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{hoc est} = 1 & : \frac{v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n} \\ \text{seu} = x^m (a+x)^n & : v^m (a+v)^n \end{array}\right\} (\S.\ cit.)$$

Sunt ideo curvæ hyperbolæ superiorum generum (§. 526).

PROBLEMA 223.



531. *Diametro semicirculi* AB *jungatur ad angulos rectos recta* AT *ducanturque ex centro* C *secantes* CQ. *Erigantur in* Q *normales* QM *ipsis* QR *æquales*. *Investigare naturam curvæ* AMR, *quæ est locus omnium punctorum* M *hac ratione inventorum*.

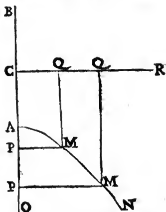
Sit AQ $=$ PM $= y$, QM $=$ QR $= x$, AB $= a$; erit (§. 379 *Geom.*) $y^2 = ax + x^2$.

Est ideo curva AMR hyperbola æquilatera, cujus axes & parameter diametro circuli AB æquales (§. 507).

COROLLARIUM.

532. Habemus ideo facilem hyperbolæ æquilateræ per innumera puncta M geometrice determinatam descriptionem.

PROBLEMA 224.



533. *Invenire æquationem hyperbolæ ad axem* CR *ex centro* C *ductum & ad axem transversum* AB *normalem relatæ*.

Sit CQ $=$ PM $= x$, CP $=$ QM $= y$, CB $=$ CA $= a$; erit BP $= a + y$, AP $= y - a$, ideoque BP . PA $= y^2 - a^2$. Sit porro parameter $= b$; erit (§. 459)

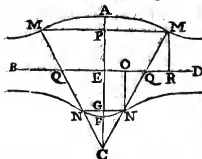
$$b : 2a = x^2 : y^2 - a^2$$
$$2ax^2 = by^2 - a^2 b$$
$$2ax^2 + a^2 b = by^2$$
$$\frac{2ax^2}{b} + a^2 = y^2$$

COROLLARIUM.

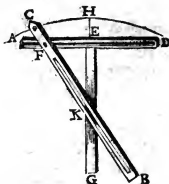
534. Quodsi hyperbola fuerit æquilatera, erit $2a = b$ (§. 506), consequenter $y^2 = x^2 + a^2$, sive $QM^2 = CQ^2 + CB^2$.

DEFINITIO 48.

535. Si ducatur (*Vid. Fig. seq.*) recta BD & alia AC ad ipsam in E perpendicularis, ex puncto autem extremo C per-



C perpendicularis AC agantur rectæ quotcunque CM rectam BD secantes in Q, fiatque QM = QN = AE = EF; curva, in qua sunt puncta M, dicitur a *Nicomede* inventore *Conchilis* seu *Conchois prima*; altera vero, in qua sunt puncta N, *Conchois secunda*; recta BD *regula*; punctum C *Polus*. Excogitavit autem instrumentum, quo motu continuo Con-



chois prima describi potest. Nimirum in regula AD excavatus est canalis, ut clavus teres regulæ mobili CB in F firmiter infixus intra eam libere moveri possit. Regulæ EG in K infigitur clavus alius, in fissuram regulæ mobilis CB immittendus. Quodsi regula BC ita moveatur, ut clavus F canalem AD percurrat; stylus in C Conchoidem primam describet.

COROLLARIUM I.

536. Sit AP = x, AE = a; erit PE = MR = $a - x$. Crescentibus ideo x, decrescit $a - x$ seu MR, ideoque curva continuo ad *regulam* BD propius accedit. Eodem modo patet, rectam NO continuo decrescere debere, ideoque conchoidem quoque inferiorem ad regulam continuo propius accedere.

COROLLARIUM 2.

537. Quoniam tamen inter conchoidem utramque & rectam BD semper interjicitur recta QM vel QN ipsi AE æqualis (§. 535); neutra conchoidum cum recta BD concurrere potest, consequenter BD est asymptotus utriusque conchoidis.

PROBLEMA 225.

538. *Invenire æquationem pro conchoide.*

Sit (*Vid. Fig.* 1 *hujus pag.*) QM = AE = a, EC = b, MR = EP = x, ER = PM = y; erit CP = $b + x$, & (§. 268 *Geom.*)

$$PE : MQ = EC : CQ$$
$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

Hinc CM = $a + ab : x = (ax + ab) : x$. Et quoniam $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$, consequenter $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$; quæ est æquatio naturam conchoidis primæ explicans.

Sit CE = b, QN = a, EG = ON = x, GN = EO = y; erit GC = $b - x$, & (§. 268 *Geom.*)

$$EG : QN = GC : CN$$
$$x : a = b - x : \frac{ab - ax}{x}$$

Habemus ergo ob $CN^2 = CG^2 + GN^2$

GN² (§. 417 *Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, hoc est, $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$, quæ est æquatio naturam conchoidis inferioris declarans.

COROLLARIUM.

539. Est ideo conchois utraque linea tertii generis (§. 382).

DEFINITIO 49.

540. Aliæ *Conchoidum* species prodeunt, si fiat CE : CQ = QM : AE, vel indefinite si $CE^m : CQ^m = QM^n : AE^n$.

COROLLARIUM.

541. Quare si CE $= b$, EA $= a$, CQ $= x$, QM $= y$, erit $ab = xy$ & pro infinitis conchoidibus $a^n b^m = x^m y^n$.

SCHOLION.

542. *Æquatio hæc videtur eadem cum æquatione hyperbolæ intra asymptotos* (§. 486); *eadem tamen non est, cum in præsente casu æquatio non exprimat relationem punctorum per rectas parallelas ad eandem rectam positione datam, quemadmodum in hyperbola.*

PROBLEMA 226.

543. *Invenire æquationem ad quodlibet punctum Conchoidis, in qua* CE : CQ = QM : AE.

Sit AE $= a$, CE $= b$, PM $= y$, PE $= x$; erit CP $= b + x$, $CP^2 = b^2 + 2bx + x^2$, $CM^2 = y^2 + b^2 + 2bx + x^2$ (§. 417 *Geom.*) & (§. 268 *Geom.*) CP : CM = CE : CQ = EP : QM. Quare CE . EP : CQ . QM = $CP^2 : CM^2$ (§. 213 *Arith.*), hoc est, ob CQ . QM = CE . EA *per hypoth.*

CE . EP : CE . EA = $CP^2 : CM^2$ hoc est (§. 124),

EP : EA = $CP^2 : CM^2$

$$x : a = b^2 + 2bx + x^2 : y^2 + b^2 + 2bx + x^2$$

$$ab^2 + 2abx + ax^2 = y^2x + b^2x + 2bx^2 + x^3.$$

quæ est æquatio desiderata.

DEFINITIO 50.

544. Diametro AB semicirculi AOB jungatur ad angulos rectos recta indefinita BC. Ducatur ex diametri puncto extremo A ad perpendicularem BC recta AH fiatque AM = IH, vel in altero quadrante LC = AN; erit punctum M, itemque L in curva AMOL, quam *Cissoidem* dixit *Diocles* inventor.

COROLLARIUM I.

545. Ducantur rectæ PM & KI ad AB normales; erunt eædem inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*) & (§. 268 *Geom.*) AP : KB = AM : IH. Sed AM = IH (§. 544). Ergo AP = KB (§. 149 *Arith.*), consequenter AK = PB (§. 88 *Arith.*) & PN = IK.

COROL-

COROLLARIUM 2.

546. Eodem modo patet, Cissoidem AMO semicirculum AOB bifariam dividere. Est enim AO : OF = AG : GB (§. 268 *Geom.*). Sed AO = OF (§.544). Ergo AG = GB (§.149 *Arith.*). Est itaque ANO quadrans.

COROLLARIUM 3.

547. AK : KI = KI : KB (§.327 *Geom.*), hoc est, AK : PN = PN : AP (§ 545). Porro AK : (KI) PN = AP : PM (§. 268 *Geom.*). Ergo PN : AP = AP : PM (§.167 *Arith.*). Sunt ideo AK, PN, AP & PM quatuor lineæ continue proportionales; & si fiat PN = v, AP = x, PM = y, $x^2 = vy$. Eodem modo ostenditur esse AP, PN, AK, KL continue proportionales.

PROBLEMA 227.

548. *Invenire æquationem, quæ naturam Cissoidis* AMOL *declarat.*

Sit AB = a, AP = x, PM = y; erit AK = PB (§.545) = $a - x$, $KI^2 = PN^2 = ax - x^2$ (§. 327 *Geom.*) & (§. 124. 547)

$$AK^2 : PN^2 = AP^2 : PM^2$$

$$a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$$

$$a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 = ax^3 - x^4$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; a - x$$

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

hoc est, $(a - x)y^2 = x^3$

Theorema: In Cissoide *Dioclis* cubus abscissæ AP æquatur solido ex quadrato semiordinatæ PM in complementum diametri circuli genitoris PB.

COROLLARIUM 1.

549. Quando punctum P cadit in B, tum fit $x = a$ & BC = y, consequenter $y^2 = \frac{a^3}{o}$. Quare $o : a = a^2 : y^2$, hoc est, valor ipsius y fit infinitus, ideoque Cissois AMOL cum BC nunquam concurrit. Est ergo BC Cissoidis asymptotus.

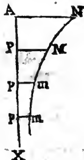
COROLLARIUM 2.

550. Cissois est linea secundi generis (§. 382).

SCHOLION.

551. *Veteres tam Conchoide, quam Cissoide usi sunt ad inveniendas duas medias continue proportionales inter duas rectas datas, quemadmodum docet* Pappus.

DEFINITIO 51.



552. Si recta AX dividatur in partes quotcunque æquales, ipsique in punctis divisionum A, P, p &c. jungantur rectæ AN, PM, pm &c. continue proportionales, puncta N, M, m &c. in curva existunt, quæ *Logistica*, itemque *Logarithmica* vocari solet:

COROLLARIMU 1.

553. Sunt ergo abscissæ AP, Ap &c. semiordinatarum PM, pm &c. logarithmi (§. 334 *Arith.*).

COROLLARIUM 2.

554. Hinc si AP = x, Ap = v, PM = y, pm = z, & logarithmi ipsorum y & z = ly & lz; erit $x = ly$ & $v = lz$, consequenter $x : v = ly : lz$, hoc est, denominatores rationum AN : PM & AN : pm sunt inter se ut abscissæ AP & Ap.

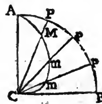
COROLLARIUM 3.

555. Quamobrem infinitas alias logisticas excogitare licet, si fiat $x^m : v^m = ly : lz$, ut nempe abscissarum potestates aut radices quæcunque (m nempe numerum fractum denotante) sint semiordinatarum logarithmi.

COROLLARIUM 4.

556. Cum semiordinatæ pm continuo decrescant, ratione AN ad pm continuo crescente (§. 553 *Anal.* & §. 205 *Arith.*) curva ad axem AX continuo propius accedit. Quodsi pm ponatur fieri nihilo æqualis, ratio ipsius AN in infinitum augetur, consequenter & abscissa AP (§. 554). Quare logistica nonnisi infinito intervallo cum axe concurrit, ideoque AX est ejus asymptotus.

DEFINITIO 52.



557. Si quadrans circuli in partes quotcunque æquales in punctis P, p, p &c. dividatur, & ex radiis CP, Cp, Cp &c. resecentur CM, Cm, Cm &c.

continue proportionales; puncta M, *m*, *m* &c. erunt in *Logistica spirali*.

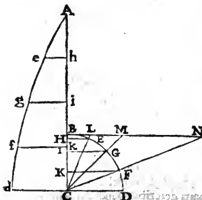
COROLLARIUM 1.

558. Sunt ergo arcus AP, A*p* &c. logarithmi ordinatarum CM, C*m* &c.

COROLLARIUM 2.

559. Unde liquet infinitas logisticas spirales excogitari posse (§. 555).

DEFINITIO 53.



560. Si quadrans BCD bifariam dividatur in G, & arcus BG, GD denuo subdividantur bifariam in E & F, atque ita porro; axis AC arbitrariæ longitudinis assumtus eodem modo dividatur in partes æquales A*b*, *bi*, *ik*, *k*C, tandemque in punctis *b*, *i*, *k*, C applicentur normales *be*, *ig*, *kf*, C*d* ipsis HE, IG, KF, CD æquales; puncta A, *e*, *g*, *f*, *d* erunt in Linea, a *Leibnitio* inventore *Linea Sinuum* dicta.

COROLLARIUM.

561. Cum HE, IG, KF, CD sint sinus arcuum BE, BG, BF, BD (§. 2 *Trigon.*); erunt abscissæ A*b*, A*i*, A*k*, AC ut arcus seu anguli; semiordinatæ *be*, *ig*, *kf*, C*d*, ut sinus eorundem arcuum seu angulorum.

DEFINITIO 54.

562. Iisdem factis, quæ in definitione præcedente fieri præcepimus, fiant *be*, *ig*, *kf* &c. tangentibus BL, BM, BN &c. vel secantibus CL, CM, CN &c. æquales; Curvæ adhuc aliæ gignentur, quas *Lineas Tangentium & Secantium* appellare libet.

COROLLARIUM.

563. In linea tangentium abscissæ sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem tangentes: in secantium vero linea abscissæ itidem sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem secantes.

DEFINITIO 55.

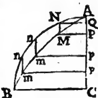
564. Quadrans arcus ANB dividatur in partes quotcunque æquales in N, *n* &c. per continuam bisectionem; in totidem dividatur radius AC per puncta P, *p* &c. Ducantur radii CN, C*n* &c. denique ex punctis P, *p* &c. erigantur perpendiculares PM, *pm* &c. istis in punctis M, *m* &c. occurrentes: erunt puncta M, *m* &c. in curva, quam *Dinostrates* inventor *Quadratricem* appellavit.

COROLLARIUM.

565. Est ergo AB : AN = AC : AP. Quare si fiat AB = *a*, AC = *b*, AN = *x*, AP = *y*; erit $ay = bx$.

DEFI-

DEFINITIO 56.



566. Si quadrans ANB & ejus radius in partes æquales dividantur ut in definitione præcedente, & ex punctis P, *p* &c. agantur rectæ PM, *pm* &c. ipsi CB; & ex punctis N, *n* &c. rectæ NM, *nm* &c. ipsi AC parallelæ: puncta M, *m* &c. sunt in *Quadratrice Tschirnhausiana* a DNO *de Tschirnhausen* ad imitationem alterius excogitata (a).

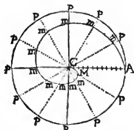
COROLLARIUM 1.

567. Cum etiam hic AB : AN = AC : AP; quadratrix quoque Tschirnhausiana continetur sub æquatione $ay = bx$.

COROLLARIUM 2.

568. Cum sinus arcuum AN, A*n*, si ducantur, æquales sint semiordinatis PM, *pm*, sitque AP : A*p* = AN : A*n* (§. 566); abscissæ Quadratricis hujus sunt ut arcus, & semiordinatæ ut sinus eisdem respondentes, quemadmodum in linea sinuum (§. 561).

DEFINITIO 57.



569. Peripheria circuli AP*p*A dividatur in partes quotcunque æquales in punctis *p* per continuam bisectionem. In totidem partes dividatur radius CA, fiatque CM parti uni, C*m* vero duabus &c. partibus radii æqualis. Erunt puncta M, *m*, *m* &c. in linea curva, quam ab inventore *Archimede* dicunt *spiralem* vel *Helicem Archimedeam*. Dicitur autem *Spiralis prima*, quia continuari potest, circulo duplo radio descripto: imo *secunda* continuatur, descripto circulo radio triplo, & ita porro in infinitum.

(a) In Medicina Mentis part. 2. p. 114.

COROLLARIUM 1.

570. Est ergo AM ad peripheriam ut C*m* ad radium. Quare si peripheria dicatur p, radius AC $= r$, AP $= x$, PM $= y$; erit CM $= r - y$, consequenter ob $p : r = x : r - y$ habebimus $pr - py = rx$.

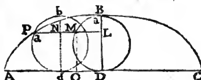
COROLLARIUM 2.

571. Si CM $= y$; erit $rx = py$: quam æquationem cum quadratrice tam *Dinostratis*, quam *Tschirnhausii* communem habet spiralis.

COROLLARIUM 3.

572. Quare pro infinitis spiralibus & quadratricibus erit $r^m x^n = p^n y^m$.

DEFINITIO 58.



573. *Cyclois* vel *Trochois* est curva, quam describit punctum *a* in peripheria circuli, si circulus super recta AC rotatur.

COROLLARIUM 1.

574. Recta igitur AC peripheriæ, AD semiperipheriæ circuli æqualis est, & in quocunque circuli genitoris situ A*d* arcui P*d*.

COROLLARIUM 2.

575. Si PL ducatur cum AD parallela; erit PM arcui circuli genitoris BM æqualis. Est enim P*d* = A*d*, & hinc P*b* = *d*D (§. 574). Quare cum NL = D*d* (§. 226 *Geom.*) & ob P*b* = MB, etiam PN = ML (§. 12 *Trigon.*); erit etiam PN + NM = PM = ML + NM = NL = D*d*, consequenter ob D*d* = P*b* = MB *per demonstr.* PM = MB. Sumto igitur arcu MB pro abscissa, PM pro semiordinata, si BM $= x$, PM $= y$; erit $x = y$.

DEFINITIO 59.

576. *Epicyclois* deſcribitur, ſi circulus non ut in præcedente definitione ſuper recta, ſed ſuper peripheria alterius circuli incedat. Dicitur *Epicyclois ſuperior*, ſi circulus genitor per peripheriæ convexitatem rotatur: *Epicyclois inferior*, ſi ejus concavitatem emetitur.

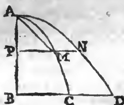
SCHOLION I.

577. *Logarithmica, logiſtica ſpiralis, linea ſinuum, linea tangentium, linea ſecantium, quadratrix Dinoſtratis, quadratrix Tſchirnhauſiana, Spiralis Archimedea, Cyclois, Epicyclois ſunt lineæ tranſcendentes: neque enim per æquationes algebraicas explicari poſſunt. Tradidimus equidem pro aliquibus earum æquationes; veruntamen cum in his aſſumſerimus arcus circulares in numerum indeterminatarum, æquationes algebraicæ non ſunt. Suppoſuimus enim ſuperius, æquationes algebraicas relationem, quam habent puncta curvarum ad axem vel diametros, per ſolas lineas rectas explicare debere.*

SCHOLION 2.

578. *Innumeræ autem curvæ aliæ tam algebraicæ, quam tranſcendentes excogitari poſſunt & actu excogitatæ ſunt a Geometris. Sed de his omnibus agere minime conſultum eſt. Trademus autem in analyſi infinitorum methodos generales, quibus non modo curvarum hactenus explicatarum, ſed etiam aliarum quarumcunque ſymptomata, ſi quando iis opus habemus, erui poſſunt. Ut tamen appareat, quomodo plures excogitari poſſint; unum alterumque exemplum addere lubet.*

PROBLEMA 228.



579. *Invenire naturas curvarum, quæ prodeunt, ſi ſemiordinatæ* PM *continuentur in* N, *donec fiant chordis* AM *æquales.*

Facile apparet, curvas infinitas, imo infinitas earum ſeries conſtrui poſſe. Æquatio igitur in dato caſu ſpeciali eruenda ex æquatione curvæ genetricis AMC. Sit ea circulus, cujus diameter a. Sit in omni caſu $AP = x$, $PN = y$; erit $PM^2 = ax - x^2$ (§. 377). Quare cum $AP^2 = x^2$ & $AM^2 = AP^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $AM^2 = ax$, conſequenter æquatio ad curvam genitam AND $y^2 = ax$. Eſt itaque curva AND parabola (§. 388).

Sit curva genetrix AMC parabola: erit $PM^2 = ax$ (§. 388), conſequenter $AM^2 = PN^2 = ax + x^2$. Quoniam itaque æquatio ad curvam AND $y^2 = ax + x^2$; erit ea hyperbola æquilatera, cujus axis tranſverſus $= a$ (§. 507).

Sit curva genetrix AMC hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$ (§. *cit.*), conſequenter $AM^2 = PN^2 = ax + 2x^2$. Æquatio itaque ad curvam AND $y^2 = ax + 2x^2$, ideoque eadem hyperbola ſcalena, cujus parameter a, axis tranverſus vero $= \frac{1}{2}a$ (§. 459).

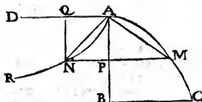
Sit AMC parabola ſecundi generis, erit $PM = \sqrt[3]{a^2x}$ (§. 519), ideoque $PM^2 = \sqrt[3]{a^4x^2}$, & $PN^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$. Cum itaque æquatio ad curvam ſit $y^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$; erit $(y^2 - x^2)^3 = a^4x^2$, ſeu $y^6 - 3x^2y^4 + 3x^4y^2 = x^6 + a^4x^2$.

SCHOLION.

580. *Patet per problema præſens plurimarum curvarum deſcriptiones facillimo negotio detegi poſſe: quod idem per ſequentia quoque problemata intelligitur. Nec minus liquet, eodem modo ad axem* AB *applicari poſſe tangentes, ſubtangentes, normales, ſubnormales, & quaſcunque alias lineas eodem modo determinatas. Hoc pacto ſubinde theoremata non inelegantia reperiuntur, qualia in ipſa reſolutione problematis præſentis continentur, v. gr. Quod, ſi parabola circa diametrum circuli deſcribatur, chordæ circuli* AM *ſint ſemiordinatis parabolæ* PN *æquales.*

PRO-

PROBLEMA 229.



581. *Investigare naturas curvarum, quæ gignuntur, si ad chordam* AM *curvæ genetricis* AMC *erigatur perpendicularis* AN *semiordinatam* PM *ultra axem* AB *continuatam secans in* N.

Sit curva genetrix AMC: quoniam MAN angulus rectus *per hypoth.* erit $PM : AP = AP : PN$ (§.327 *Geom.*), consequenter $PM^m : AP^m = AP^m : PN^m$ (§.124), ideoque $PN^m = AP^{2m} : PM^m$, consequenter si $AP = x$, $PN = y$; $y^m = x^{2m} : PM^m$. Valor igitur ipsius PM & exponens m ex æquatione curvæ genetricis AMC determinantur.

Sit AMC circulus, erit $PM^2 = ax - x^2$ (§. 377), ideoque æquatio ad curvam ANR $y^2 = x^4 : (ax - x^2) = x^3 : (a - x)$. Est igitur curva ANR Cissois *Dioclis* (§. 548).

Sit curva genetrix parabola *Apolloniana*: erit $PM^2 = ax$, ideoque $y^2 = x^4 : ax = x^3 : a$, hoc est, $ay^2 = x^3$. Est igitur ANR semiparabola secundi generis (§. 382. 519).

Sit in genere curva genetrix quædam ex semiparabolis infinitis, quæ definiuntur per æquationem $PM^m = ax^{m-1}$, ideoque $y^m = x^{2m} : ax^{m-1}$, $= x^{m+1} : a$, hoc est, $ay^m = x^{m+1}$. Est igitur ANR semiparabola proxime superior genetrice (§. *cit.*). Unde patet modus describendi omnes semiparabolas in infinitum, quæ continentur sub æquatione $y^m = ax^{m-1}$.

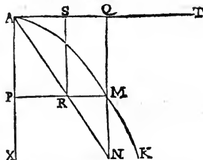
Sit curva genetrix hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$ (§.507), ideoque $y^2 = x^4 : (ax + x^2) = x^3 : (a + x)$. Est igitur ANR curva secundi generis (§.382), affinitatem quandam habens cum Cissoide (§. 548), sed quæ peculiari nomine destituitur.

Sit curva genetrix ellipsis: erit $PM^2 = (abx - bx^2) : a$ (§. 421), ideoque $y^2 = ax^4 : (abx - bx^2)$, hoc est $by^2 = ax^3 : (a - x)$.

SCHOLION.

582. *Si circuli superiorum generum sumuntur pro genetrice, Cissoides superiorum generum erunt genita.*

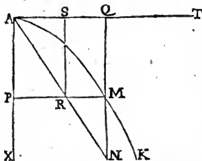
PROBLEMA 230.



583. *Sit curva genetrix* AMK, *recta* AT *ad axem* AX *normalis*, AS *magnitudinis constantis*, *investigare naturam curvæ*, *in qua est punctum* N, *quod determinatur*, *demissa ex* S *perpendiculari* SR *ad semiordinatam genetricis* PM *& ducta recta* QN *per punctum curvæ genetricis* M *axi* AX *parallela*, *rectæ* AN *ex vertice* A *per punctum* R *ductæ occurrente in* N.

Sit $AS = a$, $AQ = x$, $QN = y$; erit ob parallelas SR & QN (§.268 *Geom.*)

AS:



$AS : (SR) QM = AQ : QN$

$a : QM = x : y$

ideoque $\frac{QM \cdot x}{a} = y$

Sit AMK parabola Apolloniana; erit $QM = x^2 : a$ (§. 391). Est igitur

$$y = x^3 : a^2$$
$$a^2 y = x^3$$

quae est aequatio ad parabolam secundi generis (§. 382. 519).

Sit AMK quaedam ex infinitis parabolis; erit $QM = x^m : a^{m-1}$ (§. *cit.*); ideoque $y = x^{m+1} : a^m$ consequenter $a^m y = x^{m+1}$. Est igitur curva genita parabola proxime superior genetrice, patetque simul modus describendi parabolas omnes in infinitum, quae continentur sub aequatione $a^{m-1} x = y^m$ (§. 519).

CAPUT VII.

De Locis Geometricis.

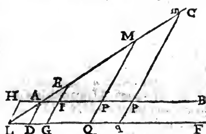
DEFINITIO 60.

584. Locus Geometricus est linea, per quam construitur problema indeterminatum. In specie *Locus ad rectam* dicitur, si linea recta aequationi construendae sufficit; *Locus ad circulum*, si circulo utendum & ita porro.

DEFINITIO 61.

585. Loca ad lineam rectam & circulum veteres dixere *Loca plana*: quae vero sunt ad parabolam, ellipsin aut hyperbolam, *Loca solida*. Commodius Loca in ordines distinguuntur secundum numerum dimensionum, ad quem assurgunt quantitates indeterminatae. Sic *Locus primi ordinis* est, si aequatio $x = ay : c$. *Locus secundi seu quadratici ordinis*, si e.gr. $y^2 = ax$ vel $y^2 = a^2 - x^2$ &c. *Locus tertii seu cubici ordinis*, si e.gr. $y^3 = a^2 x$, vel $y^3 = ax^2 - x^3$ &c.

PROBLEMA 231.



586. *Construere loca ad rectam.*

Si $y = ax : b$, $y = ax : b + c$, $y = ax : b - c$, $y = c - ax : b$; Locus semper est ad rectam. Sit enim angulus datus CAB, in quo fiat $AI = b$, $IE = a$: ductis ipsi EI parallelis quibuscunque PM, *pm* &c. erit $AP = x$, $PM = y$. Est enim (§. 268 *Geom.*)

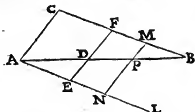
AI:

$$AI : IE = AP : PM$$
$$b : a = x : y$$

Ergo $ax : b = y$

Quodsi EI continuetur in G, ita ut sit $IG = c$, per G agatur DF ipsi AB & ex A AD ipsi EI parallela; erit $AP = DQ = x$, QM, qm &c. $= y$. Est enim $PM = ax : b$ *per demonstr.* $PQ = pq = IG = c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo QM seu $qm = ax : b + c = y$.

Si $LG = b$, $GE = a$ & LQ vel $Lq = x$; erit QM vel $qm = ax : b$ *per demonstr.* Fiat $IG = c$ & per I ducatur ipsi DF parallela AB; erit $PQ = pq = c$ (§. 257 *Geom.*), consequenter PM vel $pm = ax : b - c$.



Denique sit $AC = c$ & $AD = b$; ducatur per D recta EF ipsi AC parallela, fiatque $DE = a$. Ducatur recta AL & per C ipsi AL parallela CB. Quodsi alia parallela MN ad EF agatur; erit $AP = x$, $PM = y$. Est enim (§. 268 *Geom.*)

$$AD : DE = AP : PN$$
$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

Sed $MN = AC = c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo $PM = c - ax : b$.

PROBLEMA 232.

587. *Invenire theoremata generalia construendi omnes aequationes locales ad parabolam.*

Duo theoremata nobis investiganda: in quorum altero y refertur ad concavitatem, in altero autem ad convexitatem parabolae.

Sint KP & DL, itemque KD & QM inter se parallelae, & LDH angulus quicunque. Sit porro $AK = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DK = PN$ (§. 257 *Geom.*) $= n$, $DL = s$, & parametro t describatur parabola AM, cujus axis vel diameter AP. Sit porro $DQ = x$, $QM = y$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN \; (= PK)$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$
$$DH : LH = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

Ergo $AP = PK - KA = sx : q - p$ & $PM = QM - PN - QN = y - \frac{rx}{q} - n$

Quare cum sit $PM^2 = t \cdot AP$ (§. 388); erit

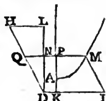
$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tsx}{q} - tp$$

hoc est

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 - \frac{tsx}{q} + tp = 0 \quad (*)$$

Sit

(*) *Si in apposita figura ponatur* $LH = r = 0$; *erit* $DH = DL = q = s$, *consequenter formula generalis Cl. Auth. degenerabit in sequentem* $y^2 - 2ny - tx + n^2 + tp = 0$, *qua utpote comodiori uti licebit in omnibus casibus in quibus non occurrit productum* xy.



Sit denuo in casu altero, ubi IM parallela ipsi DQ & DI ipsi QM, KA $=p$, DH $=q$, LH $=r$, DK $=$ PN (§. 257 *Geom.*) $=n$, DL $=f$, IM $=$ DQ $=y$, QM $=x$. Parabola AM denuo parametro t describatur. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = y : \frac{fy}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Ergo AP $=$ DN $-$ AK $= fy : q - p$ & PM $=$ QM $-$ QN $-$ PN $= x - ry : q - n$.

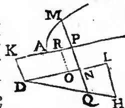
Quare cum sit PM$^2 = t \,.\,$AP (§. 388. 419) erit

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = \frac{tfy}{q} - tp$$

hoc est

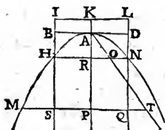
$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = 0$$
$$(*) \qquad - \frac{tfy}{q} + tp$$

Quoad usum formularum generalium hic & in sequentibus hæc tenenda sunt. Formula generalis repræsentat casum maxime compositum, ex quo resultant cæteri simpliciores, si quædam lineæ in schemate deleantur. Quodsi ergo in casu quodam lineæ quædam deficiunt; in æquatione quoque deficere debent termini, quos valor illarum ingreditur, quemadmodum ex sequentibus apparet, ubi examinis loco elicimus formulam particularem, quæ ad construendum proponebatur, ex constructione vi formulæ generalis eruta. Quamobrem ubi æquatio quædam localis simplicior confertur cum formula generali seu casus maxime compositi; termini formulæ generalis, quibus nulli respondent in æquatione ad construendum proposita, nihilo censentur æquales, quatenus coefficientes in dato casu nihilo æquales censendi sunt, quia nulli sunt: constat autem nihilum in quantitatem positivam, qualis est utraque indeterminata, ductum producere nihilum. In comparatione itaque æquationis datæ cum formula generali terminus generalis, qui deficit, v. gr. $-\frac{2rxy}{q}$, ponitur æqualis nihilo. Quodsi ergo per indeterminatarum valorem x & y dividatur; relinquetur $-\frac{2r}{q} = 0$. Unde brevitatis gratia indeterminatæ statim omittuntur, ponitur que $-\frac{2r}{q} = 0$, vel etiam $\frac{2r}{q} = 0$, quia $-\frac{2r}{q}$ dividi potest per -1, ut prodeat $\frac{2r}{q} = 0$.



Sit e. gr. $y^2 - ax = 0$; erit vi theorematis primi seu formulæ primæ $-\frac{2r}{q} = 0$, ideoque $\frac{r^2}{q^2}t = 0$, & $f = q$, porro $n = 0$ & $tf : q = a$, hoc est, $a = t$. Cadit ergo punctum D in A & Q in P, nec alia re opus est, quam ut parametro a parabola

(*) *Quod si in formula generali sit* $r = 0$; *erit* $f = q$, *ideoque formula illa degenerabit in sequentem* $x^2 - 2nx - ty + n^2 + tp = 0$ *valituram pro pro omnibus casibus, in quibus non occurrit productum* xy.



bola AHM describatur: erit enim AP $= x$, PM $= y$.

Sit $y^2 + ay - bx + \frac{1}{4}a^2 = 0$; erit $2r : q = 0$, consequenter (*Vid. Fig. 2 pag. praec.*) H cadit in L, ideoque $f = q$. Porro $a = -2n$; ergo $-\frac{1}{2}a = n$. Item $-t = -b$, ideoque $t = b$. Denique $n^2 + tp = \frac{1}{4}a^2$, hoc est, $\frac{1}{4}a^2 + bp = \frac{1}{4}a^2$, ideoque $p = 0$. Cadit ergo punctum K in A. Parametro itaque b describenda parabola (*Vid. Fig. hujus pag.*) AHM & in A erigenda perpendicularis AB $= \frac{1}{2}a$. Ducta enim BS axi AP parallela, erit ob $n = -\frac{1}{2}a$, MS $= y$ & BS $= x$.

Sit $y^2 - ay - bx - c^2 = 0$; erit vi theorematis primi $\frac{2r}{q} = 0$, ideoque $q = f$

$$\frac{-2n = -a}{n = \frac{1}{2}a} \qquad \frac{-t = -b}{t = b} \qquad \frac{n^2 + tp = -c^2}{tp = -c^2 - \frac{1}{4}a^2} \qquad p = \frac{-c^2 - \frac{1}{4}a^2}{b}$$

(*)

Parametro ergo (*Vid. Fig. hujus pag.*) b describenda parabola AHM & quia KA sive p est quantitas negativa, auferenda est ex AP, ita ut origo indeterminatae x statuatur in R vel N. Denique ob $n = \frac{1}{2}a$ fiat AD $= \frac{1}{2}a$ & ducatur DQ parallela axi AP; erit NQ $=$ RP $= x$ & QM $= y$.

Sit $x^2 - ay + b^2 = 0$; erit vi theorematis secundi $r : q = 0$, ideoque $q = f$.
Porro $n = 0$ &

$$\frac{-t = -a}{t = a} \qquad \frac{tp = b^2}{ap = b^2} \qquad p = \frac{b^2}{a}$$

(*) *Adhibita formula nostra particulari* erit

$$\frac{-2n = -a}{n = \frac{1}{2}a} \qquad \frac{-t = -b}{t = b} \qquad \frac{n^2 + tp = -c^2}{\frac{1}{4}a^2 + bp = -c^2} \qquad p = \frac{-c^2 - \frac{1}{4}a^2}{b}$$

Construitur ideo parabola (*Vid. Fig. hujus pag.*) AHM parametro a, factaque AK $= b^2 : a$; erit IK $= x$, IH $= y$.

Sit $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$; erit

$$\frac{-\frac{2r}{q} = -\frac{a}{b}}{\frac{r}{q} = \frac{a}{2b}} \quad \frac{r = a}{q = 2b} \qquad \frac{-\frac{tf}{q} = -c}{t = \frac{qc}{f}} \quad t = \frac{2bc}{f} \qquad \frac{2n = 0}{n = 0} \quad \frac{n^2 + tp = 0}{p = 0}$$

Quoniam itaque (*Vid. Fig. 2 pag. praec.*) $a = r =$ LH, & $2b = q =$ DH, si angulus L datus; erit DL $= f$ determinatae longitudinis, ut ideo parameter $t = \frac{2bc}{f}$ determinari possit.

Construatur itaque parametro (*Vid. Fig. hujus pag.*) $2bc : f$ parabola AHM & factis AO $= 2b$ atque RO ad AP normalis $= a$, ducatur recta AT; erit TM ipsi OR parallela $= y$, AT $= x$.

Caeterum loca esse rite constructa patet, si assumtis valoribus, prout per regulam determinantur, quaeratur aequatio ad curvam, eademque cum proposita reperiatur. Etenim si in exemplo ultimo AO $= 2b$, RO $= a$, parameter $= 2bc : f$, AT $= x$, TM $= y$, cum sit (§. 268 *Geom.*)

$$AO : AR = AT : AP$$
$$2b : f = x : \frac{fx}{2b}$$

erit t. AP $= 2bcfx : 2bf = cx$.

Et quia (§. *cit.*) AO : OR $=$ AT : TP

$$2b : a = x : \frac{ax}{2b}$$

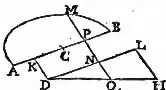
erit PM $=$ TM $-$ TP $= y - \frac{ax}{2b}$

ideoque PM$^2 = y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2}$

Quare $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} = cx$, consequenter $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, quae est aequatio ad construendum proposita.

PROBLEMA 233.

588. *Invenire theorema generale construendi omnia loca solida ad ellipsin.*



Circa diametrum AB descripta sit ellipsis AMB, sintque KD & LH semiordinatæ PM, DL diametro AB parallelæ. Sit $KD = PN = n$, $KC = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, semidiameter AC vel $CB = m$, parameter $= t$, $DQ = x$, $QM = y$. Erit (§. 257 *Geom.*) $KP = DN$, & (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Quare $CP = DN - KC = fx : q - p$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$. Jam ex natura ellipsis (§. 420. 455)

$$t : 2m = PM^2 : AP \cdot PB$$

Est vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$, $AP = m + \frac{fx}{q} - p$ & $PB = m - \frac{fx}{q} + p$, ideoque $AP \cdot PB = m^2 - p^2 + \frac{2pfx}{q} - \frac{f^2x^2}{q^2}$. Ergo (§. cit.) $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tf^2x^2}{2mq^2}$

Unde tandem habetur

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{tf^2x^2}{2mq^2} \qquad - \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tm^2}{2m}$$
$$(*) \qquad\qquad + \frac{tp^2}{2m}$$

Sit e. gr. $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy, x & y erunt $r : q = 0$, $r = 0$, $q = f$, $\frac{tf^2}{2mq^2} = \frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$. Hinc $t : 2m = c : b$ exprimit rationem parametri ad diametrum. Porro $-2n = 0$, $n = 0$; $\frac{2tpf}{2mq} = 0$, $p = 0$, $-\frac{tm^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b}$ hoc est, $\frac{m^2c}{b} = \frac{a^2c}{b}$. Quare $m^2 = a^2$, & hinc semidiameter $m = a$. Jam quoniam $\frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$; erit $t = \frac{2ac}{b}$. Parametro igitur $\frac{2ac}{b}$ & axe $2a$ construatur ellipsis AMB; erit $CP = x$. $PM = y$.

Sit $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy & y, erit $r : q = 0$, $r = 0$; consequenter $f = q$. Quare $\frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$, ideoque $t = \frac{2mc}{b}$, & ratio diametri AB ad parametrum $= b : c$. Porro $2n = 0$, $n = 0$; $\frac{2tp}{2m} = \frac{cd}{b}$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $2p = d$, seu $p = \frac{1}{2}d$. Denique $-\frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b}$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 - p^2 = a^2$, seu $m^2 = a^2 + \frac{1}{4}d^2$. Est itaque semidiameter $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}d^2)}$. Quodsi ergo semidiametro $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}d^2)}$ & parametro $2c\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}d^2)} : b$ describatur ellipsis, fiatque $KC = \frac{1}{2}d$, erit $KP = x$, $PM = y$.

Sit

(*) *Si in hac formula universali ponatur* $r = 0$, *obtinebitur hæc alia, valitura pro omnibus casibus, in quibus non occurrit* xy, *nempe*

$$y^2 + \frac{tx^2}{2m} - 2ny - \frac{2tpx}{2m} + n^2$$
$$- \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = 0$$

Sit $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{bx^2}{c} - a^2 = 0$; erit $\frac{2r}{q} = \frac{d}{f}$, $\frac{r}{q} = \frac{d}{2f}$, consequenter $r = d$, $q = 2f$; hincque ob datum angulum DNQ (*Vid. Fig. pag. praec.*), constat valor quoque rectae $DL = f$. Porro $\frac{r^2}{q^2} + \frac{tf^2}{2mq^2} = \frac{b}{c}$; hoc est $\frac{d^2}{4f^2} + \frac{tf^2}{2m \cdot 4f^2} = \frac{b}{c}$; proinde $t : 2m = (4bf^2 - cd^2) : cf^2$. Est denique $n = 0$, $p = 0$ & $-tm^2 : 2m = -a^2$, consequenter $m^2 = a^2cf^2 : (4bf^2 - cd^2)$, ideoque $m = \sqrt{a^2cf^2} : \sqrt{(4bf^2 - cd^2)}$. Hinc vero porro ob datam rationem $2m : t$ reperitur parameter. Quare si parametro t & diametro $2m$ ellipsis construatur fiatque $CF = 2f$, $DF = d$, ducta recta CQ ex C per F semiordinatae PM continuatae in Q occurrente, erit $QM = y$, $CQ = x$.

Locum rite esse constructum eodem modo, quo in parabola ostenditur. Etenim (§. 268 *Geom.*)

$$CF : DF = CQ : QP$$
$$2f : d = x : \frac{dx}{2f}$$

Quare $PM = y - \frac{dx}{2f}$, consequenter $PM^2 = y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$.

Porro (§. *cit.*) $CF : CD = CQ : CP$

$$2f : f = x : \frac{fx}{2f}$$

Quare $AP = \frac{\sqrt{a^2cf^2}}{\sqrt{(4bf^2 - cd^2)}} + \frac{fx}{2f}$ & $PB = \frac{\sqrt{a^2cf^2}}{\sqrt{(4bf^2 - cd^2)}} - \frac{fx}{2f}$, consequenter $AP \cdot PB = \frac{a^2cf^2}{4bf^2 - cd^2} - \frac{f^2x^2}{4f^2}$. Est itaque $\frac{t}{2m} \cdot AP \cdot PB = (4bf^2 - cd^2)a^2cf^2 : cf^2(4bf^2 - cd^2) - (4bf^2f^2x^2 + cd^2f^2x^2) : 4cf^2f^2 = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$, consequenter cum sit in ellipsi $\frac{t}{2m} \cdot AP \cdot PB = PM^2$ (§. 420. 455), $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2} = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$. Ergo $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{bx^2}{c} - a^2 = 0$.

COROLLARIUM.

589. Cum in ellipsi sit $b : a = y^2 : ax - x^2$ (§. 420); si $b = a$, hoc est, si parameter diametro aequalis; erit $y^2 = ax - x^2$, seu $y^2 - ax + x^2 = 0$, quae est aequatio ad circulum (§. 377). Aequatio itaque localis ad ellipsin degenerat in aequationem localem ad circulum, si ponatur $t = 2m$ & angulus ad (*Vid. Fig. pag. praec.*) P rectus: quo facto erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$(*) \qquad + \frac{f^2x^2}{q^2} \qquad - \frac{2pfx}{q} - m^2 + p^2$$

Caeterum cum ex comparatione formulae propositae cum generali demum intelligatur, num $t = 2m$; eadem formula pro construendis locis, ad ellipsin atque ad circulum sufficit.

Ponamus e.gr. $y^2 + x^2 - by - cx = 0$. Quoniam xy deest in aequatione, erit $r : q = 0$, consequenter $f = q$. Quare $t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Locus ideo planus est ad circulum. Porro

$$-2n = -b \qquad\qquad -2tp : 2m = -c$$
$$n = \tfrac{1}{2}b \qquad\qquad 2p = c, \text{ ob } t = 2m.$$
$$p = \tfrac{1}{2}c$$

Denique $n^2 - m^2 + p^2 = 0$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

h. e. $\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 = m^2$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}$$

Quare ducta linea recta AB & in ea assumta $CN = GD = \frac{1}{2}c$, si porro fiat $GN = CD$ & ad AB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$, atque ex centro C radio CG describatur circulus; erit $GR = NP = x$ & $RM = y$.

Cum enim sit $CG^2 = CD^2 + GD^2$ (§. 417 *Geom.*), erit $CG = \sqrt{(\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c^2)}$. Porro ob $PR = GN$ (§. 257 *Geom.*) $= \frac{1}{2}b$, est $PM = y - \frac{1}{2}b$, ideoque $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$. Similiter $CP = PN - NC = x - \frac{1}{2}c$, ideoque $CP^2 = x^2 - cx + \frac{1}{4}c^2$. Quare cum sit $CP^2 + PM^2 = CM^2$ (§. 417 *Geom.*), necnon $CM^2 = CG^2$ (§. 40 *Geom.*) $= \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2$;

Cec 2

(*) *Etiam hoc loci posito r = 0, obtinetur formula simplicior, & maximi quidem usus, licet tantum valitura pro casibus in quibus non occurit* xy; *nempe*

$$y^2 + x^2 - 2ny - 2px + n^2 - m^2 + p^2 = 0$$

$\frac{1}{4}c^2$; erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 + x^2 - cx + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2$, ideoque $y^2 + x^2 - by - cx = 0$, quæ eſt æquatio localis ad conſtruendam propoſita.

PROBLEMA 234.

590. *Invenire theorema generale conſtruendi omnia loca ad hyperbolam circa diametrum deſcriptam.*

Diametro tranſverſa $AB = 2m$ & parametro t deſcripta ſit hyperbola AM, cujus centrum in C, ductiſque KD & LH cum QM, DL vero cum BP parallelis, fiat $KD = PN = n$, $KC = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = ſ$, $DQ = x$, $QM = y$; erit (§. 257 *Geom.*) $KP = DN$, & (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : ſ = x : \frac{ſx}{q}$$

Quare $CP = DN - KC = \frac{ſx}{q} - p$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$. Jam (§. 459)

$$t : 2m = PM^2 : AP \cdot PB$$

Eſt vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$ & $AP \cdot PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$ (§. 86) $= \frac{ſ^2x^2}{q^2} - \frac{2pſx}{q} + p^2 - m^2$. Unde habetur $\frac{tſ^2x^2}{2mq^2} + \frac{2tpſx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$.

Quare æquatio generalis pro quovis loco hyperbolico

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tſ^2x^2}{2mq^2} + \frac{2tpſx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m}$$
$$- \frac{tp^2}{2m}$$

(*)

Quando contingit reperiri $t = 2m$, hyperbola eſt æquilatera (§. 505. 506)

Eadem formula reperitur, ſi hyperbola ad diametrum conjugata refertur, niſi quod $tm^2 : 2m$ ſigno $-$ afficiatur.

Sit e. gr. $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{ac^2}{b} = 0$. Cum in æquatione non habeantur xy, y & x; erit $r : q = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $ſ = q$, conſequenter $-t : 2m = -c : b$, ideoque ratio parametri t ad diametrum $2m = c : b$. Porro $tm^2 : 2m = a^2c : b$, hoc eſt, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 = a^2$. Diameter ideo hyperbolæ $2a$; unde ob rationem diametri ad parametrum datam parameter reperiri poteſt. Quare ſi datis diametro & parametro hyperbola AML conſtruatur; erit $CP = x$, $PM = y$. Eſt enim $AC = CB = a$, ideoque $BP = a + x$ & $AP = x - a$, conſequenter $AP \cdot PB = x^2 - a^2$. Quare $c : b = y^2 : x^2 - a^2$ (§. 459). Eſt itaque $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{a^2c}{b} = 0$.

Sit $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{acx}{b} = 0$. Quoniam in æquatione deſiderantur xy, y & quantitas pure cogni-

(*) *Cum formularum generalium facilior evadat praxis, ſi ad ſimpliciores reducantur, conſultum duximus etiam formulam pro hyperbola ſimpliciorem efficere poſito r = 0; erit nempe*

$$y^2 - \frac{tx^2}{2m} - 2ny + \frac{2tpx}{2m} + n^2$$
$$+ \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$$

Pro hyperbola æquilatera formula eſt

$$y^2 - x^2 - 2ny + 2px + n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

cognita; erit $r:q = 0$, $r = 0$, $n = 0$, & quia r seu $HL = 0$, (*Vid. Fig. 1 pag. praec.*) punctum H cadit in L, ac proinde $DH = DL$ seu $q = f$. Quamobrem $-t:2m = -c:b$, hoc est; ratio parametri ad diametrum $2m$ denuo $= c:b$. Porro $2tp:2m = ac:b$, hoc est, ob $t:2m = c:b$, $2p = a$ seu $p = \frac{1}{2}a$. Denique quia ultimus terminus deficit, erit $n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$ seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}a^2$, ideoque $m = \frac{1}{2}a$.

Quare cum ob rationem diametri ad parametrum datam detur etiam parameter $= \frac{ae}{b}$; (*Vid. Fig. 2 pag. praec.*) constructa hyperbola AML, erit $BP = x$, $PM = y$; quod ostenditur ut ante.

Sit $y^2 - x^2 + by - ax = 0$. Quia xy desideratur; erit $r:q = 0$, consequenter $f = q$. Quare $-t:2m = -1$, hoc est, $t = 2m$. Est itaque locus ad hyperbolam aequilateram (§. 505. 506). Porro

$$\frac{-2n = +b}{n = -\frac{1}{2}b} \qquad \frac{2tp:2m = -a}{\frac{2p = -a, \text{ ob } t = 2m}{p = -\frac{1}{2}a}}$$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} = \frac{tp^2}{2m}$$

$$n^2 + m^2 = p^2$$

$$m^2 = p^2 - n^2$$

hoc est, $$m^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2$$

Diametro itaque $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construatur hyperbola aequilatera AML, fiatque $CR = \frac{1}{2}a$, $KR = GP = \frac{1}{2}b$; erit $KG = RP = x$, $GM = y$. Est enim $PB = CB + CR + PR = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + \frac{1}{2}a + x$, & $AP = RP + AR = CR - CA + PR = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + x$, ideoque $AP \cdot PB = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM = GM + GP = y + \frac{1}{2}b$; ideoque $PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit $PM^2 = AP \cdot PB$ (§. 507); erit $y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$, ideoque $y^2 + by = ax + x^2$, consequenter $y^2 - x^2 + by - ax = 0$.

Sit $y^2 - x^2 - by + ax = 0$. Quia xy desideratur, erit $r:q = 0$, ideoque $r = 0$ & $q = f$. Quare $t:2m = 1$, seu $t = 2m$. Est itaque locus ad hyperbolam aequilateram. Porro

$$\frac{-2n = -b}{n = \frac{1}{2}b} \qquad \frac{2p = a}{p = \frac{1}{2}a} \qquad \frac{n^2 + m^2 - p^2 = 0}{\frac{m^2 = p^2 - n^2 \quad m^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2}{m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}}$$

Diametro $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construatur hyperbola aequilatera AML, factaque CF ex centro C $= \frac{1}{2}a$, & FH ad FP perpendiculari $= \frac{1}{2}b$, ductisque HN ipsi FP & NM ipsi FH parallelis; erit $HN = FP = x$, $NM = y$. Est enim $BP = FP + BF = x - \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, $AP = FP - FA = x - \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, ideoque $AP \cdot PB = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM = MN - PN = MN - FH = y - \frac{1}{2}b$, ideoque $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit $PM^2 = AP \cdot PB$ (§. 507); erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$, ideoque $y^2 - x^2 - by + ax = 0$.

PROBLEMA 235.

591. *Invenire theorema generale construendi omnia loca solida ad hyperbolam intra asymptotos.*

Sint SA & AR asymptoti hyperbolae MI. Ducatur DL uni earum AR parallela & huic jungatur utcunque recta DH. Sint denique KD, QM, IR, LH alteri asymptotorum SA parallelae. Ponamus denuo $KD = PN = n$, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, $RI = m$, $AR = DL = f$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = \frac{fx}{q} - p$ & $PM = QM - PN - NQ = y - n - rx:q$. Quare ob $AR \cdot RI = AP \cdot PM$ (§. 502)

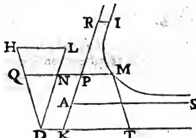
$mf =$

$$m\text{ſ} = \frac{\text{ſ}yx}{q} - \frac{\text{ſ}rx^2}{q^2} - py - \frac{\text{ſ}nx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$m\text{ſ}q = \text{ſ}xy - \frac{\text{ſ}rx^2}{q} - pqy - \text{ſ}nx + prx + pnq$$

$$mq = xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{\text{ſ}} - nx + \frac{prx}{\text{ſ}} + \frac{pnq}{\text{ſ}}$$

$$xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{\text{ſ}} + \frac{prx}{\text{ſ}} + \frac{pnq}{\text{ſ}} = 0.$$
(*) $\quad - nx - mq$



Invenitur adhuc regula alia pro locis ad hyperbolam intra asymptotos, si valor ipsius x ponatur esse QM.

Sit nimirum IM hyperbola, cujus asymptoti RA & AS. Ducantur DT, HL & QN cum asymptoto AS, DL vero cum altera KR & DH ipsi TM parallela. Sit ut ante AK $= p$, KD $=$ PN $= n$, DH $= q$, DL $=$ AR $= \text{ſ}$, HL $= r$, RI $= m$, QM $= x$, DQ $=$ TM $= y$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$\text{DH} : \text{DL} = \text{DQ} : \text{DN}$$
$$q : \text{ſ} = y : \frac{\text{ſ}y}{q}$$
$$\text{DH} : \text{HL} = \text{DQ} : \text{QN}$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Ergo AP $=$ DN $-$ AK $= \text{ſ}y : q - p$ & PM $=$ QM $-$ QN $-$ NP $= x - ry : q - n$.

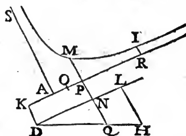
(*) *Posito* $r = 0$ *formula pro hyperbola intra asymptotos evadit.*
$$xy - py - nx + pn = 0$$
$$- mq$$

Quare ob AR . RI $=$ AP . PM (§. 502)

$$m\text{ſ} = \frac{\text{ſ}xy}{q} - \frac{r\text{ſ}y^2}{q^2} - \frac{\text{ſ}ny}{q} - px + \frac{pry}{q} + pn.$$

Unde tandem eodem modo, quo ante usi sumus, reperitur

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{\text{ſ}} + \frac{pry}{\text{ſ}} + \frac{pnq}{\text{ſ}} = 0.$$
(*) $\quad - ny - mq$



Sit e. gr. $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$. Quoniam in aequatione desideratur x^2; erit vi formulae primae $\frac{r}{q} = 0$, ideoque r seu HL $= 0$. Hinc cum punctum H cadat in L, erit DH $=$ DL seu $q = \text{ſ}$. Et quia $- pq : \text{ſ} = fd : c$, erit $p = - fd : c$. Porro $+ pr : \text{ſ} - n = 0$, quia x in aequatione praesente deficit, & hinc, ob $r = 0$, $n = 0$. Denique $pnq : \text{ſ} - mq = - abd : c$. Sed $pnq : \text{ſ} = 0$; ergo $mq = m\text{ſ} = abd : c$. Quare si $\text{ſ} = ab : c$; erit $m = d$. Fiat igitur AR $= ab : c$ & IR $= d$, atque constructa hyperbola intra asymptotos, porro OA $= fd : c$; erit OP $= x$, PM $= y$. Nam AP $= x + fd : c$, ideoque AP . PM $= xy + fdy : c$. Quare cum sit AR . RI $= abd : c$, atque AP . PM $=$ AR . RI (§. 502); erit

$$xy + fdy : c = abd : c$$

ideoque $\quad xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0.$

Sit $xy - \frac{bx^2}{a} - cy = 0$. Erit vi formulae primae $- r : q = - b : a$, hoc est, $r = b$, $q = a$. Porro $- pq : \text{ſ} = - c$. Ergo $p = \text{ſ}c : a$. Cum x in aequatione desit; $pr : \text{ſ} - n = 0$, seu $pr : \text{ſ} = n$, hoc est, $bc : a = n$. Denique quoniam terminus ultimus itidem deficit, $pnq : \text{ſ} - mq = 0$, seu $pnq : \text{ſ} = mq$, vel $pn : \text{ſ} = m$, hoc est, $bc^2 : a^2 = m$. Cognitis valoribus rectarum AK, KD, DH,

(*) *Si* $x = 0$, *erit* $xy - px - ny + pn = 0$.
$$- mq$$

DH, HL, AR, RI; constructio loci manifesta est. Est enim $AK = fc : a$, $KD = bc : a$, $DH = a$, $HL = b$, $DL = AR = f$, $RI = bc^2 : a^2$, $DQ = x$, $QM = y$: His enim positis erit $AR \cdot RI = fbc^2 : a^2$. Porro (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$a : f = x : \frac{fx}{a}$$

Quare cum sit $KA = fc : a$, erit $AP = (fx - fc) : a$. Est vero etiam

$$DH : LH = DQ : QN$$

$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Quare cum sit $KD = PN = bc : a$ & $QM = y$; erit $PM = y - bx : a - bc : a$. Habemus ideo

$$AP \cdot PM = \frac{fxy}{a} - \frac{fcy}{a} - \frac{bfx^2}{a^2} + \frac{bfc^2}{a^2}.$$

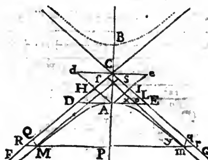
Quoniam itaque $AR \cdot RI = AP \cdot PM$ (§. 502); erit $\frac{fxy}{a} - \frac{fcy}{a} - \frac{bfx^2}{a^2} + \frac{bfc^2}{a^2} = \frac{bfc^2}{a^2}$; unde reperitur $xy - cy - \frac{bx^2}{a} = 0$.

SCHOLION.

592. *Ut usus hujus doctrinæ appareat, exempla aliquot problematum indeterminatorum in medium afferenda. Antequam tamen id fiat, tradenda sunt criteria, unde judicium fieri possit, cum quanam formularum antecedentium comparanda sit æquatio ad construendum proposita. Nimirum duo occurrere possunt casus: aut enim in æquatione proposita habetur* xy, *aut minus. Si in priori casu quadratorum indeterminatarum neutrum occurrat, vel saltem alterutrum, locus est hyperbola intra asymptotos; si quadrata indeterminatarum* x^2 & y^2 *diversis signis afficiuntur, locus est hyperbola circa diametrum descripta; si eadem quadrata eodem signo afficiuntur, sitque coefficiens dimidius facti* xy *æqualis radici coefficientis quadrati* x^2, *locus est parabola; si major, hyperbola; si minor, ellipsis. In casu posteriori si unum tantum quadratorum indeterminatarum adsit, locus est parabola; si utrumque eodem signo afficiatur ellipsis vel circulus; si signis diversis gaudeant, hyperbola. Nempe in casu ultimo hyperbola est æquilatera, in penultimo circulus, si terminus* x^2 *a fractione liber. Quæ omnia manifesta sunt ex accurata formularum generalium inter se collatarum contemplatione. Quod si quantitatis alicujus valor per regulam generalem eruitur negativus, quantitas ista ex parte opposita sumenda est, quemadmodum in exemplis propositis a nobis factum.*

PROBLEMA 236.

593. *Construere rhomboidem ea conditione, ut rectangulum ex lateribus sit æquale quadrato dato.*



Sit quadratum datum a^2, sint latera rhombi x & y; erit per conditionem problematis $xy = a^2$. Construenda itaque est hyperbola intra asymptotos CG & CR, cujus potentia $AI = a$. Erit CQ latus unum rhomboidis, QM alterum (§. 488).

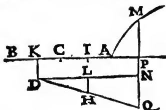
PROBLEMA 237.

594. *Quadratum construere, quod sit æquale rectangulo, cujus latera differunt recta data.*

Sit recta data $= b$, latus unum rectanguli $= x$, erit alterum $= b + x$. Unde per conditionem problematis $y^2 = bx + x^2$: qui est locus ad hyperbolam æquilateram, cujus parameter $= b$ (§. 505).

Id etiam ex formula generali elicitur. Quoniam enim $y^2 - x^2 - bx = 0$, erit (§. 590) $2r : q = 0$, ideoque $r = 0$, $q = f$, $r^2 : q^2 = 0$; porro $2n = 0$ & hinc $2nr : q = 0$, $n^2 = 0$. Est vero $-tf^2 : 2mq^2 = -1$, hoc est, ob $q^2 = f^2$, $t : 2m = 1$ seu $t = 2m$. Unde apparet, locum esse ad hyperbolam æquilateram. Est præterea $2tpf : 2mq = -b$, hoc est, ob $t = 2m$ & $f = q$, $2p = -b$, unde $p = -\frac{1}{2}b$. Denique $tm^2 : 2m - tp^2$:

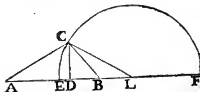
$tp^2 : 2m = 0$, quia quantitas mere cognita in formula data non habetur, hoc est $m^2 - p^2 = 0$, seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}b^2$.



Unde $m = \frac{1}{2}b$. Constructio ex constructione generali haud difficulter elicitur. Nimirum pro diametro transversa $AB = m$ pone b. Quia $KC = -\frac{1}{2}b$, punctum K cadet in partem contrariam & quidem in A, quia semidiametro in hoc casu æqualis. Unde origo indeterminatæ x erit in A, nam ob $DK = PN = 0$, punctum D in K, consequenter in nostro casu in A cadit. Porro ob $HL = 0$ puncta H & L, ideoque & puncta Q & N, & ob $PN = 0$, puncta N & P, consequenter Q & P conincidunt: unde origo alterius indeterminatæ y est in P.

Est enim $BP = b + x$, ideoque $AP \cdot PB = bx + x^2$. Quare cum $PM^2 = y^2$; erit $y^2 = bx + x^2$.

PROBLEMA 238.



595. *Super data recta* AB *triangulum construere, ita ut quadrata laterum* AC *&* CB *sint in ratione data.*

Sit ratio data $= b : c$ $DB = x$

$AB = a$ $DC = y$

erit $AD = a - x$

Quoniam (§. 417 *Geom.*) $AC^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$ & $CB^2 = x^2 + y^2$; erit per conditionem problematis

$$b : c = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 : x^2 + y^2$$

$$bx^2 + by^2 = cy^2 + a^2c - 2acx + cx^2$$

$$by^2 - cy^2 + bx^2 - cx^2 + 2acx - a^2c = 0$$

$$y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$$

Hæc æquatio comparanda est cum æquatione generali locorum ad ellipsin, quia deest xy & y^2 atque x^2 eodem signo afficiuntur (§. 592). Reperitur ideo (§. 588)

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = 0 \qquad r^2 : q^2 + tf^2 : 2mq^2 = 1$$

$$t : 2m = 1$$

hinc $r = 0$ & $q = f$ $2nr : q = 0$ h. e. $t = 2m$

Cum diameter $2m$ parametro æqualis sit; locus ad construendum propositus est circulus.

Porro

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tpf}{2mq} = \frac{2ac}{b-c} \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$\text{h. e. } 2p = -\frac{2ac}{b-c} \qquad p^2 - m^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$p = -\frac{ac}{b-c} \qquad p^2 + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\frac{a^2c^2}{(b-c)^2}$$

$$\frac{a^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

h. e. $$\frac{a^2c^2 + a^2bc - a^2c^2}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} = m^2$$

(1) $$\frac{a\sqrt{bc}}{b-c} = m$$

Est ergo radius circuli $= a\sqrt{bc} : (b-c)$. Quodsi igitur $BL = ac : (b-c)$ & radio $CL = a\sqrt{bc} : (b-c)$ describatur circulus ECF; erit $BD = x$, $DC = y$. Nam ponatur brevitatis gratia $BL = p$, $LF = m$; erit $DL = p + x$, $ED = m - p - x$ & $DF = m + p + x$, consequenter, ob $ED \cdot DF = DC^2$,

$$m^2 - p^2 - 2px - x^2 = y^2$$

$$y^2 + x^2 + 2px + p^2 - m^2 = 0$$

hoc est, substitutis valoribus p, p^2 & $-m^2$, erit $y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$.

PROBLEMA 239.

596. *Duas rectas* AB *&* CD *ita secare in* E *&* F, *ut* AE . EB = CF . FD.

Sit $AB = a$, $AE = x$
$CD = b$, $CF = y$
erit $EB = a - x$
$FD = b - y$

Quare $ax - x^2 = by - y^2$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

Hæc æquatio comparanda cum æquatione locali pro hyperbola. Est nempe

$\frac{2r}{q} = 0$ & hinc $q = \int$, $q^2 = \int^2$ $\quad \frac{r^2}{q^2} = 0 \quad \frac{2nr}{q} = 0$

$-\frac{t\int^2}{2mq^2} = -1 \qquad -2n = -b \qquad \frac{2rp\int}{2mq} = a$

$t : 2m = 1 \qquad n = \frac{1}{2}b \qquad 2p = a$

$t = 2m \qquad\qquad p = \frac{1}{2}a$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$$

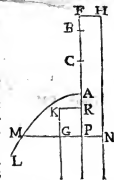
$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2$$

hoc est, $m^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} \qquad (2)$$

Quoniam $t = 2m$, hoc est, parameter diametro æqualis; hyperbola est æquilatera (§. 505), diametro $= 2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construenda. Cum diametro determinata AB agatur parallela HN & cum MN altera FH, ita ut sit $FH = PN = \frac{1}{2}b$ & $CF = \frac{1}{2}a$, erit $HN = x$ & $MN = y$. Est enim $CP = x - \frac{1}{2}a$, $PM = y - \frac{1}{2}b$, & $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$. Quare, ob $AP \cdot PB = PC^2 - AC^2 = PM^2$.



$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 = y^2 - by + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$x^2 - ax = y^2 - by$$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0.$$

(1) *Adhibita formula nostra particulari, erit* (§. 589)

$-2n = 0, \quad -2p = +\frac{2ac}{b-c} \quad p^2 - m^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$

$p = -\frac{ac}{b-c} \quad \frac{a^2c^2 + a^2cb - a^2c^2}{(b-c)^2} = m^2$

$$\frac{a\sqrt{cb}}{b-c} = m$$

(2) *Quoniam hyperbola est æquilatera* (§. 590) *& formula nostra pro hyperbola æquilatera est*

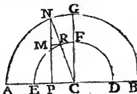
$y^2 - x^2 - 2ny + 2px + n^2 + m^2 - p^2 = 0.$

erit $-2n = -b \quad +2p = a \quad n^2 + m^2 - p^2 = 0$

$n = \frac{1}{2}b \quad p = \frac{1}{2}a \quad m^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2$

$m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$

PROBLEMA 240.



597. *Super recta* AB *descriptus sit semicirculus* ANB, *& alius minor* ERD. *Ex puncto quocunque* N *demittatur ad* AB *perpendicularis* PN, *ductoque radio* CN, *ex puncto* R *perpendicularis alia* RM. *Determinare locum in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo determinata*.

Sit AB $= a$, ED $= d$, AP $= x$, PM $= y$; erit PB $= a - x$, PN $= \sqrt{(ax - x^2)} = v$ (§. 377), PC $= \frac{1}{2}a - x$, NR $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d$ & (§. 268 *Geom.*)

$$NC : NP = NR : NM$$

$$\tfrac{1}{2}a : v = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}d : \frac{(a-d)v}{a}$$

Quare PM $= v - \frac{av + dv}{a} = \frac{av - av + dv}{a} = \frac{dv}{a}$, consequenter PM^2 $= y^2 = d^2v^2 : a^2$. Unde habetur $a^2y^2 = d^2(ax - x^2)$, substituto nimirum valore ipsius v^2, quae aequatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$y^2 : ax - x^2 = d^2 : a^2$$

h. e. PM^2 : PA . PB $=$ CF^2 : AC^2

Unde intelligitur locum punctorum M esse ellipsin, cujus axes conjugati AB & ED (§. 430).

SCHOLION.

598. *Apparet ideo curvam, quam fornicibus construendis aptam praedicat* Serlius (a) *esse ellipsin*.

(a) Architect. lib. 1. cap. 1. f. m. 9. b.

COROLLARIUM.

599. Quoniam (*Vid. Fig. 2 hujus pag.*) PN $= v$, PM $= \frac{1}{2}dv : \frac{1}{2}a$; erit PN : PM $= v : \frac{\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{2}a}$

hoc est (§. 124) $\frac{1}{2}av : \frac{1}{2}dv$

$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d$

CG : CF

PROBLEMA 241.



600. *Super recta* HI *describatur semicirculus* HGI. *Sit recta quaecunque* AB *bifariam divisa in* C *& ex* C *erecta perpendicularis* CD $=$ GF. *Erecta perpendiculari* LN *fiat* DC : AC $=$ HL : AP *& in* P *erigatur perpendicularis* PM $=$ NL. *Determinare locum, in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo inventa*.

Sit HF $=$ GF $=$ DC $= d$, AC $= a$, AP $= x$, PM $= y$; erit ex hypothesi

$$AC : DC = AP : HL$$

$$a : d = x : \frac{dx}{a}$$

Quare LI $= 2d - dx : a = (2ad - dx) : a$, & hinc LN^2 $= (2ad^2x - d^2x^2) : a^2$ (§. 377). Habemus itaque ex hypothesi

$$y^2 = (2ad^2x - d^2x^2) : a^2$$

ideoque, $a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : y^2$.

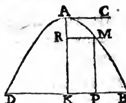
Est igitur locus quaesitus ellipsis, cujus semiaxes conjugati AC & CD (§. 430).

SCHOLION.

601. *Evidens ideo est curvam, quam* Albertus Duretus *& cum ipso* Daniel Hartmannus (b) *fornicibus construendis aptam praedicant, esse ellipsin Apollonianam*.

(b) *In der Bürgerlichen Bau-Kunst*, f. 7. & seqq.

PROBLEMA 242.



602. *Rectam* DB *ita ſecare in* P *ſimulque invenire aliam rectam* y, *ita ut rectangulum ex* y *in datam* CA *ſit æquale rectangulo ex ſegmentis partium* DP *&* PB.

Sit DB $= a$, AC $= b$, DP $= x$; erit PB $= a - x$, conſequenter per conditionem problematis

$$ax - x^2 = by$$
$$x^2 - ax + by = 0.$$

Eſt itaque locus ad parabolam (§. 592).

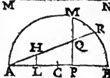
Quodſi cum æquatione locali ad parabolam generali modo inventam compares; erit (§. 587)

$$-\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = -a \qquad -tſ : q = b$$
$$\text{hinc } q = ſ \qquad n = \tfrac{1}{2}a \qquad t = -b$$

$$n^2 + tp = 0$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 - bp = 0$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 = bp$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 : b = p$$

Eſt ideo parameter $= -b$. Quare parametro b deſcribenda eſt parabola deorſum tendens AMB, cujus pars altera AD, ſeu quod perinde eſt deſcribitur parabola circa axem AK (§. 393) & in eo fit AK $= \tfrac{1}{4}a^2 : b$; erit KB $= \tfrac{1}{2}a$ (§. 388) $= \tfrac{1}{2}$DB, ideoque DB linea ad ſecandum propoſita. Ducta igitur PM ipſi AK parallela, erit PD $= x$, PM $= y$. Nam KP $=$ RM $= x - \tfrac{1}{2}a$ & AR $= \tfrac{1}{4}a^2 : b - y$. Quare (§. 388) $x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - by$, conſequenter $x^2 - ax + by = 0$.

PROBLEMA 243.



603. *Datam rectam* MN *in tres partes continue proportionales ſecare.*

Sit MN $= a$, pars prima $= x$, ſecunda $= y$; erit tertia $= y^2 : x$ & per conditionem problematis

$$x + y + y^2 : x = a$$
$$x^2 + xy + y^2 = ax$$
$$y^2 + xy + x^2 - ax = 0$$

Cum locus ſit ad circulum (§. 592), æquatio comparanda eſt cum formula generali ad circulum.

Erit ergo $-\frac{2r}{q} = 1$, hoc eſt, $\frac{r}{q} = -\frac{1}{2}$, nempe $r = -1$ & $q = 2$.

Porro

$$\frac{r^2}{q^2} + \frac{ſ^2}{q^2} = 1 \qquad 2n = 0.$$
$$\frac{1}{4} + \frac{ſ^2}{4} = 1 \qquad \text{hinc} \quad \frac{2nr}{q} = 0$$
$$1 + ſ^2 = 4 \qquad n^2 = 0$$
$$ſ^2 = 3 \qquad -\frac{2pſ}{q} = -a$$
$$ſ = \sqrt{3} \qquad \frac{2p\sqrt{3}}{2} = a$$
$$p = \frac{a}{\sqrt{3}}$$
$$m^2 = n^2 + p^2 = p^2$$
$$m = p = a : \sqrt{3}$$

Deſcribatur ergo radio AC $= a : \sqrt{3}$ ſemicirculus, & fiat ob valorem negativum ipſius r, HL : AL $= 1 : \sqrt{3}$, ob valorem ſcilicet ipſius r negativum

 trian-

triangulum LHA contraria ratione construendum, ita ut angulus rectus sit in L, qui in formula generali supponitur in H; ita enim prodit $f = \sqrt{3}$, quemadmodum ex regula eruitur per theorema Pythagoricum. Ducatur porro recta AHR. Quodsi inter C & B erigatur perpendicularis PM; erit $AQ = x$, $QM = y$. Nam (§. 268 *Geom.*)

$$AH : HL = AQ : QP$$
$$2 : 1 = x : \tfrac{1}{2}x$$

Unde $PM = y + \frac{1}{2}x$ & $PM^2 = y^2 + xy + \frac{1}{4}x^2$.

Porro $AH : AL = AQ : AP$

$$2 : \sqrt{3} = x : \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Unde $PB = AB - AP = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$ & $AP \cdot PB = ax - \frac{3}{4}x^2$. Habemus ideo (§. 377)

$$y^2 + xy + \tfrac{1}{4}x^2 = ax - \tfrac{3}{4}x^2$$
$$y^2 + xy + x^2 - ax = 0.$$

S C H O L I O N.

604. *Eodem modo æquationes locales inveniri possunt pro Curvis superiorum generum ad construenda loca hypersolida. Primus formulas generales computavit* Johannes Craigius (a) *earumque usum deinde uberius exposuit* Hospitalius (b).

C A P U T VIII.

De Constructione Æquationum Superiorum.

P R O B L E M A 244.

605. *Æquationem quamcunque geometrice construere.*

1. Introducatur in æquationem datam nova indeterminata, &
2. Hujus ope æquatio in alias locales ad diversas curvas transformetur, in quibus nempe sint duæ indeterminatæ.
3. Construantur duæ æquationes locales. Communis enim intersectio radices determinabit.

S C H O L I O N.

606. *Genuinum hoc æquationes construendi artificium primus aperuit* Renatus Franciscus Slusius *Canonicus Leodiensis* (c); *quem postea secuti sunt alii de hac materia commentati. Ut autem methodi vim intelligamus; eam exemplis cubicarum inprimis & quadrato-quadraticarum æquationum illustrabimus, quoniam ad has construendas sufficiunt, quæ de locis planis & solidis in capite præcedente tradidimus.*

P R O B L E M A 245.

607. *Construere æquationem cubicam* $y^3 + aby = a^2c$.

Æquatio proposita $y(y^2 + ab) = a^2c$ in hanc resolvitur analogiam

$$a : y = y^2 + ab : ac$$

ut nova indeterminata in æquationem introducatur & ejus ope æquationes locales ad diversas curvas eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = y^2 + ab : ac$ (§. 167 *Arith.*)

hoc est, $ax + ab : ac$

seu (§. 124 $x + b : c$

II.

(a) In Tractatu de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis geometricis pag. 62. & seqq.

(b) Traité analytique des Sect. con. lib. 3 pag. 206. & seqq

(c) Mesolabo Part. 2. integra.

$$\text{II.}\quad x^2 + bx = cy$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$
$$\text{III.}\quad ax - x^2 - bx = y^2 - cy$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$
$$\text{IV.}\quad x^2 + ax + bx = y^2 + cy$$
$$x^2 + bx = cy$$
$$x^2 + \frac{by^2}{a} = cy$$
$$\text{V.}\quad y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$$
$$y^3 + aby = a^2c$$
$$\frac{y^3}{a} + by = ac$$
$$\text{VI.}\quad xy + by = ac$$

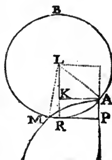
Habemus ideo æquationes locales:

$$\text{I.}\quad y^2 - ax = 0$$
$$\text{II.}\quad x^2 + bx - cy = 0$$
$$\text{III.}\quad y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$$
$$\text{IV.}\quad y^2 - x^2 + cy - ax - bx = 0$$
$$\text{V.}\quad y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$
$$\text{VI.}\quad xy + by - ac = 0$$

Locus primus & secundus sunt ad parabolam; tertius ad circulum; quartus ad hyperbolam æquilateram; quintus ad ellipsin; sextus ad hyperbolam intra asymptotos.

Equidem constructio æquationis absolvi potest, duobus quibuscunque locis combinatis; præstat tamen nonnisi circulum cum una ex sectionibus conicis combinari, non tam quod circulus sit locus planus (ut vulgo cum *Cartesio* sentiunt); sed quia facilius describitur sectionibus coni.

Agedum itaque, construamus æquationem propositam primum ope æquationis ad parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$.



Locus prior construitur, si parametro a parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe $AP = x$, $PM = y$ (§. 587).

Pro circulo erit vi theorematis generalis (§. 589)

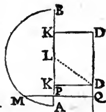
$\frac{2r}{q} = 0$ & hinc $q = s$

$(r^2 + s^2) : q^2 = 1$ seu $s = q$

$2n = c$, $n = \frac{1}{2}c$

$-2p = b - a$, $-p = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$

$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2)} = m$$



Quodsi ergo radio $AL = m$ semicirculus AMB describatur, fiatque $LK = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, quia valor ipsius p negativus, & $KD = \frac{1}{2}c$, atque DQ ipsi AB, QM vero inter K & A ob valorem ipsius p negativum, si $b > a$, ipsi KD parallela ducatur: erit (§. 588. 589) origo indeterminatæ x in D, nempe $DQ = x$ & $QM = y$.

Si jam circulus cum parabola combinan-

benda & in centro C erecta perpendiculari CF $= ac : 2b$, ductisque FQ ipsi AC & QM ipsi CF parallelis, erit FQ $= x$ & QM $= y$, origo nempe indeterminatæ x in F. Circulus itaque ita combinandus cum ellipsi, ut punctum D in F & DK super FC cadat, hoc est, FC $= \frac{ac}{2b}$ continuetur in K, donec fiat FK $= \frac{1}{2}c$ (est enim $b > a$, hinc $bc > ac$, consequenter $c > ac : b$) & in K erigatur perpendicularis KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$; erit enim per præcedentia L centrum, LF radius circuli, qui descriptus ellipsin in M secabit. Dico QM esse radicem æquationis.

Ponamus enim QM $= y$. Quoniam CF $=$ PQ $= ac : 2b$ & FQ $=$ CP $= x$, AC $= \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)}$; erit PM $=$ QM $-$ PQ $= y - ac : 2b$, AP $= \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} - x$, PB $= \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} + x$, PM$^2 = y^2 - acy : b + a^2c^2 : 4b^2$ & AP . PB $= ac^2 : 4b - x^2$, & ex natura ellipsis (§. 420)

$$b : a = \frac{ac^2}{4b} - x^2 : y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{ax^2}{b} = y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$

$$\frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b} - y^2$$

$$x^2 = cy - by^2 : a$$

Porro KR $=$ QF $= x$, KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, KF $=$ QR $= \frac{1}{2}c$, ideoque MR $=$ MQ $-$ QR $= y - \frac{1}{2}c$, RL $= x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, consequenter (§. 417 *Geom.*) LF$^2 =$ ML$^2 =$ KL$^2 +$ KF$^2 = \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 =$ MR$^2 +$ RL$^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2 + x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2$.

Unde habemus

$$y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$$

hoc est, ob $x^2 = cy - by^2 : a$

$$y^2 + cy - \frac{by^2}{a} - cy + bx - ax = 0$$

$$\frac{ay^2 - by^2}{a} + bx - ax = 0$$

seu $\frac{ay^2 - by^2}{a} = ax - bx$

$$a - b$$

$$\frac{y^2}{a} = x$$

$$\frac{y^4}{a^2} = x^2$$

$$\frac{y^4}{a^2} = cy - \frac{by^2}{a}$$

$$a^2$$

$$y^4 = a^2cy - aby^2$$

$$y$$

$$y^3 = a^2c - aby$$

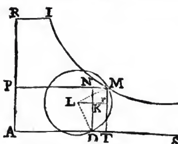
$$y^3 + aby - a^2c = 0.$$

Construamus denique eandem æquationem combinatis loco ad hyperbolam intra asymptotos $xy + by - ac = 0$ & loco ad circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Posterioris constructionem jam tradidimus: alterius constructio elicitur comparatione æquationis propositæ cum formula generali pro locis ad hyperbolam intra asymptotos instituta. Est nempe (§. 591)

$\frac{r}{q} = 0$ $\quad p = 0$ $\quad -n = b$ $\quad -my = -ac$

$q = s$ $\quad \frac{pr}{s} = 0$ $\quad n = -b$ hinc $m = c$ $\quad q = a$

Jungan-



Jungantur ipsi AR $= a$ recta RI $=$ c & indefinita AS ad angulos rectos, quæ erunt asymptoti hyperbolæ æquilateræ per punctum I describendæ (§. 489). Fiat AD $= b$, quia valor ipsius b negativus; erit NM $=$ DT $= x$, TM $= y$ (§. *cit.*). Quodsi jam circulus cum hyperbola combinari debet; punctum D in D & recta DQ super DT cadere debet. Scilicet ex D in K transferatur DK $= \frac{1}{2}c$ & ex K in L $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$. Radio DL describatur circulus & ex puncto intersectionis circuli atque hyperbolæ M demittatur perpendicularis TM. Dico hanc esse radicem æquationis.

Quoniam enim AR $= a$, RI $= c$, AD $=$ PN $= b$, NM $=$ DT $= x$, TM $=$ AP $= y$; erit AT $=$ PM $= b + x$ & ob AR . RI $=$ AP . PM (§. 501) $by + xy = ac$, consequenter $x = \frac{ac}{y} - b$. Porro Kr $=$ NM $= x$, LK $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, DK $=$ Tr $= \frac{1}{2}c$. Ergo Lr $= x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, rM $= y - \frac{1}{2}c$, & ob LM^2 $=$ Lr^2 $+$ rM^2 (§. 417 *Geom.*)

$$x^2 + bx + \tfrac{1}{4}b^2 - ax - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}a^2 + y^2 - cy + \tfrac{1}{4}c^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2,$$

hoc est,

$$y^2 - cy = ax - x^2 - bx$$

seu

$$= (a - x - b)\,x$$

$$y^2 - cy = \left(a - \frac{ac}{y} + b - b\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

$$= \left(a - \frac{ac}{y}\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

hoc est,

$$y^2 - cy = \frac{a^2c}{y} - \frac{a^2c^2}{y^2} - ab + \frac{abc}{y}$$

y^2

$$y^4 - cy^3 = a^2cy - a^2c^2 - aby^2 + abcy$$

$y - c$

$$y^3 = a^2c - aby$$

$$y^3 + aby - a^2c = 0$$

SCHOLION.

608. *Mirabuntur forte, qui tyrones sunt in altioribus, quod tam operose construxerimus æquationem, quæ per regulam* Cartesii *ope circuli & parabolæ admodum facile construitur. Sed notent velim, geometricas æquationum constructiones nullius fere in praxi esse usus, cum eidem satisfaciat methodus extrahendi radicem per approximationem. Faciunt vero ad exercendam ingenii vim & recludendos inventionum fontes. Quamobrem methodus inveniendi constructiones istiusmodi quam maxime explicari debet.*

PROBLEMA 246.

609. *Construere æquationem cubicam* $y^3 - aby = a^2c$.

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = y^2 - ab : ac$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & æquationes locales diversæ inde eliciantur; fiat

$$a : y = y : x$$

erit

I. $ax = y^2$ & hinc $y^2 : a = x$

Porro; $y : x = y^2 - ab : ac$

hoc est, $ax - ab : ac$

seu (§. 124) $x - b : c$

II.

II. $x^2 - bx = cy$

$ax = y^2 \qquad ax = y^2$

$x^2 - bx = cy \qquad cy = x^2 - bx$

III. $ax - x^2 + bx = y^2 - cy$

IV. $ax - cy = y^2 - x^2 + bx$

$x^2 - bx = cy$

$x^2 - \frac{by^2}{a} = cy$

V. $\frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{acy}{b}$

$y^3 - aby = a^2 c$

$axy - aby = a^2 c$

VI. $xy - by = ac$

Habemus ideo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy - bx = 0$
$\qquad\qquad\qquad - ax$

IV. $y^2 - x^2 + cy + bx = 0$
$\qquad\qquad\qquad - ax$

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy - by - ac = 0$.

Locus primus & secundus sunt ad parabolam; tertius ad circulum; quartus ad hyperbolam æquilateram; quintus ad hyperbolam scalenam; sextus ad hyperbolam intra asymptotos.

Cum æquationes locales nonnisi signis differant ab iis, in quas æquationem problematis præcedentis resolvimus; æquatio præsentis eodem fere modo construitur, quo præcedentem construximus: id quod in unico casu, quo circulus cum parabola combinatur, ostendisse sufficerit.

Locus ad parabolam (*Vid. Fig. seq.*) $y^2 - ax = 0$ construitur ut in problemate præcedente, si parametro a parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe $AP = x$, $PM = y$:

Pro loco ad circulum $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$, erit vi theorematis generalis (§. 589) $2r = 0$ & hinc $q = f$

$2n = c \qquad 2p = b + a$

$n = \frac{1}{2}c \qquad p = \frac{b+a}{2}$

$n^2 + p^2 = m^2$

$\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 = m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2)} = m$

Quia ergo in circulo origo indeterminatæ x distat a centro qvantitate $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ & alterius y quantitate $\frac{1}{2}c$, fiat $AD = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & perpendicularis $DH = \frac{1}{2}c$ atque radio AH describatur per verticem parabolæ A circulus, erit PM radix vera æquationis, QN & qn erunt falsæ.

Nam $AH^2 = MH^2 = HD^2 + DA^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2$ (§. 417 *Geom.*), $AP = y^2 : a$ (§. 391), $PD = HR = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $MR = y - \frac{1}{2}c$, consequenter ob $HM^2 = HR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{y^4}{a^2} -$

$y^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{by^2}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2$,

hoc est,

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{by^2}{a} - cy = 0 \qquad a^2$$

$$y^4 - aby^2 - a^2cy = 0 \qquad y$$

$$y^3 - aby - a^2c = 0$$

PROBLEMA 247.

610. *Construere æquationem cubicam* $y^3 - aby = -a^2c$.

Æquatio proposita $y^3 - aby = -a^2c$, hoc est, $a^2c = aby - y^3$ in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = ab - y^2 : ac$$

ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = ab - y^2 : ac$

hoc est $\quad ab - ax : ac$

seu (§. 124) $\quad b - x : c$

II. $\quad bx - x^2 = cy$

$ax = y^2 \qquad ax = y^2$

$bx - x^2 = cy \qquad cy = bx - x^2$

III. $\quad ax - bx + x^2 = y^2 - cy$

IV. $\quad ax - cy = y^2 - bx + x^2$

$bx - x^2 = cy$

$\frac{by^2}{a} - x^2 = cy$

V. $\quad y^2 - \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

$a^2c = aby - y^3$

$a^2c = aby - axy$

VI. $\quad ac = by - xy$

Habemus ideo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx + cy = 0$

III. $y^2 - x^2 - cy + bx = 0$
$\qquad\qquad - ax$

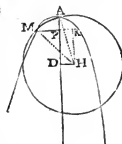
IV. $y^2 + x^2 + cy - bx = 0$
$\qquad\qquad - ax$

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy - by + ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad parabolam; tertius ad hyperbolam æquilateram; quartus ad circulum; quintus ad hyperbolam scalenam; sextus ad hyperbolam intra asymptotos.

Æquationes locales denuo nonnisi signis differunt ab iis, quas in problemate 245 (§. 607) reperimus. Quare denuo nobis suffecerit, constructionem ope parabolæ & circuli ostendisse.



Quoniam locus ad parabolam $y^2 = ax$; parabola denuo construitur parametro a & origo indeterminatæ x est in vertice axis A.

Pro circulo, cujus æquatio $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$, vi theorematis generalis (§. 589)

$\frac{2r}{q} = 0$ hinc $q = f \qquad -2n = c \quad n = -\frac{1}{2}c \qquad -2p = -b - a \quad p = \frac{b + a}{2}$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2)} = m$$

Describ-

Describatur ergo radio AC $= m$ semicirculus, ductaque FLS intervallo CL $= \frac{1}{2}c$ diametro AB parallela; erit SQ $= x$, QM $= y$.

Quamobrem si circulus (*Vid. Fig. pag. præc.*) cum parabola combinatur, punctum S super A & SL super AD cadet. Quare si fiat AD $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & erigatur perpendicularis DH $= \frac{1}{2}c$; erit AH $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ radius circuli per verticem describendi & PM radix vera æquationis.

Nam AP $= y^2 : a$ (§. 391), hinc DP $=$ HR $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{a}$. Porro MR $= y + \frac{1}{2}c$. Quare ob HM$^2 =$ MR^2 + HR^2 (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{by^2}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + y^2 + cy + \frac{1}{4}c^2$,

hoc est,

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{by^2}{a} + cy = 0$$

$$y^4 - aby^2 + a^2cy = 0 \quad (a^2)$$

$$y^3 - aby + a^2c = 0 \quad (y)$$

COROLLARIUM.

611. Si circulus parabolam tangit, omnes intersectiones coincidunt, ideoque omnes radices æquationis sunt æquales.

SCHOLION.

612. *Constructiones per circulum & parabolam, quas dedimus, coincidunt cum iis, quas habet* Cartesius (a), *etsi alio modo eruta.*

PROBLEMA 248.

613. *Construere æquationem cubicam* $y^3 + ay^2 - aby = a^2c$.

(a) Geometr. Lib. 3. pag. 85. & seqq.

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Substituatur ax pro y^2 in æquatione data

erit $\quad axy + a^2x - aby = a^2c$

$$\text{II.} \quad xy + ax - by = ac \quad (a)$$

$$xy^2 + axy - by^2 - a^2x + aby = acy - a^2c \quad (y - a)$$
$$- axy$$

$$xy^2 - by^2 - a^2x = acy - aby - a^2c$$
$$ax^2 - abx - a^2x = acy - aby - a^2c$$

$$\text{III.} \quad x^2 - bx - ax = cy - by - ac$$
$$ax = y^2$$

$$\text{IV.} \quad 2ax - x^2 + bx = y^2 - cy + by + ac$$
$$x^2 - bx - ax = cy - by - ac$$
$$ax = y^2$$

$$\text{V.} \quad x^2 - bx = y^2 + cy - by - ac$$
$$x^2 - \frac{by^2}{a} = ax + cy - by - ac$$

$$\text{VI.} \quad \frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{a^2x}{b} + \frac{acy}{b} - ay - \frac{a^2c}{b}.$$

Habemus ideo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $xy + ax - by - ac = 0$

III. $x^2 - bx - cy + ac = 0$
$\quad - ax + by$

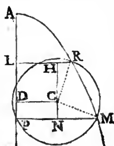
IV. $y^2 + x^2 - cy - 2ax + ac = 0$
$\quad + by - bx$

V. $y^2 - x^2 + cy + bx - ac = 0$
$\quad - by$

VI. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{a^2x}{b} + \frac{acy}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$
$\quad - ay$

Locus primus & tertius sunt ad parabolam; secundus ad hyperbolam intra asymptotos; quartus ad circulum; quintus ad hyperbolam æquilateram; sextus ad hyperbolam scalenam.

Construamus æquationem cōbinando circulum cum parabola. Locus ad parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur, si parametro a parabola describatur; cujus vertex A origo ipsius x.



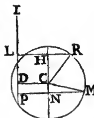
Pro circulo $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$ erit vi theorematis generalis (§. 589)

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad \text{hinc} \quad q = s \qquad \frac{-2n = -c + b}{n = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b} \qquad \frac{-2p = -2a - b}{p = a + \frac{1}{2}b}$$

$$\frac{n^2 + p^2 - m^2 = ac}{n^2 + p^2 - ac = m^2}$$

$$\frac{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 - ac = m^2}{\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + (a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)^2) = m}}$$

Jungatur ipsi IL $= a$ ad angulos rectos LR ipsi æqualis & resecetur LH $=$ PN $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat DL $=$ HC $= \frac{1}{2}b$; erit CR $= m$, ideoque radius circuli, quo descripto habebitur IP $= x$ & PM $= y$.



Est enim NM $=$ PM $-$ PN $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, ideoque NM$^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$. Porro DP $=$ IP $-$ ID $= x - a - \frac{1}{2}b$, ideoque DP^2 $=$ CN$^2 = x^2 - 2ax - bx + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit CR^2 $=$ CM^2 $=$ NM^2 $+$ CN^2 (§.417 *Geom.*), & CM^2 $= \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 - ac$, erit $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, quæ est æquatio ad construendum proposita. Circulus itaque rite constructus.

Si jam circulus cum parabola combinatur (*Vid. Fig. 1 hujus pag.*), punctum I in verticem parabolæ A & IP super AP cadit. Quare fiat AL $= a$; erit LR^2 $= a^2$ (§. 388), hoc est, LR $= a$. Fiat porro LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat denique DL $=$ HC $= \frac{1}{2}b$; erit CR radius circuli per punctum parabolæ R ex centro C describendi & semiordinata PM radix æquationis.

Nam PN $=$ LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$: hinc NM $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Ex natura parabolæ $y^2 : a =$ AP; unde DP $=$ CN $= \frac{y^2}{a} - a - \frac{1}{2}b$. Quare cum sit (§.417 *Geom.*) CM^2 ($=$CR^2)$=$CN$+$NM^2;

$\frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2 = \frac{y^4}{a^2} - 2y^2 + a^2 - \frac{by^2}{4} + ab + \frac{1}{4}b^2 + y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$, hoc est,

$$\frac{y^4}{a^2} - y^2 - \frac{by^2}{a} + by - cy + ac = 0 \qquad \cdot a^2$$

$$y^4 - a^2y^2 - aby^2 + a^2by - a^2cy + a^3c = 0 \qquad : y - a$$

$$y^3 + ay^2 - aby - a^2c = 0.$$

SCHOLION.

614. *Satis liquet, quomodo æquationum cubicarum casus reliqui construi debeant, ut ideo plura addere supervacaneum judicemus.*

PROBLEMA 249.

615. *Æquationem biquadraticam* $y^4 + aby^2 + a^2cy = a^3d$ *construere.*

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Hoc

Hoc valore in æquatione data substituto prodibit

$$a^2x^2 + aby^2 + a^2cy = a^3d \quad : ab$$

$$\text{II.}\quad y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} = \frac{a^2d}{b}$$

item $a^2x^2 + a^2bx + a^2cy = a^3d \quad : a^2$

$$\text{III.}\quad x^2 + bx + cy = ad$$

$$x^2 + bx = ad - cy$$
$$ax = y^2$$

$$\text{IV.}\quad x^2 + bx + ax = y^2 + ad - cy$$

$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = ad - cy$$

$$\text{V.}\quad ax - x^2 - bx = y^2 - ad + cy$$

Habemus ideo æquationes locales;

I. $y^2 - ax = 0$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} - \frac{a^2d}{b} = 0$

III. $x^2 + bx + cy - ad = 0$

IV. $y^2 - x^2 - cy - bx + ad = 0$
$\qquad - ax$

V. $y^2 + x^2 + cy + bx - ad = 0$
$\qquad - ax$

Locus primus & tertius est parabola; secundus ellipsis; quartus hyperbola æquilatera; quintus denique circulus.

Construamus primum æquationem, circulo cum parabola $ax = y^2$ combinato. Construatur parabola MDN parametro a, erit DQ $= x$, QM $= y$.

Pro circulo $y^2 + x^2 + cy + bx - ax - ad = 0$ erit vi theorematis generalis (§. 589)

$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{f^2}{q^2} = 1 \quad -2n = c \quad -2p = b - a$

$f = q \quad n = -\frac{1}{2}c \quad p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$$

$$n^2 + p^2 + ad = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 + ad = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 + ad)} = m$$

Erecta in D perpendiculari DK $=$ QP $= \frac{1}{2}c$ ob valorem ipsius c negativum, ducatur per K recta indefinita AB, fiatque KC $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, erit (§. 417 *Geom.*) DC $= \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2)}$. Fiat porro DI $= a$ & continuata DC in H, donec HD $= d$, quæratur media proportionalis DL (§. 327 *Geom.*), quæ erit $\sqrt{ad}$: consequenter LC $= \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + ad)}$ (§. 417 *Geom.*) est radius circuli ex centro C per L describendi, qui cum parabolam secet in M & N, erit QM radix æquationis vera, RN falsa.

Est enim PM $= y + \frac{1}{2}c$, DQ $=$ KP $= y^2 : a$ (§. 388), CP $=$ KP $-$ KC $= \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Quare (§. 417 *Geom.*) ob MC^2 seu CL^2 $=$ PM^2 $+$ PC^2, $\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}c^2 + \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$,

hoc est,

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} + cy = ad \quad \cdot a^2$$

$$y^4 + aby^2 + a^2cy = a^3d$$

Combinemus eundem circulum cum ellipsi, quam definit æquatio superius reper-

reperta $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{ac}{b}y - \frac{a^2d}{b} = 0$.
Erit vi theorematis generalis (§. 588)

$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \quad -2n = \frac{ac}{b} \quad p = 0$

hinc

$q = \int \qquad n = -\frac{ac}{2b}$

$$n^2 - \frac{tm^2}{2m} = -\frac{a^2 f}{b}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{am^2}{b} = -\frac{a^2d}{b}$$

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} + ad = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{ac^2}{4b} + ad\right)} = m$$

Construatur locus ad circulum ut ante, nempe ut sit $DK = \frac{1}{2}c$, $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $DI = a$, $DH = d$, ideoque $DL = \sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom.*), consequenter $LC = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + ad)}$ (§. 417 *Geom.*).

Jam cum origo indeterminatæ x sit in D, & valor ipsius n in ellipsi etiam negativus & $p = 0$; ex DK resecetur $DG = ac : 2b$ & per G ducatur AB ipsis DQ & KP parallela fiatque $AG = BG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Tandem circa AB tanquam axem describatur ellipsis AMB, in qua axis AB ad parametrum $= b : a$. Dico QM esse radicem æquationis veram. Est enim $GR = DQ = x$, $MR = MQ + QR = MQ + DG = y + ac : 2b$; ratio diametri ad parametrum $= b : a$; $AG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Quare ex natura ellipsis (§. 431)

$a : b = RM^2 : AG^2 - GR^2 = (BR \cdot RA)$

$a : b = y^2 + \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} : ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$

$$\frac{by^2}{a} + cy + \frac{ac^2}{4b} = ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$x^2 = ad - \frac{by^2}{a} - cy$$

Porro $PM = MQ + QP = MQ + DK = y + \frac{1}{2}c$; $CP = KP - KC = DQ - CK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Quamobrem ob $MC^2 = LC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}c^2 + x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$,

h. e. $y^2 + x^2 + cy - ax + bx = ad$

$$x^2 = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

Habemus ergo

$$ad - \frac{by^2}{a} - cy = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2$$

$b - a$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : a^2$$

hoc est, $\frac{y^4}{a^2} = ad - \frac{by^2}{a} - cy$, vi superiorum.

a^2

$$y^4 = a^3d - aby^2 - a^2cy$$

$$y^4 + aby^2 + a^2cy = a^3d$$

COROLLARIUM.

416. Si circulus curvam conicam nec tangit nec secat, radices omnes sunt impossibiles.

PROBLEMA 250.

617. *Construere æquationem biquadraticam* $y^4 + aby^2 - a^2cy = -a^3d$.

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $y^2 = ax$. Hinc $x = y^2 : a$

Si

Si valor ipsius y^2 in æquatione proposita substituatur; prodibit

$$a^2x^2 + aby^2 - a^2cy = -a^3d$$

$$\text{II.} \quad \frac{ax^2}{b} + y^2 = \frac{acy}{b} - \frac{a^2d}{b}$$

Item $a^2x^2 + a^2bx = a^2cy - a^3d$

$$\text{III.} \quad x^2 + bx = cy - ad$$

$$ax = y^2$$

$$\text{IV.} \quad x^2 + bx + ax = y^2 + cy - ad$$

$$ax = y^2$$

$$x^2 + bx = cy - ad$$

$$\text{V.} \quad ax - x^2 - bx = y^2 - cy + ad$$

Habemus ideo æquationes locales:

$$\text{I.} \quad y^2 - ax = 0$$

$$\text{II.} \quad y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} + \frac{a^2d}{b} = 0$$

$$\text{III.} \quad x^2 + bx - cy + ad = 0$$

$$\text{IV.} \quad y^2 - x^2 + cy - bx - ad = 0 \\ -ax$$

$$\text{V.} \quad y^2 + x^2 - cy + bx + ad = 0 \\ -ax$$

Locus primus & tertius sunt parabolæ; secundus est ellipsis; quartus hyperbola æquilatera; quintus denique circulus.

Dabimus constructionem per circulum & parabolam.

Pro circulo vi theorematis generalis (§. 589)

$$-\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = -c \qquad -2p = -a + b$$

$$\text{hinc} \qquad n = \tfrac{1}{2}c \qquad p = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$$

$$g = f$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = ad$$

$$n^2 + p^2 - ad = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 - ad)} = m$$

Ducatur recta CR & sumatur C pro centro circuli. Erigatur $CK = \frac{1}{2}c$ ad CR perpendicularis & per K ducatur AP eidem parallela. Fiat $AK = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$; erit in A origo indeterminatæ x & $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2)}$. Fiat $AI = d$, $AH = a$; quæraturque media proportionalis $AL = \sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom.*). Porro super AC describatur semicirculus & in eo applicetur $GA = AL = \sqrt{ad}$; erit $GC = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 - ad)}$ (§. 417 *Geom.*) ideoque radius circuli.

Quoniam in parabola, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$ origo indeterminatæ x in verticem axis cadit; circa axem AP parametro a describatur parabola: dico PM esse radicem æquationis veram.

Est enim $MR = PM - PR = PM - CK = y - \frac{1}{2}c$; $AP = y^2 : a$ & $CR = KP = AP - AK = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob $CM^2 = CG^2 = CR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 - ad = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2$,

hoc

hoc est,

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy = -ad$$

$$y^4 + aby^2 - a^2cy = -a^3d$$

Cum loco ad circulum descripto eodem modo, quo in problemate præcedente, combinatur locus ad ellipsin. Lubet vero adhuc constructionem dare per circulum & hyperbolam æquilateram $y^2 - x^2 + cy - bx - ax - ad = 0$.

Est autem vi theorematis generalis (§. 590)

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad -\frac{t}{2m} = -1 \quad -2n = c \quad 2p = -a - b$$

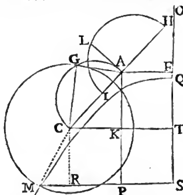
$$t = 2m \quad n = -\tfrac{1}{2}c \quad p = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = -ad$$

$$m^2 = p^2 - n^2 - ad$$

$$m^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 - ad$$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 - ad)}$$



Constructo nempe circulo ut ante, ita ut sit $AK = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$, $CK = \tfrac{1}{2}c$, ideoque $CA = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2}$, $AH = a$, $AI = d$, ideoque $AL = AG = \sqrt{ad}$, consequenter $GC = MC = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - ad)}$. Quia origo indeterminatæ y in hyperbola ob valorem ipsius n negativum ab axe versus sinistram distat intervallo $\tfrac{1}{2}c$, fiat $KT = \tfrac{1}{2}c$, ducaturque per T recta OS ipsi AP parallela & ad hanc AF perpendicularis.

Quoniam porro ob valorem ipsius p negativum indeterminatæ x origo a centro distat intervallo $\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$, fiat $FO = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$ & $OQ = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 - ad)}$; erit O centrum & Q vertex hyperbolæ æquilateræ; quæ si circa axem QS describatur, circulum in M secabit. Dico PM esse radicem æquationis veram.

Est enim $CR = KP = AP - AK = x - \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$ & $MR = MP - RP = MP - CK = y - \tfrac{1}{2}c$, consequenter ob $MC^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*) $\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - ad = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 + bx - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 + y^2 - cy + \tfrac{1}{4}c^2$, hoc est,

$$x^2 - ax + bx + y^2 - cy = -ad$$

$$x^2 = ax - bx + cy - y^2 - ad$$

Porro $MS = MP + PS = MP + KT = y + \tfrac{1}{2}c$, $SO = FS + FO = AP + FO = x + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$, consequenter ob $SO^2 - QO^2 = MS^2$ (§. 509) $x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 + bx + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + ad = y^2 + cy + \tfrac{1}{4}c^2$, hoc est,

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

seu substituto valore ipsius x^2

$$ax - bx + cy - y^2 - ad + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

$$2ax = 2y^2 \text{ seu } ax = y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : a^2$$

His valoribus ipsorum x^2 & x in æquatione

$$x^2 + ay + bx + ad = y^2 + cy$$

substitutis prodit

$y^2 +$

$$y^2 + cy = \frac{y^4}{a^2} + y^2 + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$cy = \frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$a^2cy = y^4 + aby^2 + a^3d$$

seu $y^4 + aby^2 - a^2cy = -a^3d$

PROBLEMA 251.

618. *Construere æquationem biquadraticam*

$$y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d.$$

Quoniam $y^4 + 2by^3 = a^3d - a^2cy$; æquatio data in hanc resolvitur analogiam:

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = b + y : x$$

erit I. $ax = by + y^2$

$$ax - by = y^2,\ \text{consequenter}$$

$$a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$$

$$a^3d - a^2cy = a^2x^2 - b^2y^2$$

II. $\frac{a^3d}{b^2} - \frac{a^2cy}{b^2} = \frac{a^2x^2}{b^2} - y^2$

Substituatur in hac æquatione ulterius valor ipsius y^2; prodibit

$$a^3d - a^2cy = a^2x^2 - ab^2x + b^3y$$

h. e. $a^3d - a^2cy - b^3y = a^2x^2 - ab^2x$

III. $ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2x}{a}$

$$y^2 + by = ax$$

IV. $ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} + y^2 + by = x^2 - \frac{b^2x}{a} + ax$

$$ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2x}{a}$$

$$y^2 + by = ax$$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2x}{a}$

Habemus ideo æquationes locales:

I. $y^2 + by - ax = 0$

II. $y^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{a^2cy}{b^2} + \frac{a^3d}{b^2} = 0$

III. $x^2 - \frac{b^2x}{a} + cy - ad = 0$
$\qquad + \frac{b^3y}{a^2}$

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3y}{a^2} + \frac{b^2x}{a} + ad = 0$
$\qquad + by - ax$
$\qquad - cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3y}{a^2} - \frac{b^2x}{a} - ad = 0$
$\qquad + cy - ax$
$\qquad + by$

Construamus æquationem per circulum & parabolam. Pro circulo cum sit $y^2 + x^2 + \frac{b^3y}{a^2} + by + cy - \frac{b^2x}{a} - ax - ad = 0$; erit vi theorematis generalis (§. 589)

$r = 0$ $\qquad \frac{f^2}{q^2} = x$ $\qquad -2n = \frac{b^3}{a^2} + b + c$

$\qquad f = q$ $\qquad n = -\frac{b^3}{2a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$

$$-2p = -\frac{b^2}{a} - a$$

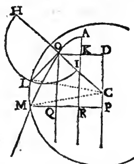
$$p = \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$$

$$n^2 + p^2 + ad = m^2$$

$$\sqrt{(n^2 + p^2 + ad)} = m$$

Circulus ergo eodem prorsus modo construitur, quo in problemate 249 (§.616).



(§. 616). Fit nempe $DC = p = b^2 : 2a + \frac{1}{2}a$, $DO = n = b^3 : 2a^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, $HO = a$, $OI = d$; erit $OC = \sqrt{(n^2 + p^2)}$, $OL = \sqrt{ad}$, & hinc $LC = \sqrt{(n^2 + p^2 + ad)}$. Ducatur OQ ipsi DC parallela, erit ob valorem OD negativum origo indeterminatæ x in O.

Porro pro parabola, ad quam $y^2 + by - ax = 0$, erit vi theorematis generalis (§. 587)

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = b \qquad -\frac{tf}{q} = -a$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad n = -\tfrac{1}{2}b \qquad t = a$$

$$q = f$$

$$n^2 + tp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ap = 0$$

$$ap = -\tfrac{1}{4}b^2$$

$$p = -\frac{b^2}{4a}$$

Ob valorem itaque ipsius n negativum fiat $OK = \frac{1}{2}b$ ducaturque per K recta AR ipsi OQ parallela, ob valorem ipsius p negativum fiat $KA = b^2 : 4a$; erit in A parabolæ vertex parametro a circa axem AR describendæ, quæ circulum secabit in M. Dico QM esse radicem æquationis veram.

Sit enim $QM = y$; erit $MR = y + \frac{1}{2}b$, ideoque $RA = \frac{y^2 + by + \frac{1}{4}b^2}{a}$ (§. 391), consequenter $KR = AR - AK = \frac{y^2 + by}{a}$. Hinc $PC = PD - CD = \frac{y^2 + by}{a} - p$ & $PM = QM + QP = QM + DO = y + n$. Quare cum sit $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebitur tandem $n^2 + p^2 + ad = \frac{y^4}{a^2} + \frac{2by^3}{a^2} + \frac{b^2y^2}{a^2} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + p^2 + y^2 + 2ny + n^2$, hoc est, $\frac{y^4}{a^2} + \frac{2by^3}{a^2} + \frac{b^2y^2}{a^2} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + y^2 + 2ny = ad$. Substituantur valores p & n ex æquatione ad circulum. Quoniam $p = \frac{1}{2}a + b^2 : 2a$ & $n = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + b^3 : 2a^2$; prodibit $\frac{y^4}{a^2} + \frac{2by^3}{a^2} + \frac{b^2y^2}{a^2} - y^2 - \frac{b^2y^2}{a^2} - by - \frac{b^3y}{a^2} + y^2 + by + cy + \frac{b^3y}{a^2} = ad$, hoc est,

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{2by^3}{a^2} + cy = ad \quad \Big| \; a^2$$

$$y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$$

Scholion.

619. *Æquationes locales, in quas æquationes construendas resolvimus, sunt ad curvam aliquam determinatam; sed plurimum amplificatur methodus, si exemplo* Slusii *ad curvam indeterminatam revocentur: tum enim non amplius ellipsis vel hyperbola unica, sed infinitæ constructioni inserviunt. Potest etiam æquatio localis ad curvam datam revocari, sicque problema per sectionem conicam datam construi. Agedum itaque! videamus, quomodo utrumque præstetur.*

Problema 252.

620. *Æquationem datam resolvere in æquationes locales, quæ sint ad curvas indeterminatas.*

a) Substituatur pro y radice æquationis $az : v$, ubi pro v recta quælibet assumi potest, & nova, quæ prodit, æquatio in locales ut supra resolvatur: id quod exemplo unico ostendisse sufficit.

Sit

Sit $y^3 + aby = a^2c$. Quoniam $y = az : v$; erit $y^3 = a^3z^3 : v^3$, consequenter

$$\frac{a^3z^3}{v^3} + \frac{a^2bz}{v} = a^2c$$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$$

Hæc æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$v : z = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$v : z = z : x$$

erit I. $z^2 = vx$. Hinc $z^2 : v = x$

Porro $\quad z : x = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

hoc est, $\quad vx + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

seu (§. 124) $\quad x + \frac{vb}{a} : \frac{vc}{a}$

II. $$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$$

$$xv = z^2$$

III. $$x^2 + \frac{vbx}{a} + vx = \frac{vcz}{a} + z^2$$

$$vx = z^2$$

$$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$$

IV. $$vx - x^2 - \frac{vbx}{a} = z^2 - \frac{vcz}{a}$$

$$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$$

hoc est, ob $x = z^2 : v$

$$x^2 + \frac{bz^2}{a} = \frac{vcz}{a}$$

V. $$z^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{vcz}{b}$$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$$

$$\frac{z^3}{v} + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$$

VI. $$zx + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$$

Habemus ideo æquationes locales ad infinitas sectiones Conicas, nempe

I. $z^2 - vx = 0$ II. $x^2 + \frac{vbx}{a} - \frac{vcz}{a} = 0$	ad infinitas parabolas.
III. $z^2 - x^2 + \frac{vcz}{a} - \frac{vbx}{a} = 0$ $- vx$	ad infinitas hyperbolas æquilateras.
IV. $z^2 + x^2 - \frac{vcz}{a} + \frac{vbx}{a} = 0$ $- vx$	ad infinitos circulos.
V. $z^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{vzc}{b} = 0$	ad infinitas ellipses.
VI. $zx + \frac{vbz}{a} - \frac{v^2c}{a} = 0$	ad infinitas hyperbolas intra asymptotos.

β) Vel eadem manente radice æquationis

fiat $\quad \frac{y^3}{v} + \frac{aby}{v} = \frac{a^2c}{v}$

& porro $\quad \frac{a^2}{v} : y = y : x \quad$ erit

I. $$y^2 = \frac{a^2x}{v}, \text{ \& hinc } x = \frac{vy^2}{a^2}$$

$$\frac{a^2xy}{v^2} + \frac{aby}{v} = \frac{a^2c}{v}$$

II. $$xy + \frac{vby}{a} = cv$$

$$xy^2 + \frac{vby^2}{a} = cvy$$

$$\frac{a^2x^2}{v} + bax = cvy$$

III. $$x^2 + \frac{bvx}{a} = \frac{cv^2y}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{a^2x}{v}$$

IV. $$y^2 + x^2 + \frac{bvx}{a} = \frac{a^2x}{v} + \frac{cv^2y}{a^2}$$

$$x^2 + \frac{bvx}{a} = \frac{cv^2y}{a^2}$$

$$\frac{a^2x}{v} = y^2$$

V. $$x^2 + \frac{bvx}{a} + \frac{a^2x}{v} = \frac{cv^2y}{a^2} + y^2$$

$$x^2 + \frac{v^2by^2}{a^3} = \frac{cv^2y}{a^2}$$

VI. $$y^2 + \frac{a^3x^2}{v^3b} = \frac{acy}{b}$$

 Habe-

Habemus ideo æquationes locales:

I. $y^2 - \frac{a^2x}{v} = 0$ } ad infinitas parabolas.
III. $x^2 + \frac{vbx}{a} - \frac{cv^2y}{a^2} = 0$ }

II. $xy + \frac{vby}{a} - cv = 0$ ad infinitas hyperbolas intra asymptotos.

IV. $y^2 + x^2 + \frac{bvx}{a} - \frac{cv^2y}{a^2} - \frac{a^2x}{v} = 0$ ad infinitos circulos.

V. $y^2 - x^2 + \frac{cv^2y}{a^2} - \frac{bvx}{a} - \frac{a^2x}{v} = 0$ ad infinitas hyperbolas æquilateras.

VI. $y^2 + \frac{a^3x^2}{v^2b} - \frac{acy}{b} = 0$ ad infinitas ellipses.

PROBLEMA 253.

621. ***Æquationem localem reducere ad aliam ejusdem speciei, quæ sit ad curvam datam.***

1. Ex æquatione locali eliciendus est valor linearum, per quas datur, aut, quod perinde est, ratio earundem.
2. Hi valores cum sint æquales lineis, per quas datur curva, ad quam æquatio reducenda; æquationes prodeunt, quarum reductione legitime facta prodibunt valores coefficientium in æquatione data substituendi, ut in quæsitam degeneret.

E.gr. Æquatio ad parabolam $y^2 - ax = 0$ mutanda est in aliam, quæ sit ad parabolam, cujus parameter r. Quoniam a parameter parabolæ, ad quam æquatio data existit; erit $r = a$, consequenter æquatio quæsita $y^2 - rx = 0$.

Similiter reducenda sit æquatio $y^2 + x^2 + by - ay - cx = 0$ ad circulum, cujus radius r. Quoniam radius æquationis circuli, ad quam est æquatio data.

$$\sqrt{((\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{1}{4}c^2)},$$

erit $(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{1}{4}c^2 = r^2$

$$(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}c^2$$

$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}c^2)}$$

$$\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}c^2)} = f$$

$$\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}c^2)} = g$$

$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{(r^2 - (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2)} = h$$

His valoribus in æquatione proposita substitutis, prodit æquatio ad circulum desideratum

$$y^2 + x^2 + 2gy - 2fy - 2hx = 0.$$

PROBLEMA 254.

622. ***Invenire regulam generalem construendi omnes æquationes tam cubicas, quam biquadraticas.***

Sit descripta parabola & ex centro H radio AH circulus secans eam in N, N & M. Sit AD $= b$, DH $= d$, AQ $= c$; erit AH$^2 = d^2 + b^2$. Sit porro PM $= x$, parameter parabolæ $= a$; erit OM $= x + c$, RM $= x + d$. Quoniam (§. 404)

$$a : OM + AQ = PM : AP$$

$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

erit DP $=$ HR $= \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$, ideoque HR$^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + b^2$ & RM$^2 = x^2 + 2dx + d^2$.

Habe-

Habemus ideo

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + b^2 + x^2 + 2dx + d^2 = b^2 + d^2$$

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$
$$- \frac{2bx^2}{a} + 2dx$$
$$+ x^2$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0$$
$$- 2abx + 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Apparet ideo, si habetur terminus secundus positivus, radices veras cadere versus dexteram. Sit ideo æquatio cum ea comparanda $x^3 + px^2 \mp qx \mp r = 0$; erit

$$4c = p \qquad c = \tfrac{1}{4}p$$

$$4c^2 - 2ab + a^2 = q$$
$$4c^2 + a^2 - q = 2ab$$
$$\tfrac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab \quad \Big| \ 2a$$
$$\frac{p^2}{8a} + \tfrac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$$

vel

$$a^2 + 4c^2 - 2ab = -q$$
$$a^2 + \tfrac{4}{16}p^2 + q = 2ab \quad \Big| \ 2a$$
$$\tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$$

Porro

$$2a^2d - 4abc = r$$
$$2a^2d = r + 4abc \quad \Big| \ 2a^2$$
$$d = \frac{r}{2a^2} + \frac{2bc}{a}$$

h. e. $d = \frac{r}{2a^2} + \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2}$

vel

$$2a^2d - 4abc = -r$$
$$2a^2d = 4abc - r$$
$$d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$$

h. e. $d = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}$

Sit jam $pN = x$; reliqua sint ut ante; erit $rN = pN - pr = pN - DH = x - d$, $No = x - c$, $pm = x - 2c$. Quoniam (§. 404)

$$a : oN + AQ = pm : Ap$$
$$a : x = x - 2c : \frac{x^2 - 2cx}{a}$$

erit $Dp = Hr = \frac{x^2 - 2cx}{a} - b$. Habemus ideo $NH^2 = Hr^2 + Nr^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2 + x^2 - 2dx + d^2 = b^2 + d^2$$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} + \frac{4bcx}{a} = 0$$
$$- \frac{2bx^2}{a} - 2dx$$
$$+ x^2$$

$$x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc = 0$$
$$- 2abx - 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Apparet ideo, si terminus secundus sit negativus, radicem æquationis veram esse versus sinistram. Sit ideo æquatio cum ea comparanda $x^3 - px^2 \mp qx \mp r = 0$; erit

$$-p = -4c$$
$$\tfrac{1}{4}p = c$$
$$4c^2 - 2ab + a^2 = q$$
$$a^2 + 4c^2 - q = 2ab \quad \Big| \ 2a$$
$$\tfrac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} - \frac{q}{2a} = b$$

h. e.

h. e. $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} - \frac{q}{2a} = b$

Vel

$$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$
$$a^2 + 4c^2 + q = 2ab \quad : 2a$$
$$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} + \frac{q}{2a} = b$$

h. e. $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$

Porro

$$4abc - 2a^2d = r$$
$$4abc - r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2} = d$$

h. e. $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$

Vel

$$4abc - 2a^2d = -r$$
$$4abc + r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} = d$$

h. e. $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d$

Est ergo in omnibus æquationibus cubicis completis

$$AQ = \frac{1}{4}p$$
$$DA = \frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} \pm \frac{q}{2a}$$
$$DH = \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \mp \frac{r}{2a^2}$$

Nimirum in regula q seu coefficiens termini tertii semper afficitur signo contrario ejus, quod in æquatione habet. Habetur autem in regula $-r$, si p & r diversis signis afficiuntur: alias semper est $+r$.

Quoniam coefficientes illorum terminorum evanescunt, qui nihilo æquales ponuntur; evidens est ejusdem regulæ ad æquationes incompletas applicatio.

Denique si quadratum radii MH vel NH ponatur $b^2 + d^2 \mp af$; æquatio manebit biquadratica. Quare si biquadratica æquatio fuerit $x^4 \mp px^3 \mp qx^2 \mp rx \mp f = 0$; reliqua omnia manebunt ut ante, sed

$$f = a^3 f$$
$$f : a^3 = f$$

Unde radius circuli invenitur ut in problemate 250 (§. 617), si fuerit $+f$, vel ut in problemate 251 (§. 618), si fuerit $-f$. His observatis, regula eadem constructioni æquationum biquadraticarum satisfacit.

SCHOLION.

623. *Atque hæc est regula, quam* Thomas Bakerus (a) *centralem vocat & ad omnes casus æquationum cubicarum & biquadraticarum applicat. Sed verum ejus fundamentum latet in iis, quæ superius tradidimus. Restat, ut usum hujus doctrinæ aliquot exemplis illustremus.*

PROBLEMA 255.

624. ***Inter duas lineas datas invenire duas medias continue proportionales.***

Sit

(a) In Clave Geometrica catholica pag. 6.

Sit datarum	quæsitarum
major $= b$	minor $= y$
minor $= a$	major $= x$

erit per conditionem problematis:

$$a : y = y : x$$

I. $$ax = y^2$$

$$y : x = x : b$$

II. $$x^2 = by$$

$$a : y = x : b$$

III. $$ab = xy$$

$$x^2 = by$$
$$ax = y^2$$

IV. $$x^2 - ax = by - y^2$$

$$ax = y^2$$
$$x^2 = by$$

V. $$x^2 + ax = y^2 + by$$

Porro ob $x = y^2 : a$

$$\frac{y^4}{a^2} = by$$

$$y^3 = a^2b$$

fiat $$\frac{y^3}{v} = \frac{a^2b}{v} \quad (§. 620)$$

& $$\frac{a^2}{v} : y = y : z$$

erit VI. $$y^2 = \frac{a^2z}{v}$$

$$\frac{a^2zy}{v^2} = \frac{a^2b}{v}$$

VII. $$zy = bv$$ y

$$zy^2 = bvy$$

$$\frac{a^2z^2}{v} = bvy$$

VIII. $$z^2 = \frac{bv^2y}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{a^2z}{v}$$

IX. $$y^2 + z^2 = \frac{bv^2y}{a^2} + \frac{a^2z}{v}$$

$$z^2 = \frac{bv^2y}{a^2}$$

$$\frac{a^2z}{v} = y^2$$

X. $$z^2 + \frac{a^2z}{v} = \frac{bv^2y}{a^2} + y^2$$

Habemus ideo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$ }
II. $x^2 - by = 0$ } ad parabolam.

III. $xy - ab = 0$ ad hyperbolam intra asymptotos.

IV. $y^2 + x^2 - by - ax = 0$ ad circulum.

V. $y^2 - x^2 + by - ax = 0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 - \frac{a^2z}{v} = 0$ }
VIII. $z^2 - \frac{bv^2y}{a^2} = 0$ } ad infinitas parabolas.

VII. $zy - bv = 0$ ad infinitas hyperbolas intra asymptotos.

IX. $y^2 + z^2 - \frac{bv^2y}{a^2} - \frac{a^2z}{v} = 0$ ad infinitos circulos.

X. $y^2 - z^2 - \frac{a^2z}{v} + \frac{bv^2y}{a^2} = 0$ ad infinitas hyperbolas æquilateras.

Dabimus constructionem combinatis locis primo & quarto, deinde nono & septimo.

Pro circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by - ax = 0$, habetur vi theorematis generalis (§. 589)

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{2n = b}{n = \frac{1}{2}b} \qquad \frac{2p = a}{p = \frac{1}{2}a}$$

$$\frac{f^2}{q^2} = 1$$

$$f = q$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} = m$$

Quo-

Quoniam in parabola parametro a descripta, ad quam $ax = y^2$ origo ipsius x in vertice A existit; circulus per ejus verticem describendus radio $= \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$. Fiat itaque AD $= \frac{1}{2}a$, DH $= \frac{1}{2}b$; erit centrum circuli in H & PM $= y$, PA $= x$: id quod facile ostenditur eodem, quo superius, modo.

Constructio per circulum, ad quem est æquatio $y^2 + z^2 - \frac{bv^2y}{a^2} - \frac{a^2z}{v} = 0$ & hyperbolam intra asymptotos ad quam est $xy - bv = 0$, ita absolvitur.

Jungantur nempe RI $= v$, & AR $= b$ ad angulos rectos, & per I describatur hyperbola intra asymptotos BAT; erit AT $= z$, TM $= y$.

Pro circulo ad quem est æquatio

$y^2 + z^2 - \frac{bv^2y}{a^2} - \frac{a^2z}{v} = 0$; erit (§. 589)

hinc $\begin{matrix} r = 0, \\ q = f \end{matrix}$

$$2n = \frac{bv^2}{a^2}$$

$$n = \frac{bv^2}{2a^2}$$

$$2p = \frac{a^2}{v}$$

$$p = \frac{a^2}{2v}$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = 0$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\frac{b^2v^4}{4a^4} + \frac{a^4}{4v^2} = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{b^2v^4}{4a^4} + \frac{a^4}{4v^2}\right)} = m$$

Fiat itaque AD $= \frac{bv^2}{2a^2}$, & in D erigatur perpendicularis DC $= \frac{a^2}{2v}$; tandemque ex centro C radio CA describatur circulus secans hyperbolam in M: erit TM $= y$, AT $= z$.

Nam ex natura hyperbolæ ob AR . RI $=$ AT . TM, $yz = bv$, & hinc $z = bv : y$. Porro CK $= z - \frac{a^2}{2v}$, & KM $= y - \frac{bv^2}{2a^2}$; ideoque ob CM^2 $=$ CK^2 $+$ KM^2

$$\frac{b^2v^4}{4a^4} + \frac{a^4}{4v^2} = z^2 - \frac{a^2z}{v} + \frac{a^4}{4v^2} + y^2 - \frac{bv^2y}{a^2} + \frac{b^2v^4}{4a^4}.$$

hoc est

$$z^2 - \frac{a^2z}{v} + y^2 - \frac{bv^2y}{a^2} = 0$$

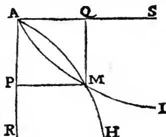
Est autem $z = \frac{bv}{y}$

$$z^2 = \frac{b^2v^2}{y^2}$$

Quibus

Quibus valoribus substitutis in anteriori æquatione loco ipsarum z & z^2 prodit

$$\frac{b^2v^2}{y^2} - \frac{a^2b}{y} + y^2 - \frac{bv^2y}{a^2} = 0$$
$$\overline{}\; a^2y^2$$
$$a^2b^2v^2 - a^4by + a^2y^4 - bv^2y^3 = 0$$
$$\overline{}\; a^2y - v^2b$$
$$y^3 - a^2b = 0.$$



Quodsi AR & AS jungantur ad angulos rectos & circa axem AR parametro a describatur parabola AMH, circa AS vero parametro b parabola altera AMI secans priorem in M; erit AP $= x$, PM $= y$: quem modum invenit *Menecbmus* ex conditione problematis absque calculo analytico facile eruendum, & nos ideo apponimus, quia inde enata est methodus construendi æquationes per duorum locorum combinationem. Est enim vi parabolæ primæ $y^2 = ax$ & vi secundæ $x^2 = by$, ideoque $a:y = y:x$ & $y:x = x:b$.

Corollarium.

625. Sit latus cubi $= a$, latus cubi dupli $= y$; erit $2a^3 = y^3$, seu ponendo $2a = b$, $a^2b = y^3$. Quærendæ igitur sunt inter latus cubi & ejus duplum duæ mediæ continue proportionales, eritque earum prima latus cubi dupli. Et in genere pro tantuplicatione cubi est $ma^3 = y^3$, ideoque inter a & ma quærendæ sunt duæ mediæ.

Scholion.

626. *Coincidit ideo problema* Deliacum *de duplicando cubo, quod Deliis remedium contra pestem quærentibus oraculum proposuisse fertur, cum problemate de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus (quod primus observavit* Hipocrates Chius*):* unde & ipsum problema Deliacum *appellari solet. Celebre hoc problema jam olim inter Geometras Græcos extitit, quot inter* Plato, Heron Alexandrinus, Apollonius Pergæus, Eratosthenes, Pappus Alexandrinus, Sporus, Menechmus, Archytas Tarentinus, Philo Byzantius, Philoponus, Diocles & Nicomedes *modis diversis ab* Eutocio (a) *conservatis solverunt.*

Problema 256.



627. *Rectam* AB *utcunque divisam in* C *ulterius dividere in* D, *ita ut sit* CD : DB $=$ AC^2 : CD^2.

Sit AC $= a$, CB $= b$, CD $= y$, erit DB $= b - y$, consequenter per conditionem problematis

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Ut nova indeterminata introducatur, cum ob $y^3 = a^2b - a^2y$ problema solidum esse facile intelligatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$ & hinc

$$y : b - y = a^2 : ax$$
$$a : x \quad (\S. 124)$$

II. $xy = ab - ay$

Porro ob $y : b - y = a : x$

$$y^2 : by - y^2 = a : x \quad (\S. 124)$$
$$ax : by - y^2 = a : x$$
$$x : by - y^2 = 1 : x \quad (\S. cit.)$$

III. $x^2 = by - y^2$

$$ax = y^2 \quad \text{add.}$$

 VI. x^2

(a) In Commentariis in lib. 2. Archimedis de Sphærâ & Cylindro.

IV. $x^2 + ax = by$

$ax = y^2$ add.

V. $x^2 + 2ax = by + y^2$

Denique ob $ax = y^2$ (I.)

& $x^2 = by - y^2$ (III.) subtr.

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$

Habemus ideo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$ ad parabolam.

II. $xy + ay - ab = 0$ ad hyperbolam intra asymptotos.

III. $y^2 + x^2 - by = 0$ ad circulum.

IV. $x^2 + ax - by = 0$ ad parabolam.

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = 0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$ ad ellipsin.

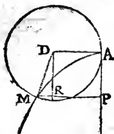
Nos duas dabimus constructiones, alteram per parabolam & circulum; alteram per circulum & ellipsin.

Quoniam æquatio ad parabolam $y^2 - ax = 0$; non alia re opus est, quam ut parametro a parabola describatur; erit origo indeterminatæ x in vertice (§. 388).

Pro circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by = 0$, vi theorematis generalis (§. 589)

$r = 0$ $\quad 2n = b$ $\quad n^2 = m^2$

$p = 0$ $\quad n = \frac{1}{2}b$ $\quad n = m = \frac{1}{2}b$



In vertice ideo parabolæ erigatur perpendicularis $AD = \frac{1}{2}b$ & ex centro D radio $AD = \frac{1}{2}b$ describatur circulus, erit $PM = y$.

Demissa enim perpendiculari DR, erit $MR = PM - PR = PM - AD = y - \frac{1}{2}b$ & (§. 391) $AP = DR = y^2 : a$, consequenter ob $DM^2 = DA^2 = MR^2 + DR^2$ (§. 417 *Geom.*), $y^4 : a^2 + y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2$, hoc est,

$$\frac{y^4}{a^2} + y^2 - by = 0 \qquad y : a^2$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

Pro ellipsi ad quam $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$, vi theorematis generalis (§. 588)

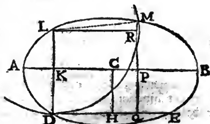
$\frac{2r}{q} = 0$ hinc $q = s$ $\quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2}$ $\quad 2n = \frac{1}{2}b$, $n = \frac{1}{4}b$ $\quad -\frac{2tp}{2m} = -\frac{1}{2}a$, $p = \frac{1}{2}a$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2 + \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}m^2$$

$$\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{2}m^2$$

$$V(\frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2) = m$$



Describatur ergo ellipsis, cujus axis $AB = 2V(\frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2)$ & parameter $= V(\frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2)$ ob $2m : t = 2 : 1$. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH = n = \frac{1}{4}b$ & ducta DE per H axi AB parallela fiat $HD = p = \frac{1}{2}a$; erit in D origo indeterminatæ x.

Quare circulum cum ea combinaturus

turus erigat perpendicularem DL $= \frac{1}{2}b$ & ex L radio DL describat circulum: erit QM $= y$, DQ $= x$.

Est enim QH $=$ DQ $-$ DH $= x - \frac{1}{2}a$, PM $= y - \frac{1}{4}b$, ideoque PC$^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, PM$^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Est porro AC$^2 = \frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2$, consequenter ob $t : 2m = 1 : 2$ (§. 431)

$1 : 2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$

$$1 : 2 = y^2 - \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{16}b^2 : \tfrac{1}{8}b^2 - x^2 + ax$$

$$2y^2 - by + \tfrac{1}{8}b^2 = \tfrac{1}{8}b^2 + ax - x^2$$

$$2y^2 - by = ax - x^2$$

Porro RM $= y - \frac{1}{2}b$, LR $=$ DQ $= x$, LM $= \frac{1}{2}b$, consequenter ob LM^2 $=$ LR^2 $+$ RM^2 (§. 417 *Geom.*)

$$\tfrac{1}{4}b^2 = y^2 - by + \tfrac{1}{4}b^2 + x^2$$

$$y^2 - by = -x^2$$

Quo valore ipsius $y^2 - by$ in æquatione superiore substituto, prodit

$$y^2 - x^2 = ax - x^2$$

$$y^2 = ax$$

$$y^2 : a = x$$

$$y^4 : a^2 = x^2$$

Hinc ob $y^2 - by + x^2 = 0$

$$\frac{y^4}{a^2} + y^2 - by = 0$$

$$\overline{}\; y : a^2$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

Quod ellipsis transeat per puncta D & L, ita ostenditur. Est KL $=$ DK $= \frac{1}{4}b$, ideoque KL$^2 = \frac{1}{16}b^2$; AC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)}$ & KC $=$ DH $= \frac{1}{2}a$, ideoque AK $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} - \frac{1}{2}a$ & KB $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} + \frac{1}{2}a$, consequenter AK . KB $= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{8}b^2$. Sed 2KL$^2 = \frac{2}{16}b^2 = \frac{1}{8}b^2$. Est itaque 2KL$^2 =$ AK . KB, consequenter punctum L, ideoque & punctum D in Ellipsi (§. 420)

PROBLEMA 257.

628. *Dato parallelepipedo cubum æqualem construere.*

Sint latera parallelepipedi a, b & c; latus cubi sit y; erit (§. 536 *Geom.*)

$$abc = y^3$$

hoc est, $a : y = y^2 : bc$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur; fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$

& ob $a : y = ax : bc$

II. $xy = bc$

Porro $a : y = y : x$

$a : y = ax : bc$

ideoque $y : x = ax : bc$ (§. 167 *Arith.*)

$$ax^2 = bcy$$

III. $x^2 = bcy : a$

$ax = y^2$ subtr.

IV. $x^2 - ax = bcy : a - y^2$

V. $x^2 + ax = y^2 + \frac{bcy}{a}$

Denique ob $x^2 = bcy : a$

& $2ax = 2y^2$

VI. $2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$

& VII. $2ax + x^2 = 2y^2 + bcy : a$

Habemus ideo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$ ad parabolam.

II. $xy - bc = 0$ ad hyperbolam intra asymptotos.

III. $x^2 - \frac{bcy}{a} = 0$ ad parabolam.

IV. $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad circulum.

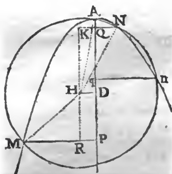
V. $y^2 - x^2 + \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad ellipsin.

VII. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad hyperbolam scalenam.

Pro loco ad circulum, ad quem $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$, vi theorematis generalis (§. 589)

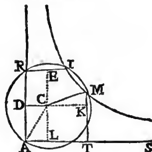
$$2n = bc : a \qquad 2p = a$$
$$n = bc : 2a \qquad p = \frac{1}{2}a$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}a^2\right)} = m$$



Cum in parabola, ad quam $y^2 - ax = 0$, parametro a descripta origo indeterminatae x sit in vertice A, fiat $AD = \frac{1}{2}a$, $DH = n = bc : 2a$; erit H centrum circuli radio AH describendi: qui si describatur, secabit parabolam in M, eritque $MP = y$.

Est enim $AH^2 = AD^2 + DH^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2c^2 : 4a^2$, $PA = y^2 : a$ (§. 391) & hinc $DP = HR = y^2 : a - \frac{1}{2}a$, $MR = y - bc : 2a$. Quare ob $AH^2 = HM^2 = HR^2 + MR^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2c^2 : 4a^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{4a^2}$, hoc est, $\frac{y^4}{a^2} - \frac{bcy}{a} = 0$

$$y : a^2$$
$$y^3 - abc = 0$$



Jungantur $RI = b$ & $RA = c$ ad angulos rectos, ducatur indefinita AS ipsi RI parallela & intra asymptotos RA & AS per I describatur hyperbola; erit origo indeterminatae x in A. Porro ut circulus cum ea combinetur, fiat $AD = n = bc : 2a$ & DC ad AD perpendicularis $= p = \frac{1}{2}a$; ex centro C radio AC describatur circulus hyperbolam in M intersecans, erit TM ipsi AR parallela $= y$.

Est enim ob $AR . RI = AT . TM$ (§. 502) $bc = xy$. Praeterea $AC^2 = CM^2 = AL^2 + CL^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}a^2 + b^2c^2 : 4a^2$, $CK = LT = AT - AL = x - \frac{1}{2}a$ & $MK = TM - TK = TM - AD = y - bc : 2a$; unde ob $CM^2 = CK^2 + KM^2$ elicitur $\frac{1}{4}a^2 + b^2c^2 : 4a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{4a^2}$, hoc est, $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$.

seu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Substi-

Substituatur pro *bc* valor ipsius *xy*; prodibit

$$y^2 - \frac{xy^2}{a} = ax - x^2 \quad \cdot a$$

$$ay^2 - xy^2 = a^2x - ax^2 \quad a - x$$

$$y^2 = ax$$

$$y^4 = a^2x^2$$

$$y^4 : a^2 = x^2$$

Quare ob $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

$$ax - \frac{bcy}{a} + \frac{y^4}{a^2} - ax = 0$$

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{bcy}{a} = 0$$

$$y^3 - abc = 0$$

Pro ellipsi, ad quam est $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$, vi theorematis generalis (§. 588)

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad \text{hinc} \quad q = f.$$

$$\frac{r}{2m} = \frac{1}{2} \qquad 2n = \frac{bc}{2a} \qquad n = \frac{bc}{4a}$$

$$-\frac{2tp}{2m} = -a \qquad \frac{2p}{2} = a \qquad p = a$$

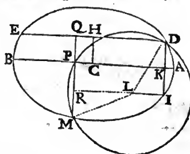
$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2 + \tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$

$$2n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{8a^2} + a^2\right)} = m$$

Describatur ergo ellipsis (*Vid. Fig. seq.*) axe AB $= 2\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8a^2)}$, & parametro $\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8a^2)}$, quia est ad axem in ratione subdupla. Ex centro C demittatur perpendicularis CH $= \frac{bc}{4a}$ & per H agatur DE ipsi AB parallela. Fiat DH $= a$; erit



D origo indeterminatæ x. Ut circulus cum eadem combinetur, fiat DI $= bc : 2a$ & IL $= \frac{1}{2}a$ & radio LD ex centro L describatur circulus, qui ellipsin secabit in M. Dico QM esse $= y$ & DQ $= x$.

Est enim CP $=$ HQ $=$ DQ $-$ DH $= x - a$ & PM $=$ QM $-$ PQ $=$ QM $-$ DK $= y - bc : 4a$. Ex natura ellipsis (§. 431)

$$2 : 1 = AC^2 - CP^2 : PM^2$$

$$2 : 1 = \frac{b^2c^2}{8a^2} + a^2 - x^2 + 2ax - a^2 : y^2 - \frac{bcy}{2a} + \frac{b^2c^2}{16a^2}$$

$$\frac{b^2c^2}{8a^2} - x^2 + 2ax = 2y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{8a^2}$$

$$2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$$

Porro MR $=$ QM $-$ RQ $=$ QM $-$ DI $= y - bc : 2a$, LR $=$ DQ $-$ IL $= x - \frac{1}{2}a$. Quare ob DL^2 $=$ LM^2 $=$ LR^2 $+$ RM^2 $\frac{1}{4}a^2 + b^2c^2 : 4a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - bcy : a + b^2c^2 : 4a^2$, hoc est,

$$x^2 - ax + y^2 - bcy : a = 0$$

seu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Substituto valore ipsius $ax - x^2$ in æquatione superiori, prodit

$ax + y^2$

$$ax + y^2 - \frac{bcy}{a} = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$
$$ax = y^2$$
$$x = y^2 : a$$
$$x^2 = y^4 : a^2$$

His valoribus ipsorum x & x^2 denuo in æquatione superiore substitutis prodit

$$2y^2 - y^4 : a^2 = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$
$$\frac{y^4}{a^2} = \frac{bcy}{a} \quad y : a^2$$
$$y^3 = abc$$

Non absimili modo fit constructio per circulum & hyperbolam.

PROBLEMA 258.

629. *Datum angulum* ACB *trisecare.*



Concipiamus angulum ACB esse trifariam sectum in ACE, ECD & DCB, ducanturque arcuum æqualium subtensæ cognomines AE, ED, DB, quæ æquales sunt (§. 289 *Geom.*). Sit AC $= b$, AB $= a$, AE $= y$, EG $= x$.

Jam anguli EAB mensura est arcus DB (§. 314 *Geom.*). Anguli vero ACE mensura cum sit arcus AE (§. 57 *Geom.*) ipsi DB æqualis per *hypoth.* anguli EAG & ACE æquales sunt (§. 142 *Geom.*). Quoniam itaque præterea angulus AEC utrique triangulo EAG & EAC communis; erit (§. 267 *Geom.*)

AC : AE = AE : EG
$b : y = y : x$

I. $y^2 = bx$

AC : EC = AE : AG
sed AC = EC
ergo AE = AG

Ducatur EF ipsi DC parallela: erit EFH = GHC (§. 233 *Geom.*) = EDC (§. 312. & 233 *Geom.*). Porro EGF = HGC (§. 156 *Geom.*) = CED (§. 312. & 233 *Geom.*). Est igitur (§. 267 *Geom.*)

EC : ED = EG : GF
$$b : y = x : \frac{xy}{b}$$

Quoniam DB = ED = AE, & DB = BH, EA = AG *per demonstr.* ED = FH (§. 257 *Geom.*): erit AE + ED + DB = AG + BH + GH + FG, hoc est, 3AE = AB + FG, consequenter

$$3y = a + xy : b$$

II. $3by = ab + xy$ seu $3by - xy = ab$ quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam:

$$b : y = 3b - x : a$$
$$y : x = 3b - x : a \text{ (§. 167 Arith.)}$$

III. $ay = 3bx - x^2$
$y^2 = bx$ add.

IV. $ay + y^2 = 4bx - x^2$
$ay = 3bx - x^2$
$y^2 = bx$ subtr.

V. $ay - y^2 = 2bx - x^2$
$ay = 3bx - x^2$
$2y^2 = 2bx$ add.

VI. $2y^2 + ay = 5bx - x^2$
$ay = 3bx - x^2$
$2y^2 = 2bx$ subtr.

VII. $ay - 2y^2 = bx - x^2$

Habemus ideo æquationes locales:

I. $y^2 - bx = 0$ ad parabolam.
II. $xy - 3by + ab = 0$ ad hyperbolam intra asymptotos.
III. $x^2 - 3bx + ay = 0$ ad parabolam,

IV.

IV. $y^2 + x^2 + ay - 4bx = 0$ ad circulum.

V. $y^2 - x^2 - ay + 2bx = 0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}ay - \frac{5}{2}bx = 0$ ad ellipsin.

VII. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx = 0$ ad hyperbolam scalenam.

Pro circulo, ad quem est $y^2 + x^2 + ay - 4bx = 0$, vi theorematis generalis (§. 589)

$$\frac{-2n = a}{n = -\frac{1}{2}a} \qquad \frac{-2p = -4b}{p = 2b}$$

$$\frac{n^2 + p^2 = m^2}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 4b^2)} = m}$$

Quare parabola, ad quam $y^2 - bx = 0$, parametro b descripta, fiat AD $= 2b$, DH $= \frac{1}{2}a$ & ex centro H radio NH describatur circulus; erit QN $= y$, AQ $= x$.

Est enim his positis $bx = y^2$ (§. 388), consequenter $x = y^2 : b$, atque hinc DQ $=$ KH $= 2b - y^2 : b$. Porro KN $=$ QN $+$ QK $=$ QN $+$ DH $= y + \frac{1}{2}a$. Quare ob HN$^2 =$ KH$^2 +$ KN$^2 =$ $\frac{1}{4}a^2 + 4b^2 = 4b^2 - 4y^2 + y^4 : b^2 + y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2$, hoc est,

$$\frac{y^4}{b^2} - 3y^2 + ay = 0$$

$$\overline{y^3 - 3b^2y + ab^2 = 0} \quad y : b^2$$

Eadem vero æquatio prodit, si in superius inventa secunda æquatione $3y = a + xy : b$ substituitur valor ipsius $x = y^2 : b$ ex prima. Est nempe $3y = a + y^3 : b^2$, hoc est, $y^3 - 3b^2y + ab^2 = 0$.

Constructio per circulum & hyperbolam intra asymptotos sita absolvitur. Jungantur KL $= 2b$ & CL $= \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit CK $= \sqrt{(4b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$ radius circuli ex centro C per K describendi. Producatur CL in I, donec LI $= a$ & KL in T, donec LT $= b$, seu KT $= 3b$. Intra asymptotos KTS per I describatur hyperbola. Dico QM esse radicem veram quæsitam seu subtensam trientis arcus, qui metitur angulum trisecandum, radio b descripti: seu QM $= y$ & KQ $= x$.

Est enim QT $=$ KT $-$ KQ $= 3b - x$, ideoque ob IL . LT $=$ QT . QM (§. 502),

(§. 502), $3by - xy = ab$. Porro PC $=$ QL $=$ KL $-$ KQ $= 2b - x$ & PM $= y + \frac{1}{2}a$, ideoque ob $KC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}a^2 + 4b^2 = y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 + 4b^2 - 4bx + x^2$, hoc est, $y^2 + ay = 4bx - x^2$.

Æquatio prior ad hyperbolam in hanc resolvitur analogiam:

$$3b - x : b = a : y$$

Ergo $4b - x : b = a + y : y$ (§. 124)

$$4b - x : a + y = b : y$$

Æquatio posterior ad circulum hanc suppeditat analogiam:

$$4b - x : y + a = y : x$$

Quare $b : y = y : x$ (§. 167 *Arith.*)

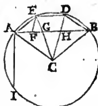
Unde $bx = y^2$ & $y^2 : b = x$, $y^4 : b^2 = x^2$. Substitutis his valoribus in æquatione ad circulum $y^2 + ay = 4bx - x^2$, prodit

$$y^2 + ay = 4y^2 - y^4 : b^2$$

$$ay = 3y^2 - y^4 : b^2 \quad \cdot y : b^2$$

$$ab^2 = 3b^2y - y^3$$

seu $y^3 - 3b^2y + ab^2 = 0$ ut ante.



Notandum vero est, (*Vid. etiam Fig. 1 hujus pag.*) cum eadem æquatio prodeat, si ponatur $qm = y$ esse qm trientis complementi ad circulum subtensam AI.

Constructiones reliquas facile proprio marte addent, qui superiora rite perceperunt.

PROBLEMA 259.

630. *Numerum irrationalem datum per lineam exprimere.*

Sit potentia imperfecta quæcunque x & radix ex ea extracta irrationalis $x^{1:m}$.

Ponatur $x^{1:m} = y$

erit $x = y^m$

hoc est, a pro unitate assumta $a^{m-1}x = y^m$

quæ est æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 519). Quare si parametro a parabola primi generis sit descripta & abscissa sit ad parametrum ut numerus sub signo radicali, e. gr. ut 3 ad 1, si $\sqrt{3}$ desideretur, vel ut 2 ad 3, si quæratur $\sqrt{\frac{2}{3}}$; ejus semiordinata exprimet numerum quæsitum.

Est enim in casu primo, si $a = 1$, $x = 3$, $y^2 = 3$, ideoque $y = \sqrt{3}$. Et si fuerit $a = 1$, $a : x = 3 : 2$, erit $3x = 2a = 2$, consequenter $x = \frac{2}{3}$. Hinc $y^2 = \frac{2}{3}$, ideoque $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Eodem modo patet, describendam esse parabolam secundi generis seu cubici ordinis, si radices cubicæ dentur; parabolam vero tertii generis seu biquadratici ordinis,

nis, si radices dentur biquadraticæ & ita porro.

Sed possunt etiam parabolæ inferiores satisfacere radicibus superioribus. Sit enim e. gr. quærenda linea y, quæ eandem habeat rationem ad lineam datam a, quam habet 1 ad $\sqrt[3]{5}$. Per conditionem problematis; erit

$$1 : \sqrt[3]{5} = a : y$$

$$a\sqrt[3]{5} = y$$

$$5a^3 = y^3$$

Construetur ideo problema per parabolam primi generis & circulum, quærendo nempe proportionales: Fiat enim $a : y = y : x$

erit I. $y^2 = ax$

Æquatio proposita $5a^3 = y^3$ resolvitur in hanc analogiam:

$$a : y = y^2 : 5a^2$$
$$= ax : 5a^2$$
$$= x : 5a$$

unde $y : x = x : 5a$

$$x^2 = 5ay$$
$$y^2 = ax \quad \text{vi num. I.}$$

II. $y^2 + x^2 = 5ay + ax$

Æquatio prima est ad parabolam & secunda ad circulum. Unde æquatio $y^3 = 5a^3$ construitur ut supra.

PROBLEMA 260.

631. *Invenire puncta quotcunque, quæ sint in curva datæ æquationis.*

1. Ducta linea recta, quæ pro axe curvæ describendæ assumatur, pro arbitrio determinentur abscissæ quotcunque.
2. Erigantur perpendiculares indeterminatæ ad singulas abscissas.
3. Quoniam abscissa determinata est, æquatio data pro determinata recte habetur. Construatur itaque per methodum supra expositam; ita enim invenietur semiordinata abscissæ respondens.

E. gr. Sit construenda parabola secundi generis seu cubici ordinis $a^2v = y^3$. Assumta igitur pro abscissa v recta determinata, nova quædam indeterminata introducatur. Fiat nempe

$$a : y = y : x$$

I. $ax = y^2$

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = y^2 : av$$

hoc est $ax : av$

seu $x : v$ (§. 124)

Quare $y : x = x : v$ (§. 167 *Arith.*)

$$x^2 = vy.$$

addatur $y^2 = ax$

erit II. $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$

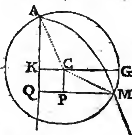
Ope igitur æquationis ad parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad infinitos circulos (quia v infinitis modis determinari potest & debet) $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$ puncta quotcunque in paraboloide cubicali inveniuntur. Est enim pro circulo vi theorematis generalis (§. 589.)

$$2n = v \qquad 2p = a$$

$$n = \tfrac{1}{2}v \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}v^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} = m$$



Quare parabola parametro a descripta, fiat portio axis AK $= \tfrac{1}{2}a$ & erecta perpendiculari indefinita KG, ex ejus puncto quocunque C per verticem A describatur circulus, erit QM semiordinata respondens abscissæ in paraboloide cubicali, quæ est ipsius KC dupla. Ut igitur plures semiordinatæ determinentur, ex quotcunque aliis

punctis rectæ KG per verticem parabolæ ducendi sunt circuli alii in punctis adhuc aliis parabolam intersecantes.

Nam si $KC = \frac{1}{2}v$ & $QM = y$; erit $AQ = y^2 : a$, $KQ = CP = AQ - AK = y^2 : a - \frac{1}{2}a$, $PM = y - \frac{1}{2}v$. Quamobrem ob $AC^2 = AK^2 + KC^2 = CM^2 = CP^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}v^2 = y^4 : a^2 - y^2 + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - vy + \frac{1}{4}v^2$, hoc est,

$$\frac{y^4 : a^2 = vy}{y^3 = a^2 v} \quad y : a^2$$

Est ergo 2KC abscissa & QM ipsi respondens semiordinata in paraboloide cubicali.

Sit construendus circulus secundi generis, ad quem est $y^3 = av^2 - v^3$. Æquatio in hanc abit analogiam:

$$v : y = y^2 : av - v^2$$

Cum in constructione v determinetur, introducatur nova indeterminata x; ponendo

$$v : y = y : x$$

erit I. $\quad vx = y^2$

Porro $\quad v : y = vx : av - v^2$

hoc est $\quad y : x = x : a - v \quad$ (§. 324)

Itaque $\quad ay - yv = x^2$

Addatur $\quad vx = y^2$

erit II. $\quad y^2 + x^2 + vy - ay - vx = 0.$

Ope itaque æquationis prioris ad infinitas parabolas & posterioris ad infinitos circulos determinantur quotcunque semiordinatæ ad abscissas quotcunque in circulo secundi generis assumptas.

Parametro nimirum v describitur parabola, in qua abscissa x, semiordinata y. Pro circulo vero est vi theorematis generalis (§. 589)

$$-\frac{2r}{q} = 0 \qquad\qquad -\frac{2n = v - a}{n = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}v}$$

hinc $r = 0$

$g = f$

$$-\frac{2pf}{q} = -v \qquad\qquad m^2 = n^2 + p^2$$

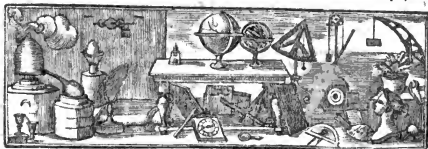
$$\frac{-2p = -v}{p = \frac{1}{2}v} \qquad\qquad \frac{m^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}av + \frac{1}{2}v^2.}{m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}av + \frac{1}{2}v^2)}}$$

Fiat itaque $AD = \frac{1}{2}v$, $DH = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}v$ & radio $AH = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}av + \frac{1}{2}v^2)}$ describatur circulus ex centro H transiens per verticem parabolæ A, erit $AP = x$ & $PM = y$.

Ipsa tamen constructio molestior est antecedente, quia continuo nova parabola describenda, ob indeterminatam parametrum v.

Finis Analyseos Finitorum.

ELE-



ELEMENTORUM ANALYSEOS MATHEMATICÆ

PARS SECUNDA

ELEMENTA ANALYSEOS INFINITORUM TRADIT.

SECTIO PRIMA

DE CALCULO DIFFERENTIALI

CAPUT PRIMUM

De natura Calculi differentialis.

DEFINITIO I.



Alculus differentialis est methodus quantitates differentiandi, hoc est inveniendi quantitatem infinite parvam, quæ infinities sumta datam adæquat.

DEFINITIO 2.

2. *Infinitesima* seu *quantitas infinite parva* est particula quantitatis adeo exigua, ut eidem incomparabilis existat, seu quæ omni assignabili minor.

COROLLARIUM I.

3. Infinitesima itaque respectu ejus quantitatis, cui incomparabilis existit, pro nihilo habenda. Si enim negligitur, error committitur omni assignabili minor, hoc est, nullus.

COROLLARIUM 2.

4. Hinc duæ quantitates infinitesima differentes æquales sunt. Cum enim infinitesima neglecta nullum producat errorem in quantitatibus (§.3);

(§. 3); una alteri substitui potest. Sunt igitur æquales (§. 15 *Arith.*).

SCHOLION.

5. *Ut natura infinitesimarum rite intelligatur, ad sequentia animum advertisse juvat. Ponamus, te dimetiri montis altitudinem; dum vero per dioptras collineas, flatu venti pulvisculum abigi: montis ergo altitudo diametro unius pulvisculi censetur imminuta. Enimvero quoniam eadem altitudo montis invenitur, sive pulvisculum illud vertici adhæreat, sive abigatur; quantitas ejus diametri in præsente negotio pro nihilo habenda, hoc est, infinite parva existit. Similiter in Astronomia diameter Telluris respectu fixarum habetur pro puncto seu infinitesima: idem enim observaretur motus primus, si Tellus esset punctum individuum. Eodem etiam modo in eclipsibus lunaribus computandis Terra pro sphæra perfecta, consequenter montium, multoque magis ædium ac turrium altitudines pro infinitesimis habentur: neque enim aliter nobis appareret umbra Telluris super disco Lunæ, si Terra sphæra perfecta esset. Idem vero in abstractis quantitatibus locum habere, jam dudum agnovere veteres, & inter eos demonstratores rigidissimi,* Euclides (a) *atque* Archimedes (b). *E. gr. si a linea data auferatur ipsius dimidium, ut habet* Euclides, *seu quod perinde est, pars alia quantacunque, & a residuo rursus ipsius dimidium aut pars alia similis primum ablatæ, atque ita porro: devenietur tandem ad aliquam quantitatem qualibet data minorem, hoc est, ad infinitesimam. Apparet ideo hinc, nomen infinitesima esse respectivum: involvit nempe relationem ad aliam quantitatem datam, cujus respectu infinitesima dicitur. E. gr. diameter Telluris in eclipsibus lunaribus est infinite magna respectu altitudinis montium; sed eadem tamen est infinite parva respectu distantiæ fixarum in ordine ad motum primum. Cavendum vero, ne cum illis, qui imaginaria cum realibus confundunt, propterea quod distincta continui ac infiniti notione destituti nescio qua phantasmata sibi fingunt, infinitesimas, & infinitesimarum infinitesimas pro entibus realibus habeat: a quo ipse calculi infinitesimalis inventor, illustris* Leibnitius, *alienus.* (c)

DEFINITIO 3.

6. Infinitesimæ dicuntur *differentialia*, item *quantitates differentiales*, si spectantur ut differentiæ duarum quantitatum. Vir summus *Nevvtonus* (quem Angli sequuntur) infinitesimas *Fluxiones* vocat, quia eas considerat veluti momentanea quantitatum incrementa, e. gr. lineæ fluxu puncti, aut superficiei fluxu lineæ, aut solidi fluxu superficiei genita.

COROLLARIUM.

7. Cum itaque tantum quantitates variabiles continuo augeantur, vel minuantur, constantibus vero nihil accedat (§. 375 *Analys. finit.*); differentiale quantitatis constantis nullum est, sed variabiles tantum aliquod admittunt.

HYPOTHESIS.

8. *Quantitatum differentialia exprimantur per eandem literam, qua variabiles denotantur, præfixa tamen litera* d. E. gr. differentiale ipsius x dicatur dx; differentiale ipsius y dicatur dy. *Est autem* dx *quantitas positiva, si* x *continuo crescit; negativa, si decrescit.*

SCHOLION.

9. *Angli cum* Newtono *pro* dx *scribunt* $\dot{x}$; *pro* dy *vero* $\dot{y}$; *sed commodior est* Leibnitiana *differentialium designatio, qua omnes reliqui utuntur, quia si differentialia denuo differentiantur, facile oritur punctorum confusio; ut taceam typothetas facilius puncta negligere, quam literam* d *omittere.*

COROLLARIUM I.

10. Quoniam quantitates constantes primis alphabeti literis indigitamus (§. 376 *Analys. finit.*); erit $da = 0$, $db = 0$, $dc = 0$ (§. 7).

COROLLARIUM 2.

11. Quare $d(x + y - a) = dx + dy$ & $d(x - y + a) = dx - dy$. Facilis ideo est differentiatio quantitatum per additionem aut subtractionem compositarum.

PROBLEMA I.

12. *Differentiare quantitates se mutuo multiplicantes.*

RESO-

(a) Element. lib. 10. prop. 1.
(b) In præfatione ad quadraturam parabolæ & in scriptis ejus omnibus.
(c) Vide acta Eruditorum An. 1712. pag. 167.

RESOLUTIO.

I. Si quantitates duæ se mutuo multiplicent, ut xy, differentiale unius factoris ducatur in factorem alterum; summa duorum factorum, quæ hac ratione prodeunt, $xdy + ydx$ erit differentiale quæsitum, hoc est, $d(xy) = xdy + ydx$.

DEMONSTRATIO.



xy repræsentat rectangulum ABDC, cujus latus unum $AC = x$, alterum $DC = y$. Si concipiamus latus utrumque augeri quantitate differentiali, nempe ut CA degeneret in $CL = x + dx$, & CD in $CE = y + dy$; rectangulum CABD abit in majus CLGE. Differentiale ideo ipsius xy est differentia inter rectangulum CABD & CLGE (§. 6). Quare $d(xy) = xy + ydx + xdy + dxdy - xy = ydx + xdy + dxdy$, nempe ALBH + DBFE + BHGF. Quodsi in rectangulo ALHB $= ydx$, $AL = dx$ sumatur pro constante; erit $HGFB = dxdy$ differentiale ejus (§. 6). Eodem modo patet, esse idem rectangulum BHGF differentiale ipsius DEFB. Quamobrem HBFG seu $dxdy$ respectu rectangulorum ALHB & DBFE, seu ydx & xdy, habetur pro nullo; consequenter differentia inter rectangula CABD & CLGE, seu differentiale ipsius xy est $ydx + xdy$. *Q. e. d.*

II. Si plures quantitates se mutuo multiplicent, e. gr. si fuerit vxy; fiat $vx = t$, erit $vxy = ty$, consequenter $d(vxy) = tdy + ydt$, *per cas.* 1. Sed $dt = vdx + xdv$, *per cas.* 1. Ergo his valoribus in differentiali antecedente $tdy + ydt$ substitutis prodit $d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$. Patet ideo factum ex binis ducendum esse in differentiale tertii.

III. Eodem modo reperitur, quid factu opus sit, si plures quantitates se mutuo multiplicent. Sit enim e. gr. quantitas differentianda $vxyz$. Fiat $vxy = t$, erit $vxyz = tz$, consequenter $d(tz) = zdt + tdz$ *per cas.* 1. Sed $dt = d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$ *per cas.* 2. Ergo $d(vxyz) = zdt + tdz = zvxdy + zvydx + zxydv + vxydz$.

IV. Quod si crescente una variabili altera y decresceret; evidens est, fore $ydx - xdy$ differentiale ipsius xy.

COROLLARIUM 1.

13. Ergo $d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$, $d(x^3) = x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3x^2dx$ &c. & in genere $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Unde patet quomodo potentiæ differentientur.

COROLLARIUM 2.

14. Cum expouentes dignitatum x^1, x^2, x^3, x^4 &c. 1, 2, 3, 4 &c. sint earundem logarithmi, posito logarithmo unitatis $= 0$ (§. 334 *Arith.*); logarithmi vero dignitatum decrescentium $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$ &c. sint -1, -2, -3, -4 &c. (§. 351 *Arith.*); erit $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ &c. & in genere $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, consequenter $d(1 : x^m) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13). Vel cum sit $1 = x^0$ (§. 55 *part.* 1.), erit $1 : x^m$

$1 : x^m = x^0 : x^m = x^{-m}$ (§. 54 *part.* 1), ideoque $d\frac{1}{x^m} = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13).

Corollarium 2.

15. Et quia $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 57 *Analys. finit.*) & $1 : \sqrt[m]{x^n} = 1 : x^{n:m} = x^{-n:m}$ (§. *cit. & prec.*); erit $d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m}x^{n:m-1}dx = \frac{n}{m}x^{(n-m):m}dx = \frac{n}{m}dx\sqrt[m]{x^{n-m}}$ & $d(1:\sqrt[m]{x^n}) = -\frac{n}{m}x^{-n:m-1}dx = -\frac{n}{m}x^{(-n-m):m}dx = -ndx : m\sqrt[m]{x^{n+m}}$.

Scholion.

16. *Quodsi cuipiam non satis manifestum videatur, quomodo corollaria duo posteriora ex priore inveniantur; is differentialia potentiarum imperfectarum alio adhuc modo investigare potest, quem in sequente problemate exponimus, inprimis cum ejusdem methodi usus esse possit, quoties in formulis compositis differentiandis aqua haret.*

Problema 2.

17. *Differentiare* $1 : x^m$, *item* $\sqrt[m]{x^n}$ & $1 : \sqrt[m]{x^n}$.

Resolutio.

I. Fiat $1 : x^m = v$

erit $1 = x^m v$

(§. 10. 12) $0 = mx^{m-1}vdx + x^m dv$

$-mx^{m-1}vdx = x^m dv$

$-\frac{mx^{m-1}vdx}{x^m} = dv$

$-\frac{mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = dv$ (§. 42. 54 *part.* 1.)

h. e. $-mx^{-m-1}dx = dv$ (§. 54 *part.* 1.)

II. Fiat $\sqrt[m]{x^n} = y$

erit $x^n = y^m$

$nx^{n-1}dx = my^{m-1}dy$ (§. 13)

hoc est, $nx^{n-1}dx = \frac{my^m dy}{y}$ (§. 54 *part.* 1) $\quad my^m : y$

$\frac{nyx^{n-1}}{my^m}dx = dy$

(a) seu $\frac{nx^{n:m}x^{n-1}}{mx^n}dx = dy$

$\frac{nx^{n:m}}{m}x^{-1}dx = dy$ (§. 54 *part.* 1)

h. e. $\frac{n}{m}x^{(n-m):m}dx = dy$

III. Fiat denique $1 : \sqrt[m]{x^n} = z$

erit $1 = z\sqrt[m]{x^n} = zx^{n:m}$

$0 = \frac{n}{m}x^{(n-m):m}zdx + x^{n:m}dz$ (n. II. & §. 12)

$-\frac{n}{m}x^{(n-m):m}zdx = x^{n:m}dz$

$-\frac{nx^{(n-m):m}dx}{mx^{n:m}} = x^{n:m}dz$

$-\frac{nx^{(n-m):m}dx}{mx^{2n:m}} = dz$ (§. 42. 54 *part.* 1)

$-\frac{n}{m}x^{(-n-m):m}dx = dz$ (§. 54 *part.* 1)

h. e. $-\frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}} = dz$ (§. 14).

En in omnibus casibus easdem formulas, quas superius elicuimus (§. 14. 15).

Scholion.

18. *Me non monente clarum esse arbitror, formulas in problemate repertas subire vicem regularum, juxta quas in casibus similibus instituitur differentiatio.*

Problema 3.

19. *Differentiare quantitates se mutuo dividentes* $x : y$.

Reso-

(a) Hæc expressio ex præcedente emascitur, in ejusdem numeratore substituendo $x^{n:m}$ pro y, & in denominatore x^n pro y^m.

RESOLUTIO.

I. Sit $x : y = v$

erit $x = vy$

$dx = vdy + ydv$ (§. 12)

$dx - vdy = ydv$

h. e. $dx - \frac{xdy}{y} = ydv$ $\quad : y$

$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = dv$

seu $(ydx - xdy) : y^2 = dv$

Regula 1. Differentiale divisoris ducatur in dividendum & contra differentiale dividendi in divisorem. 2. Factum prius ex posteriore auferatur. 3. Residuum per quadratum divisoris dividatur. Quotus est differentiale quantitatum se mutuo dividentium.

II. Si fuerit $xy : vz$ differentianda: ponatur $xy = t$ & $vz = r$; erit $xy : vz = t : r$. Sed $d(t : r) = (rdt - tdr) : r^2$ *per cas.* 1, & $dt = xdy + ydx$, $dr = vdz + zdv$ (§. 12). Ergo $d(t : r) = d(xy : vz) = (vzxdy + vzydx - xyvdz - xyzdv) : v^2z^2$. Patet ideo, regulam præcedentem huic quoque casui satisfacere.

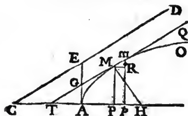
CAPUT II.

De usu Calculi differentialis in tangentibus curvarum determinandis.

PROBLEMA 4.

20. *Invenire subtangentem in curva Algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.



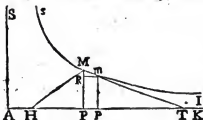
Sit semiordinata pm alteri PM infinite propinqua, erit Pp differentiale abscissæ, & demissa perpendiculari $MR = Pp$ (§. 226 *Geom.*), Rm differentiale semiordinatæ. Ducatur tangens TM: arculus infinite exiguus Mm non differet a linea recta, ideoque MmR triangulum rectilineum rectangulum: quod *Triangulum curvæ characteristicum* appellari solet, quia lineæ curvæ per illud a se invicem distinguuntur. Ob parallelismum rectarum PM & pm (§. 370 *part.* 1) angulus $MmR = TMP$ (§. 233 *Geom.*). Quare $\triangle MmR \sim \triangle TMP$ (§. 267 *Geom.*). Sit itaque $AP = x$, $PM = y$; erit $Pp = MR = dx$ & $Rm = dy$ (§. 8), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$Rm : MR = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Quodsi ex æquatione curvæ cujuscunque data in expressione subtangentis PT generali $ydx : dy$ valor ipsius dx substituatur: quantitates differentiales evanescunt, proditque valor subtangentis in quantitatibus communibus.

Idem



Idem valor eruitur, si convexitas curvæ refertur ad axem AT.

COROLLARIUM 1.

21. Pro parabola Apolloniana est:

$$ax = y^2 \quad (\S.\ 388\ part.\ 1)$$

Hinc $adx = 2ydy$ $\quad (\S.\ 12.\ 13)$

$$dx = 2ydy : a$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$, prorsus ut supra (§. 410 *part.* 1).

COROLLARIUM 2.

22. Pro infinitis parabolis est (§. 519 *part.* 1)

$$a^{m-1} x = y^m$$

$$a^{m-1} dx = my^{m-1} dy \quad (\S.\ 12.\ 13.)$$

$$dx = my^{m-1} dy : a^{m-1}$$

$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1} dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1} x : a^{m-1} = mx$.

E. gr. Cum in paraboloide cubicali $m = 3$; erit subtangens $= 3x$: cum in surdesolidali $m = 5$; erit subtangens $= 5x$.

COROLLARIUM 3.

23. Pro circulo est (§. 377 *part.* 1)

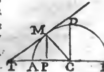
$$ax - x^2 = y^2$$

$$adx - 2xdx = 2ydy \quad (\S.\ 12.\ 13)$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : (a - 2x) dy = 2y^2 : (a - 2x) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x) = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x)$, hoc est, $PC : PB = AP : PT$, consequenter $PC \cdot PT = AP \cdot PB$ (§ 378 *Geom.*) ($= PM^2$ (§ 377 *part.* 1)

Ergo $AT = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - x^2 - \frac{1}{2}ax + x^2) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$, hoc est, $PC : PA = CA : AT$.



COROLLARIUM 4.

24. Pro infinitis circulis est (§. 517 *part.* 1)

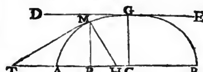
$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

$$max^{m-1} dx - (m-1) x^m dx = (m+1) y^m dy$$

$$dx = \frac{(m+1) y^m dy}{max^{m-1} - (m-1) x^m}$$

$PT = ydx : dy = (m+1) y^{m+1} : (max^{m-1} - (m-1) x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : max^{m-1} - (m-1) x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$ & $AT = (m+1)(ax - x^2) : ma - (m-1) x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m-1) x) = ax : (ma - (m-1) x)$. Cum itaque in circulo secundi generis $m = 2$; erit $AT = ax : (2a - 3x)$ & $PT = (3ax - 3x^2) : 2a - 3x)$.

COROLLARIUU 5.



25. Pro ellipsi Apolloniana est (§. 420 *part.* 1)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

Hinc $2aydy = abdx - 2bxdx$

$$2aydy : (ab - 2bx) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$, prorsus ut supra (§. 440 *part.* 1).

COROLLARIUM 6.

26. Pro infinitis ellipsibus est (§. 522 *part.* 1)

$$ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$$

$$(m+n) ay^{m+o-1} dy = mbx^{m-1} (a - x)^n dx - nbx^m (a - x)^{o-1} dx$$

$$\frac{(m+n) ay^{m+n-1} dy}{mbx^{m-1} (a - x)^n - nbx^m (a - x)^{n-1}} = dx$$

$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n) ay^{m+n}}{mbx^{m-1} (a - x)^n - nbx^m (a - x)^{n-1}} = (m+n) bx^m (a - x)^n : (mbx^{m-1} (a - x)^n - nbx^m (a - x)^{n-1}) =$ (divisione per $bx^{m-1} (a - x)^{n-1}$ facta) $(m+n)(ax - x^2) : (ma - mx - nx)$, & hinc

$AT = (max - mx^2 + nax - nx^2) : (ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - (m - n) x)$.

Cum

Cum ideo in elliptoide cubicali sit $m = 2$, $n = 1$; erit PT $= (3ax - 3x^2):(2a - 3x)$, & AT $= ax:(2a - 3x)$.

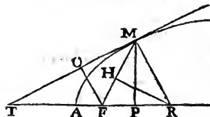
COROLLARIUM 7.

27. Pro hyperbola Apolloniana est (§. 459 *part.* 1)

$$ay^2 = abx + bx^2$$
$$2aydy = abdx + 2bxdx$$
$$2aydy:(ab + 2bx) = dx$$

PT $= ydx:dy = 2ay^2:(ab + 2bx) = (2abx + 2bx^2):(ab + 2bx) = (2ax + 2x^2):(a + 2x)$ prorsus ut supra (§. 491 *part.* 1).

COROLLARIUM 8.



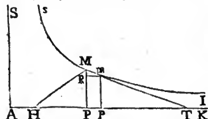
28. Pro infinitis hyperbolis cum sit $ay^{m+n} = bx^m(a + x)^n$ (§. 525 *part.* 1): reperietur ut ante pro infinitis ellipsibus (§. 26), PT $= (m + n)(ax + x^2):(ma + (m + n)x)$ & AT $= nax:(ma + (m + n)x)$.

COROLLARIMM 9.

29. Pro hyperbola intra asymptotos est (§. 502 *part.* 1)

$$xy = a^2$$
$$xdy + ydx = 0 \quad (\text{§. } 12, 10)$$
$$ydx = -xdy$$

PT $= ydx:dy = -xdy:dy = -x$



Quoniam valor subtangentis est negativus, id indicio est, subtangentem PT esse sumendam in oppositum originis abscissæ AP. Differentiale enim ipsius xy esse debebat $ydx - xdy$, quia y decrescit (§. 12).

COROLLARIUM 10.

30. Pro infinitis hyperbolis intra asymptotos est.

$$a^{m+n} = x^n y^m$$
$$0 = nx^{n-1}y^m dx + mx^n y^{m-1} dy \quad (\text{§. } 10. 12, 13)$$
$$-mx^n y^{m-1} dy = nx^{n-1} y^m dx$$
$$-mxdy:ny = dx$$

PT $= ydx:dy = -mxydy:nydy = -\frac{mx}{n}$

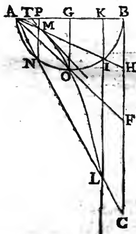
COROLLARIUM 11.

31. Pro Cissoide *Dioclis* est (§. 548 *part.* 1)

$$y^2 = x^3:(a - x)$$
$$2ydy = (3ax^2dx - 3x^3dx + x^3dx):(a - x)^2 \quad (\text{§. } 13. 10)$$

$2y(a - x)^2dy:(3ax^2 - 2x^3) = dx$

PT $= ydx:dy = 2y^2(a - x)^2:(3ax^2 - 2x^3) = 2x^3(a - x):(3ax^2 - 2x^3) = 2(ax - x^2):(3a - 2x)$.



Habemus itaque

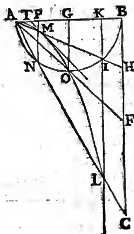
$3a - 2x : a - x = 2x : \text{PT}$

sive $\frac{3}{2}a - x : a - x = x : \text{PT}$

h.e. PB + GB : PB = AP : PT

COROLLARIUM 12.

32. Denique pro omnibus curvis algebraicis est (§. 385 *part.* 1)



$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$$

$$may^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx + rcy^{r-1}x^s dy = 0$$

$$nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx = -may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy$$

$$dx = -\frac{may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = -\frac{may^m - rcy^r x^s}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

Sit e. gr. $y^2 - ax = 0$, erit comparatione cum formula generali facta

$ay^m = y^2$ | $bx^n = -ax$

$a = 1 \quad m = 2$ | $b = -a \quad n = 1$

$cy^r x^s = 0$ | $f = 0.$

$c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$

His valoribus in formula subtangentis generalissima substitutis prodit subtangens parabolæ primi generis $(-2.1.y^2 - 0.0y^0x^0) : (1.-ax^{1-1} + 0.0y^0x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2y^2 : a$, ut supra (§.21).

Similiter sit pro circulo $y^2 - ax + x^2 = 0$; erit

$ay^m = y^2$ | $bx^n = -ax$

$a = 1 \quad m = 2$ | $b = -a \quad n = 1$

$bx^n = x^2$ | $cy^r x^s = 0$

$b = 1 \quad n = 2$ | $c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$

$$PT = \frac{-2.1.y^2}{1.-ax^0 + 2.1x} = \frac{-2y^2}{-a + 2x} = \frac{2y^2}{a - 2x}$$

ut supra (§.23).

Sit $y^3 - x^3 - axy = 0$, erit

$ay^m = y^3$ | $bx^n = -x^3$

$a = 1 \quad m = 3$ | $b = -1 \quad n = 3$

$cy^r x^s = -axy$ | $f = 0$

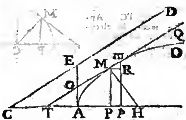
$c = -a \quad r = 1 \quad s = 1$

His valoribus in formula subtangentis generali substitutis, prodit subtangens curvæ, ad quam est æquatio data, $PT = (-3.1y^3 - 1.-ayx) : (3.-1x^2 + 1.-ayx^0) = (-3y^3 + ayx) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay)$, consequenter $AT = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay)$, substituto nempe ex æquatione ad curvam ipsius $y^3 - x^3$ valore, hoc est, $axy : (3x^2 + ay)$.

SCHOLION.

33. *In applicatione formulæ generalis* bx^n *&* $cy^r x^s$ *totidem terminis sigillatim comparantur, quot in dato casu speciali eidem respondent, singulique valores simul in formula subtangentis substituuntur, propterea quod* bx^n *repræsentat omnes terminos, in quibus sola indeterminata* x *occurrit, &* $cy^r x^s$ *omnes terminos, in quibus utraque indeterminata* x *&* y *locum habet* (§. 385 part. 1.).

COROLLARIUM 13.



34. Quia $PT = ydx : dy$, $PM = y$; erit (§.412 Geom.) $TM = \sqrt{(y^2dx^2 : dy^2 + y^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy$.

PROBLEMA 5.

35. *Determinare subnormalem (Vid. Fig. præced.)* PH *in linea algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Sit $PM = y$, $AP = x$, erit $TP = ydx : dy$ (§. 20), & $PT : PM = PM : PH$ (§. 409 *part.* 1), hoc est, $\frac{ydx}{dy} : y = y : \frac{ydy}{dx}$.

Quodsi

Quodsi ut in problemate praecedente, in expressione subnormalis PH generali valor ipsius dy substituatur; differentiales quantitates evanescunt & valor subnormalis in quantitatibus ordinariis prodit.

COROLLARIUM 1.

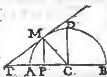
36. In parabola *Apolloniana* $dy = adx : 2y$, (§. 21). Ergo PH $= ydy : dx = aydx : 2ydx = \frac{1}{2}a$, ut supra reperimus (§. 410 *part.* 1).

COROLLARIUM 2.

37. In infinitis parabolis $dy = a^{m-1}dx : my^{m-1}$ (§. 22). Itaque PH $= ydy : dx = a^{m-1}y : my^{m-1} = a^{m-1}y^2 : my^m$ (§. 54 *part.* 1) $= a^{m-1}y^2 : ma^{m-1}x$ (§. 519 *part.* 1) $= y^2 : mx$, ut, ideo sit $mx : y = y : PH$.

COROLLARIUM 3.

38. In circulo $adx - 2xdx = 2ydy$ (§. 23), hoc est, $\frac{1}{2}a - x = ydy : dx =$ PC. Apparet ideo, in circulo omnes ad peripheriam normales in centro concurrere, consequenter tangentem TM radio CM ad angulos rectos insistere.



COROLLARIUM 4.

39. In infinitis circulis $(max^{m-1}dx - (m-1)x^m dx) : (m+1)y^m = dy$ (§. 24). Unde subnormalis PH $= ydy : dx = (max^{m-1}y - (m-1)x^m y) : (m+1)y^m = (max^{m-1}y^2 - (m-1)x^m y^2) : (m+1)y^{m+1} = (max^{m-1}y^2 - (m-1)x^m y^2) : (m+1)(ax^m - x^{m+1})$ (§. 517 *part.* 1) $= (may^2 - (m-1)xy^2) : (m+1)(ax - x^2)$.

Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+1}a - x : PH$.

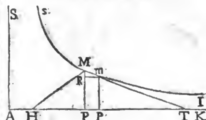
COROLLARIUM 5.

40. In infinitis ellipsibus $dy = (mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx) : (m+n)ay^{m+n-1}$ (§. 26). Unde (*Vid. Fig.* §. 34.) PH $= ydy : dx = (mbx^{m-1}(a-x)^n y - nbx^m(a-x)^{n-1}y) : (m+n)ay^{m+n-1} = (mbx^{m-1}(a-x)^n y^2 - nbx^m(a-x)^{n-1}y^2) : (m+n)ay^{m+n}$ sive $: (m+n)bx^m(a-x)^n$ (§. 522 *part.* 1) $= (my^2(a-x) - nxy^2) : (m+n)(ax - x^2)$. Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+n}a - x : PH$.

COROLLARIUM 6.

41. Eodem modo (§. 28) pro infinitis hyperbolis reperitur PH $= (my^2(a+x) + nxy^2) : (m+n)(ax + x^2)$, ac proinde $ax + x^2 : y^2 = \frac{m}{m+n}a + x : PH$.

COROLLARIUM 7.



42. Pro hyperbola intra asymptotos (§. 29) $dy = -ydx : x$. Unde PH $= ydy : dx = -y^2 : x$. Valor negativus indicio est, subnormalem PH cadere versus sinistram. Quia $xy = a^2$ (§. 502 *part.* 1), ideoque $y = a^2 : x$ & $y^2 = a^4 : x^2$; erit PH $= a^2y : x^2$ vel $a^4 : x^3$, consequenter $x^2 : a^2 = y : PH$, & $x^3 : a^3 = a : PH$, hoc est, semiordinata habet ad subnormalam rationem duplicatam, & latus potentiae hyperbolae rationem triplicatam abscissae ad latus potentiae hyperbolae.

COROLLARIUM 8.

43. In Cissoide *Dioclis* $2ydy = (3ax^2dx - 2x^3dx) : (a-x)^2$ (§. 31). Igitur subnormalis $ydy : dx = (3ax^2 - 2x^3) : 2(a-x)^2$. Est ideo $(a-x)^2 : x^2 = \frac{3}{2}a - x : PH$.

COROLLARIUM 9.

44. Quia (*Vid. Fig.* §. 34) PH $= ydy : dx$ (§. 35) & PM $= y$; erit MH $= \sqrt{(y^2dy^2 : dx^2 + y^2)} = y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx$.

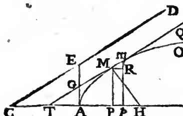
SCHOLION.

45. *Equidem data per problema praecedens subtangente subnormalis reperitur facillime absque calculo differentiali* (§. 409 *part.* 1): *quoniam tamen subinde subnormalis inveniri debet data tantummodo aequatione ad curvam, ideo in problemate praesente docendum erat, quomodo independenter a subtangente ex aequatione eruenda.*

PROBLEMA 6.

46. *Determinare curvarum algebraicarum asymptotos.*

RESOLUTIO.



1. Quoniam asymptotus CD cum curva non concurrit, nisi intervallo infinito emenso; haberi potest pro tangente in puncto, cui abscissa infinita respondet. Quantitates ergo constantes respectu variabilium x & y sunt infinitae parvae (§. 2). Quamobrem si ex valore ipsius AT abjiciantur, quae in nullam variabilem ducuntur; prodibit valor ipsius AC, per quem punctum C determinatur, ex quo asymptotus CD ducitur.
2. Quodsi idem fiat in aequatione pro curva, & facta differentiatione inveniatur ratio $dx : dy$; haud difficulter quoque eruitur valor ipsius AE: est enim in illo casu △ MRm ∽ △ CEA. Quod ut clarius intelligatur, ponamus abscissam AP esse infinitam, ideoque TM asymptotum; evidens est △ MmR ∽ △ TPM (§. 20). Sed △ TPM ∽ △ TAG (§. 268 *Geom.*). Ergo △ TAG ∽ △ MmR, consequenter MR : mR = TA : AG (§. 267 *Geom.*). Surrogetur jam in locum △ TAG alterum CAE; erit MR : mR = CA : AE, hoc est, $dx : dy$ = CA : AE.

COROLLARIUM I.

47. In hyperbola Apolloniana AT $= ax : (a + 2x)$ (§. 491 *part.* 1). Ergo AT $= ax : 2x = \frac{1}{2}a$ = AC prorsus ut supra habetur (§. 474 *part.* 1). Porro ad hyperbolam Apollonianam

$$ay^2 = bx(a + x) \quad (§. 459\ part.\ 1)$$

hoc est in nostro casu ob a infinitesimam

$$ay^2 = bx^2$$

consequenter $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

ideoque ob $dx : dy$ = CA : AE (§. 46)

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

Unde habetur AE $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b} : \sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$ denuo ut supra (§. 474. 461 *part.* 1).

Idem etiam adhuc aliter invenitur. In casu infiniti seu asymptotico TP = CP $= \frac{1}{2}a + x = x$, ob $\frac{1}{2}a = 0$; quia $x = \infty$. Porro ob similitudinem △△ TPM & CAE est

$$\text{CP} : \text{PM} = \text{CA} : \text{AE}$$

$$x : \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a :$$

$$1 : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a :$$

$$\text{AE} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

COROLLARIUM 2.

48. Pro infinitis hyperbolis est AT $= nax : (ma + mx + nx)$ (§. 28), ideoque in casu asymptotico, in quo $x = \infty$, AC $= nax : (mx + nx) = na : (m + n)$ (§. 46). Quoniam porro (§. 525 *part.* 1)

$$ay^{m+n} = bx^m(a + x)^n$$

erit $ay^{m+n} = bx^{m+n}$ (§. 46)

hoc est, si fiat brevitatis gratia $m + n = r$,

$$ay^r = bx^r$$

$$ya^{1:r} = xb^{1:r}$$

$$dya^{1:r} = dxb^{1:r}$$

$$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = \text{AC} : \text{AE}$$

Unde ob AC $= na : r$; reperitur AE $= \frac{na\sqrt[r]{b}}{r\sqrt[r]{a}}$

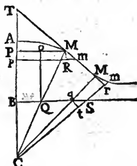
$$= \frac{n\sqrt[r]{a^{r-1}b}}{r}.$$

PROBLEMA 7.

49. *Determinare subtangentem & subnormalem in Conchoide.*

Quoniam Conchois est curva algebraica (§. 377. 538 *part.* 1); subtangens

gens ejus inveniri poteſt *per probl.* 4 & ſubnormalis *per probl.* 5 (§. 20 & 35). Enimvero quia ob æquationem ejus admodum prolixam expreſſio utraque non ſatis concinna prodit; ideo conſultius judicamus alia methodo utramque inveſtigari, qua & in caſibus aliis ſimilibus commode utendum.



Sit nempe AP $= x$, PM $= y$. Intelligatur *pm* ipſi PM infinite propinqua: erit P*p* $=$ MR $= dx$, & R*m* $= dy$, unde PT $= ydx : dy$, ut ſupra (§. 20). Sit porro AB $=$ QM (§. 535 *part.* 1) $= a$, CM $= z$, BC $= b$; erit PB $= a - x$, PC $= a + b - x$. Ut valor ipſius dx ex natura curvæ inveniatur; fiat,

$$a - x = v \qquad a + b - x = t$$

$$\text{erit } -dx = dv \qquad -dx = dt$$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$$PB : MQ = PC : MC$$

$$v : a = t : z$$

$$at = zv$$

$$adt = zdv + vdz$$

Denique (§. 417 *Geom.*) CM^2 $=$ PC^2 $+$ PM^2, hoc eſt,

$$z^2 = t^2 + y^2$$

$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$

$$zdz = tdt + ydy$$

Subſtituantur ex æquationibus duabus prioribus valores ipſorum differentialium dt & dv in duabus poſterioribus: prodibit

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$

$$zdx - adx = vdz \qquad dz = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

$$\frac{zdx - adx}{v} = dz$$

Quamobrem (§. 87 *Arith.*)

$$\frac{zdx - adx}{v} = - \frac{tdx + ydy}{z}$$

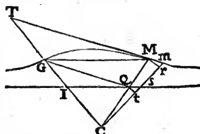
$$z^2dx - azdx = -vtdx + vydy$$

$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$

$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

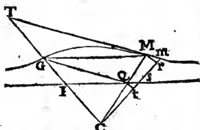
Hinc PT $= ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt) = v(z^2 - t^2) : (z^2 - az + tv)$ ob $y^2 = z^2 - t^2$, & ſubnormalis $ydy : dx$ habetur $= (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$.

Aliter.



Sit TC, ſecans regulam in I, perpendicularis ad MC, & *m*C ipſi CM infinite propinqua. TM tangat Conchoidem in M. Radio CQ deſcribatur arcus Q*t* & radio CM arcus M*r*. Sit

QM



$QM = a$, $CQ = x$, $CM = y$; erit $tS = dx$, $mr = dy$. Quoniam in $\triangle QtS$ angulus t rectus est (§. 38) & QCI itidem rectus (§. 78 *Geom.*) & ob angulum infinite parvum $QCS = 0$ (§. 3), angulus $IQC = QSt$ (§. 239 *Geom.*), erit $\triangle QtS \backsim \triangle QIC$ (§. 267 *Geom.*), ideoque

$$CQ : CI = tS : Qt$$
$$x : b = dx : \frac{bdx}{x}$$

Quoniam Qt & Mr sunt arcus concentrici intra crura ejusdem anguli descripti, erit (§. 138. 412 *Geom.*),

$$CQ : Qt = CM : Mr$$
$$x : \frac{bdx}{x} = y : \frac{bydx}{x^2}$$

Denique cum eodem, quo supra, modo ostendatur, esse $\triangle Mrm \backsim \triangle MCT$, erit

$$mr : Mr = MC : CT$$
$$dy : \frac{bydx}{x^2} = y : \frac{by^2dx}{x^2dy}$$

Ex natura Conchoidis (§. 535 *part.* I)

$$y = x + a$$

ideoque $dy = dx$

Ergo $CT = \frac{by^2dx}{x^2dy} = \frac{by^2}{x^2}$

Ducatur itaque GM parallela regulæ IQ; erit (§. 268 *Geom.*)

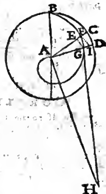
$$CQ : CM = CI : CG$$
$$x : y = b : \frac{by}{x}.$$

Quare si porro TM ducatur parallela ipsi GQ, erit (§. *cit.*)

$$CQ : CG = CM : CT$$
$$x : \frac{by}{x} = y : \frac{by^2}{x^2}$$

ideoque CT subtangens, consequenter TM tangens quæsita.

P R O B L E M A. 8.



50. *Determinare subtangentem in Spirali Archimedea & infinitis spiralibus aliis.*

Sit semidiameter circuli $AB = a$, peripheria $= b$, arcus $BD = x$, $AG = y$. Intelligatur radius AC alteri AD infinite propinquus, & ducatur radio AG arculus EG, erit $CD = dx$ & $EF = dy$ & (§. 138. 412 *Geom.*)

$$AD : AG = DC : GE$$
$$a : y = dx : \frac{ydx}{a}$$

Quoniam EG ad AE perpendicularis (§. 38); ducatur HA ad AC normalis; quæ est subtangens spiralis: erit EG parallela ipsi AH (§. 256 *Geom.*), ideoque cum sit $FA = AE$ sive AG ob infinite parvam EF (§. 268 *Geom.*)

FE:

$$FE:EG = FA:AH$$
$$dy : \frac{ydx}{a} = y : \frac{y^2dx}{ady}$$

Jam pro ſpirali Archimedea (§. 571 *part.* 1)

$$ax = by$$
$$adx = bdy$$

Hinc ſubtangens $AH = \frac{y^2dx}{ady} = by^2 : a^2 = xy : a$.

Pendet ideo determinatio ſubtangentis a quadratura circuli, cum pro arcu x aſſumenda ſit recta.

Pro infinitis ſpiralibus eſt (§. 572 *part.* 1)

$$a^m x^n = b^n y^m$$
$$na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$$
$$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$$
$$AH = y^2dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1}$$
$$= ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$$

COROLLARIUM.

51. Quodſi ponamus arcum BC eſſe ad FC ut eſt abſciſſa curvæ algebraicæ ad ſemiordinatam; erit $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, & (ducto radio AG arculo GE, & radio AF arculo FI) $GI = FE = dy$, atque (§. 138. 412 *Geom.*) ob $AG = AF$ (§. 4)

$$AC : CD = AG : EG$$
$$a : dx = a-y : \frac{adx-ydx}{a}$$
$$FE : EG = FA : AH$$
$$dy : \frac{adx-ydx}{a} = a-y : \frac{(a-y)^2dx}{ady}$$

Quodſi ergo ex æquatione curvæ algebraicæ, quæ exprimit relationem BC ad FC, ſubſtituatur in expreſſione ſubtangentis AH valor ipſius dx, prodibit ſubtangens quæſita. Sit e. gr. relatio arcus BC ad rectam FC contenta in æquatione

$$bx = y^2$$
erit $$bdx = 2ydy$$
unde $AH = (a-y)^2dx : ady = 2y(a-y)^2 : ab$.

PROBLEMA 9.

52. *Determinare ſubtangentem* (*Vid. Fig. ſeq.*) PT *in Cycloide.*

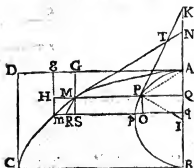
Sit APB circulus genitor cycloidis AMC, KP tangens circuli. Ducatur TM, quæ cycloidem in M tangat; erit TP ſubtangens. Rectæ QM per utrumque contactus punctum P & M tranſeunti intelligatur ipſa *qm* parallela & infinite propinqua; demittantur perpendiculares PO & MS: agatur denique MR ipſi PT parallela. Erit $MS = PO$ (§. 226 *Geom.*) & $MR = Pp$, quia arculus Pp infinite exiguus, habetur pro parte rectæ pT (§. 257 *Geom.*). Sit jam $AP = x$, $PM = y$; erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$. Ob parallelas MP & *mR per conſtruct.* angulus $MmR = TMP$, & ob parallelas MR & TP *itidem per conſtr.* $mRM = mpT = MPT$ (§. 233 *Geom.*), conſequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : RM = MP : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Eſt vero in cycloide $y = x$ (§. 575 *part.* 1), conſequenter $dy = dx$, & hinc $ydx : dy$ ſeu $PT = y$. Ducta igitur recta PT, quæ circulum tangit in P, facillime quoque ducitur TM, quæ cycloidem in puncto reſpondente M tangit.

COROL-

COROLLARIUM.



53. Si APB fuerit linea algebraica alia, cujus areus AP sint abscissæ transcendentis AMC; eodem modo determinatur subtangens, cum in omni casu reperiatur $PT = ydx : dy$. Ponamus e. gr.

$$bx = ay$$
erit
$$bdx = ady$$
$$dx = ady : b$$
$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

PROBLEMA 10.

54. *Determinare subtangentem* PT *in Logistica.*

Sit $AP = x$, $PM = y$, pm ipsi PM parallela & infinite propinqua; erit $MR = Pp = dx$ & $Rm = dy$ & vi eorum, quæ in problemate 4 (§. 20) demonstrata sunt.

$$mR : RM = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Sit abscissa alia ipsa AP major vel minor $= v$, & semiordinata eidem respondens $= z$; erit subtangens $= zdv : dz$. Quoniam ex natura Logisticæ abscissæ in progressione arithmetica progrediuntur (§. 552 *part.* 1) erit $dx = dv$. Quoniam vero semiordinatæ progrediuntur in geometrica (§. *cit.*), erit

$$y : y + dy = z : z + dz$$
$$y : dy = z : dz \quad (\text{§. 193 } Arith.)$$
$$dx = dv$$
$$ydx : dy = zdv : dz$$

Theorema. In Logistica omnes subtangentes sunt inter se æquales, seu subtangens PT est constans.

PROBLEMA 11.

55. *Determinare subtangentem* MH *in quadratrice Dinostratis.*

Per punctum datum M ducatur radius CN, sitque TM tangens, MK ad CM & TK ad MK perpendicularis, Cn ipsi CN & pm ipsi PM infinite propinqua, $AP = y$, $AN = x$, $CM = p$, $ANB = a$, $AC = b$; erit $ML = b - y$, $Pp = MR = dy$, $Nn = dx$. Quoniam arcus infinite parvus radio CM descriptus coincidit cum recta MH, erit (§. 138. 412 *Geom.*)

$$CN : Nn = CM : MH$$
$$b : dx = p : \frac{pdx}{b}$$

Porro cum TK (*per hypoth.*) & CH (§. 38) sint ad MK perpendiculares; erit mH ipsi KT parallela (§. 256 *Geom.*), ideoque (§. 268 *Geom.*)

$$Mm : MT = MH : MK$$

Similiter mR & TL, quia ad ML perpendiculares (*per hypoth.*), inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), ideoque (§. 268 *Geom.*)

Mm:

$Mm : MT = MR : ML$

consequenter (§. 167 *Arith.*)

$MR : ML = MH : MK$

$dy : b - y = \frac{pdx}{b} : \frac{pdx}{dy} - \frac{pydx}{bdy}$

Est vero ex natura quadratricis (§. 565 *part.* 1)

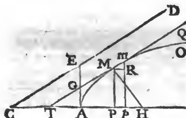
$bx = ay$

$bx : a = y$

Item, $dx = ady : b$

Substitutis ergo in valore ipsius MK pro dx & y valoribus modo inventis, prodit $MK = \frac{ap}{b} - \frac{abpx}{ab^2} = ap - px) : b = (a - x)p : b = NB . MC : AC$. Est vero NB arcus radio NC descriptus, ideoque constructio a rectificatione arcus illius, seu a quadratura circuli pendet.

PROBLEMA 12.



56. *Intra angulum* QTH *describere curvam desideratam algebraicam, quæ rectam* TQ *in dato puncto* M *tangat.*

ROSOLUTIO.

Demittatur ex M ad TH perpendicularis PM; erit TP subtangens, PM semiordinata curvæ quæsitæ. Sit $TP = v$, $PM = y$, $AP = x$; erit (§. 20)

$TP : PM = MR : mR$

$v : y = dx : dy$

$vdy = ydx$

Quare si ex æquatione curvæ determinatur valor ipsius dx vel dy & in æquatione modo inventa substituatur; per communes Algebræ regulas determinantur tum abscissa x semiordinatæ PM datæ respondens, ut habeatur vertex curvæ A; tum lineæ rectæ, quibus datis curva datur. Quodsi vero contingat, aliquas ex his determinari non posse; id quidem indicio est, eam variis modis assumi posse, ideoque plures curvas ejusdem speciei satisfacere proposito.

COROLLARIUM 1.

57. Si curva AMO parabola primi generis esse debet; erit (§. 388 *part.* 1)

$ax = y^2$

$adx = 2ydy$

$dx = 2ydy : a$

Quodsi hic valor in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur: habebimus

$vdy = 2y^2 dy : a$

$av = 2y^2$ seu $a = 2y^2 : v$

Porro ex æquatione ad parabolam $a = y^2 : x$. Quare

$2y^2 : v = y^2 : x$ | y^2

$2 : v = 1 : x$

$2x = v$

$x = \frac{1}{2}v$

Divisa nempe TP bifariam in A, habetur vertex parabolæ A, ut jam ex superioribus (§. 21) constat. Parametro itaque $2y^2 : v$ circa axem AH parabola describenda (§. 401 *part.* 1).

COROLLARIUM 2.

58. Si curva AMO hyperbola æquilatera; erit (§. 507 *part.* 1)

$ax + x^2 = y^2$

$adx + 2xdx = 2ydy$

$dx = 2ydy : (a + 2x)$

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur valor modo inventus, prodibit

$$vdy = 2y^2dy : (a + 2x)$$
$$av + 2vx = 2y^2$$
$$av = 2y^2 - 2vx$$
$$a = 2y^2 : v - 2x$$

hoc est, si fiat $y^2 : v = m$

$$a = 2m - 2x$$

Porro ex æquatione ad hyperbolam æquilateram

$$ax + x^2 = y^2$$
$$a = y^2 : x - x$$

Unde $y^2 : x - x = 2m - 2x$ | x

$$y^2 - x^2 = 2mx - 2x^2$$
$$y^2 = 2mx - x^2$$

seu $x^2 - 2mx = -y^2$

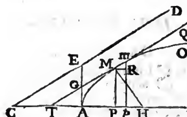
$$m^2 \qquad m^2$$
$$x^2 - 2mx + m^2 = m^2 - y^2$$
$$\left.\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(m^2 - y^2)}$$
$$x = m \pm \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

Dato itaque valore ipsius x, datur vertex hyperbolæ æquilateræ, datur etiam parameter $a = 2m - 2x$, consequenter hyperbola describi potest (§. 472 *part.* 1).

COROLLARIUM 3.

59. Quoniam pro circulo $ax - x^2 = y^2$ (§. 377 *part.* 1), eodem, quo ante, modo reperitur $a = 2y^2 : v + 2x$ seu, si fiat $y^2 : v = m$, $a = 2m + 2x$, & $x = \sqrt{(m^2 + y^2)} - m$.

COROLLARIUM 4.



60. Si curva AMO ellipsis primi generis; erit (§. 421 *part.* 1)

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$
$$2ydy = bdx - 2bxdx : a$$
$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2ay$$

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ substituatur valor modo inventus, prodibit

$$abv - 2bvx = 2ay^2$$
$$b = 2ay^2 : (av - 2vx)$$

Ex natura curvæ est

$$b = ay^2 : (ax - x^2)$$

Unde $\dfrac{2ay^2}{av - 2vx} = \dfrac{ay^2}{ax - x^2}$

$$2ax - 2x^2 = av - 2vx$$
$$-\tfrac{1}{2}av = x^2 - ax - vx$$

Si fiat $a + v = 2m$

erit $m^2 - \tfrac{1}{2}av = x^2 - 2mx + m^2$

$$\sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = \left\{\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right.$$
$$m \pm \sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = x$$

Quoniam ipsius a seu axis transversi nullus valor erui potest; pro arbitrio assumi debet.



CAPUT

CAPUT III.

De Usu Calculi differentialis in Methodo de maximis & minimis.

DEFINITIO 4.

61. SI semiordinatæ alicujus curvæ usque ad certum terminum continuo crescunt vel decrescunt, quem prætergressæ denuo decrescunt vel crescunt; methodus, per quam determinatur earum maxima vel minima, dicitur *Methodus de maximis & minimis*.

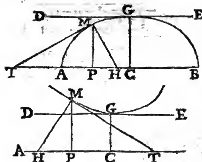
SCHOLION.

62. *Potest vero hæc methodus etiam ad determinandas quantitates alias, quæ ad certum aliquem terminum crescunt vel decrescunt, adhiberi. Sed repræsentandæ sunt per curvarum semiordinatas, ut exempla inferius adducenda loquuntur.*

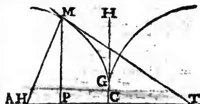
PROBLEMA 13.

63. ***Determinare maximam vel minimam applicatam in curva algebraica.***

RESOLUTIO.



Quoniam in curvis maximum vel minimum habentibus tangens TM degenerat tandem in DE & axi parallela evadit, ideoque normalis MH coincidit cum maxima vel minima applicata CG; erit in casu maximi vel minimi subtangens TP infinita atque subnormalis PH nihilo æqualis. Est vero PH $= ydy : dx$ (§. 35). Quodsi ergo ponatur $ydy : dx = 0$; reperietur $dy = 0$ & ob PT $= ydx : dy = \infty$ (quæ est nota infinitatis) $dx = \infty$.



Fieri potest, ut tangens HG in directum jaceat semiordinatæ GC: quo in casu subtangens PT nihilo æquatur & subnormalis PH fit infinita. Est vero PT $= ydx : dy = 0$ (§. 20): quare si ponatur $ydx : dy = 0$, habebimus $dx = 0$. Vel ob PH $= ydy : dx = \infty$, reperitur $dy = \infty$. Sunt nimirum tam dx, quam y intuitu dy infinitesimæ.

Ex æquatione itaque curvæ quærendus est valor ipsius dy, & vel nihilo, vel infinito æquandus, ut habeatur valor abscissæ, cui maxima applicata coordinatur.

COROLLARIUM 2.

64. Quoniam in circulo (§. 377 *part. 1*)

$$ax - x^2 = y^2$$

erit

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Nempe maxima semiordinata in circulo erigitur ex centro, uti ex Elementis constat (§. 299 *Geom.*).

Quodsi porro valor ipsius x in æquatione $ax - x^2 = y^2$ substituatur; prodibit $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = y^2$, hoc est, $\frac{1}{4}a^2 = y^2$. Unde $\frac{1}{2}a = y$; id quod denuo ex Elementis manifestum est.

Quodsi ponamus $2ydy : (a - 2x) = dx = \infty$; erit $a - 2x$ respectu numeratoris $2ydy$ infinite parva, ideoque (§. 3) $a - 2x = 0$, ut ante.

COROLLARIUM 2.

65. Pro infinitis circulis (§. 24)

$$max^{m-1}dx - (m-1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m+1)x^m$$

$$ma : (m+1) = x$$

E. gr. sit $m = 3$ seu æquatio ad circulum tertii generis $y^4 = ax^3 - x^4$; erit $x = \frac{3}{4}a$, consequenter $y^4 = \frac{27}{64}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{108}{256}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{27}{256}a^4$. Unde $y = \frac{1}{4}a\sqrt[4]{27}$.

COROLLARIUM 3.

66. Pro ellipsibus infinitis (§. 26)

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mbx^{m-1}(a-x)^n = nbx^m(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Sit e. gr. ellipsis primi generis; erit $m = 1$ & $n = 1$, ideoque $x = \frac{1}{2}a$, & ob $y^2 = bx - bx^2 : a$ (§. 423 *part. 1*), $y^2 = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab$. Unde $y = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

COROLLARIUM 4.

67. Si $x^3 + y^3 = axy$

erit $3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$

$$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy = 0$$

$$3x^2 = ay$$

$$3x^2 : a = y$$

$$27x^6 : a^3 = y^3$$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Porro

$$y = 3x^2 : a$$

$$= \frac{3}{9}a\sqrt[3]{4}$$

$$= \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$$

COROLLARIUU 5.

68 Sit $y - a = a^{1:3}(a-x)^{2:3}$

erit $dy = -2a^{1:3}dx : 3(a-x)^{1:3}$

Quodsi hic valor ipsius dy ponatur nihilo æqualis; erit $-2a^{1:3} = 0$. Quamobrem cum nullus valor ipsius x inde eruatur; ponatur

$$-2a^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = \infty$$

erit ob denominatorem respectu numeratoris infinite parvum (§. 3)

$$3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x$$

Unde $y - a = a^{1:3}(a-x)^{2:3} = a^{1:3}.0 = 0$ ideoque

$$y - a = 0$$

$$y = a.$$

COROLLARIUM 6.

69. Sit $y^5 = a^2x^3 - x^5 + b^2c^2x$

erit $5y^4dy = 3a^2x^2dx - 5x^4dx + b^2c^2dx = 0$

$$3a^2x^2 - 5x^4 + b^2c^2 = 0$$

$$5x^4 - 3a^2x^2 = b^2c^2$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2x^2 = \frac{1}{5}b^2c^2$$

$$\frac{9}{100}a^4 \qquad \frac{9}{100}a^4$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2x^2 + \frac{9}{100}a^4 = \frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2$$

$$\left.\begin{matrix} x^2 - \frac{3}{10}a^2 \\ \frac{3}{10}a^2 - x^2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2)}$$

$$x^2 = \frac{3}{10}a^2 \pm \sqrt{(\frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2)}$$

$$x = \sqrt{(\frac{3}{10}a^2 \pm \sqrt{(\frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2)})}$$

Fiat $x = m$

erit $y^5 = a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m$

$$y = \sqrt[5]{(a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m)}$$

COROL-

COROLLARIUM 7.

70. Sit $b^2x^2 + a^4 = cxy^2 + x^3y$

erit $2b^2xdx = 2cxydy + cy^2dx + 3x^2ydx + x^3dy$

$$2b^2xdx - cy^2dx - 3x^2ydx = 2cxydy + x^3dy = 0$$

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x = cy^2 + 3x^2y$$

$$2b^2x^2 = cxy^2 + 3x^3y$$

$$b^2x^2 = cxy^2 + x^3y - a^4$$

$$b^2x^2 = 2x^3y + a^4$$

$$b^2x^2 - a^4 = 2x^3y$$

$$\frac{b^2x^2 - a^4}{2x^3} = y$$

$$\frac{b^4x^4 - 2a^4b^2x^2 + a^8}{4x^6} = y^2$$

$$\frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} = cy^2$$

$$\frac{3b^2x^2 - 3a^4}{2x} = 3x^2y$$

ideoque

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x - \frac{b^4cx^4 + 2a^4b^2cx^2 - a^8c}{4x^6} - \tfrac{3}{2}b^2x + \frac{3a^4}{2x} = 0$$

h. e. $\tfrac{1}{2}b^2x - \frac{b^4cx^4 + 2a^4b^2cx^2 - a^8c}{4x^6} + \frac{3a^4}{2x} = 0$

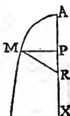
$$2b^2x^7 + 6a^4x^5 - b^4cx^4 + 2a^4b^2cx^2 - a^8c = 0$$

$$x^7 + \frac{3a^4}{b^2}x^5 - \tfrac{1}{2}b^2cx^4 + a^4cx^2 - \frac{a^8c}{2b^2} = 0$$

quæ est æquatio exprimens valorem ipsius x, seu abscissæ semiordinatæ maximæ respondentis.

PROBLEMA 14.

71. *Ex dato puncto R in axe AX curvæ algebraicæ ducere ad perimetrum curvæ rectam RM, quæ sit minima omnium ex eodem puncto R ducendarum.*



RESOLUTIO.

Sit $AP = x$, $PM = y$, $AR = c$, erit $PR = c - x$, & ob $PM^2 + PR^2 = RM^2$ (§. 417 *Geom.*); $RM^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$. Concipiamus ergo curvam, cujus applicata sit RM (§. 62), erit

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$$

$$-2cdx + 2xdx + 2ydy = 2zdz = 0$$

$$ydy + xdx - cdx = 0.$$

Quodsi ex æquatione ad curvam algebraicam data pro ydy substituatur valor ejus; valorem ipsius x eruere licet.

COROLLARIUM 1.

72. In parabola (§. 21)

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

Ergo $\tfrac{1}{2}adx + xdx - cdx = 0$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a \;\&\; \tfrac{1}{2}a = c - x$$

Hinc $ax = ac - \tfrac{1}{2}a^2 = y^2$ (§. 388 *part.* 1) & $(c-x)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + ac - \tfrac{1}{2}a^2 = ac - \tfrac{1}{4}a^2 = z^2$. Unde $RM = z = \sqrt{(ac - \tfrac{1}{4}a^2)}$. Est ideo $MR^2 : PM^2 = ac - \tfrac{1}{4}a^2 : ac - \tfrac{1}{2}a^2 = c - \tfrac{1}{4}a : c - \tfrac{1}{2}a$.

Quia $PR = c - x = \tfrac{1}{2}a$, evidens est PR esse subnormalem (§. 36), consequenter MR normalem, unde patet

Theorema: Perpendicularis ad parabolam est minima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci potest.

COROLLARIUM 2.

73. In hyperbola æquilatera (§. 507 *part.* 1)

$$ax + x^2 = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$\tfrac{1}{2}adx + xdx = ydy$$

Quare $\tfrac{1}{2}adx + xdx + xdx - cdx = 0$ (§. 71)

$$2x = c - \tfrac{1}{2}a$$

$$x = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{4}a$$

Sive $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$

Quoniam subnormalis reperitur $x + \tfrac{1}{2}a$ (§. 35), $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$ est denuo subnormalis, consequenter &

Theorema: In hyperbola æquilatera normalis est brevissima omnium rectarum, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci possunt.

COROLLARIUM 3.

74. In ellipsi primi generis est (§. 420 *part.* 1)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$ydy = (abdx - 2bxdx) : 2a$$

Quare

Quare $\frac{1}{2}bdx - bxdx : a + xdx - cdx = 0$ (§. 71)

$$\frac{1}{2}b - c - bx : a + x = 0$$

$$x - \frac{bx}{a} = c - \frac{1}{2}b$$

$$ax - bx = ac - \frac{1}{2}ab$$

$$x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a - b)$$

$$c - x = (\frac{1}{2}ab - bc) : (a - b).$$

Cum ſubnormalis reperiatur $\frac{1}{2}b - bx : a$ (§. 35); erit $PR = c - x = \frac{1}{2}b - (bc + \frac{1}{2}b^2) : (a - b) = (\frac{1}{2}ab - bc) : (a - b)$, ut ideo PR denuo ſit ſubnormalis, conſequenter &

Theorema: In ellipſi normalis ſit linea recta breviſſima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poteſt.

COROLLARIUM 4.

75. Eodem modo in hyperbola ſcalena reperitur $x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a + b)$.

COROLLARIUM 5.

76. Quoniam $ydy + xdx - cdx = 0$ (§. 71)

$$ydy = cdx - xdx$$

$$\frac{ydy}{dx} = c - x = PR$$

Eſt ideo PR ſubnormalis (§. 35), ideoque patet generale

Theorema: In omni curva perpendicularis eſt linea recta breviſſima, quæ ex dato puncto in axe ad eam duci poteſt.

PROBLEMA 15.

77. *A puncto* C *extra curvam algebraicam dato ducere rectam* CM, *quæ ſit minima omnium ex eodem puncto* C *ad curvam ducendarum.*

RESOLUTIO.

Ob punctum C datum datur quoque perpendicularis ad axem CD, itemque AD. Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$; erit $MH = AP - AD = x - p$ & $CH = CD - PM = q - y$, conſequenter $MC^2 = CH^2 + HM^2 = q^2 - 2qy + y^2 + x^2 - 2px + p^2$ (§. 417 *Geom.*). Cum ideo MC^2 ſit minimum quoddam; erit ejus differentiale nihilo æquale (§. 63), hoc eſt,

$$-2qdy + 2ydy + 2xdx - 2pdx = 0$$

ſeu $(y - q)dy + (x - p)dx = 0$

Reliqua peragenda ſunt ut in problemate præcedente (§. 71).

COROLLARIUM I.

78. Si curva AMO fuerit parabola primi generis; erit (§. 388 *part.* 1)

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a$$

Unde $y - q + (x - p) 2y : a = 0$

$$ay - aq + 2xy - 2py = 0$$

$$ay - aq + 2y^3 : a - 2py = 0$$

$$a^2y - a^2q + 2y^3 - 2apy = 0$$

h. e. $y^3 + \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{2}a^2q = 0$
$\qquad - apy$

Quodſi hæc æquatio ope parabolæ datæ atque circuli conſtruatur (§. 622 *part.* 1); una eademque opera determinantur & AP & PM, & punctum M. Nimirum (*vi* §. *cit.*) fieri debet $AL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$ & $IL = \frac{1}{4}q$, atque centro I per verticem parabolæ A deſcribendus eſt circulus, qui eam in puncto deſiderato M ſecabit. Erit autem $AL = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$; ſi ex A in G transferatur $\frac{1}{2}a$ & DG biſariam ſecetur in L. Nam $AD = p$, ideoque $DG = \frac{1}{2}a - p$. Ergo $DL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, conſequenter $AL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p + p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$. His factis $AP = x$, $PM = y$. Etenim ex natura parabolæ $AP = y^2 : a$, ideoque $LP = IR = y^2 : a - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, conſequenter $IR^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2$. Porro $MR = y - \frac{1}{4}q$, ideoque $MR^2 = y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Habemus itaque (§. 417 *Geom.*) $MI^2 = IR^2 + MR^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Eſt vero $MI^2 =$

AI^2

$AI^2 = IL^2 + LA^2$ (§. *cit.*) $= \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{16}q^2$. Quare

$$\frac{y^4}{a^2} + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}qy = 0$$
$$- \frac{py^2}{a}$$
$$\overline{y^4 + \tfrac{1}{2}a^2y^2 - \tfrac{1}{2}a^2qy = 0}$$
$$- apy^2$$
$$\overline{y^3 + \tfrac{1}{2}a^2y - \tfrac{1}{2}a^2q = 0} \quad y$$
$$- apy$$

quæ est æquatio ad construendum proposita.

COROLLARIUM 2.

79. Quoniam (§. 77)

$$(y - q)\,dy + (x - p)\,dx = 0$$

erit $(x - p)\,dx = (q - y)\,dy$

$$\frac{(x - p)\,y}{q - y} = \frac{ydy}{dx}$$

Jam porro (§. 268 *Geom.*)

$$CH : MH = CD : Dr$$
$$q - y : x - p = q : Dr$$

ideoque $Dr = \frac{qx - pq}{q - y}$, consequenter ob DP $= x - p$, $Pr = \frac{qx - pq}{q - y} - x + p = (qx - pq - qx + pq + xy - py) : (q - y) = (x - p)\,y : (q - y)$. Est ideo $Pr = ydy : dx$ subnormalis (§. 35). Patet ideo denuo generale

Theorema: In omni curva AMO linea ad eam perpendicularis est brevissima omnium, quæ ex dato extra eam puncto C ad eam duci possunt.

SCHOLION.

80. *Ex allato exemplo liquet, si problema non fuerit planum, consultius esse ut in expressione generali valor potius ipsius* dx, *quam* dy *substituatur. Nec absimili modo in curvis algebraicis determinatur punctum intra earum ambitum datum, a quo ad earum perimetros ducantur recta minima: quemadmodum ex sequente problemate patet.*

PROBLEMA 16.

81. *A puncto C intra curvam algebraicam dato ducere rectam CM, quæ sit minima omnium ex eodem puncto C ad curvam ducendarum.*



Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$, erit $HC = PD = p - x$ & $MH = y - q$, consequenter $MC^2 = MH^2 + HC^2$ (§. 417 *Geom.*) $= y^2 - 2qy + q^2 + p^2 - 2px + x^2$. Cum MC^2 sit minimum quoddam ex hypothesi; erit ejus differentiale nihilo æquale (§. 63), hoc est, $2ydy - 2qdy - 2pdx + 2xdx = 0$, seu $(y - q)\,dy - dx(p - x) = 0$. Reliqua peragenda sunt ut in problemate 14 (§. 71).

COROLLARIUM 1.

82. Quoniam $(y - q)\,dy = (p - x)\,dx$

erit $\frac{dy}{dx} = \frac{p - x}{y - q}$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{(p - x)\,y}{y - q}$$
$$= \frac{HC \cdot PM}{MH}$$

Quare cum sit MH : HC = PM : PR (§. 268 *Geom.*); erit PR subnormalis (§. 35). Patet ideo denuo

Theorema: in omni curva AMO linea normalis est brevissima, quæ a dato intra eam puncto C ad eam duci potest.

COROLLARIUM 2.

83. Linea itaque ad curvam normalis est brevissima omnium, quæ a dato quocunque in eodem plano puncto ad eam duci potest (§. 76. 79. 82).

PROBLEMA 17.

A ——— D ——— B

84. *Lineam rectam AB ita secare in D, ut rectangulum ex AD & DB sit maximum eorum, quæ hac ratione construi possunt.*

Sit $AB = a$, $AD = x$, erit $DB = a - x$, consequenter $AD \cdot DB = ax - x^2$ maximum aliquod, atque hinc (§. 63) ejus differentiale nihilo æquale; concipitur nempe esse ad circulum, ad quem (§. 377 *part.* 1)

$ax -$

$$ax - x^2 = y^2$$

Quare $adx - 2xdx = 2ydy = 0$

$$a - 2x = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

A ——————— D ——— B

Linea igitur AB est secanda in duas partes æquales, estque quadratum omnium rectangulorum maximum, quorum altitudines & bases junctim sumtæ inter se æquantur.

PROBLEMA 18.

85. *Lineam rectam (Vid. Fig. præc.) AB ita secare in D, ut $AD^m . DB^n$ sit maximum factorum simili modo formatorum.*

Sit denuo $AB = a$, $AD = x$; erit $DB = a - x$, consequenter $AD^m . DB^n = x^m (a - x)^n$. Erit igitur x abscissa respondens semiordinatæ maximæ in infinitis circulis, ad quos $x^m (a - x)^n = y^{m+n}$ (§. 517 *part.* 1) & hinc (§. 63)

$$mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m (a-x)^{n-1} dx = 0$$

$$mx^{m-1}(a - x)^n = nx^m (a - x)^{n-1}$$

$$m(a - x) = nx$$

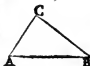
$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m + n) = x$$

Sit e. gr. $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \tfrac{2}{3}a$, hoc est, si recta $AD = \tfrac{2}{3}a$ & $BD = \tfrac{1}{3}a$, atque BD sumatur pro altitudine prismatis, AD pro latere quadrati, quod est basis ejusdem; erit prisma omnium maximum eorum, quæ ex divisione rectæ AB in duas partes formari possunt.

PROBLEMA 19.

86. *Super recta AB tanquam hypothenusa triangulum rectangulum maximum construere.*



Sit $AB = a$, $AC = x$; erit (§. 417 *Geom.*) $BC = \surd(a^2 - x^2)$, area (§. 392 *Geom.*) $= \tfrac{1}{2}AC . CB = \tfrac{1}{2}x\surd(a^2 - x^2)$. Habemus ideo æquationem ad curvam tertii generis (§. 382 *part.* 1)

$$x\surd(a^2 - x^2) = 2y^2$$

seu $a^2x^2 - x^4 = 4y^4$

Unde $2a^2xdx - 4x^3dx = 16y^3dy = 0$ (§. 63)

$$2a^2x = 4x^3$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 \qquad 4x$$

$$\surd\tfrac{1}{2}a^2 = x$$

Patet ideo triangulum maximum esse æquicrurum. Nam si $AB^2 = a^2$ & $AC^2 = \tfrac{1}{2}a^2$, erit etiam $CB^2 = \tfrac{1}{2}a^2$, consequenter $AC = CB$.

PROBLEMA 20.

87. *Inter omnes Conos æquales determinare eum, qui minimam habet superficiem.*

Sit soliditas conorum æqualium a^3, ratio radii ad peripheriam $r : p$, radius Coni $AC = x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$. Hæc peripheria basis $px : r$ ducta in $\tfrac{1}{2}x$ dat basin Coni $px^2 : 2r$ (§. 429 *Geom.*): per quam si dividatur a^3, habetur $\tfrac{1}{3}DC = 2a^3r : px^2$ (§. 548 *Geom.*). Unde $DC = 6a^3r : px^2$ &

$$DC^2 = 36a^6r^2 : p^2x^4$$

$$AC^2 = x^2$$

$$AD^2 = x^2 + 36a^6r^2 : p^2x^4 \quad (\text{§. 417 } Geom.)$$

$$AD = \surd(p^2x^6 + 36a^6r^2) : px^2$$

$\tfrac{1}{2}$ peripheria Baf. $px : 2r$

Superf. Coni $\surd(p^2x^6 + 36a^6r^2) : 2rx$ (§. 548 *Geom.*)

Habe-

Habemus itaque vi methodi de maximis & minimis (§. 63)

$$(p^2x^6 + 36a^6r^2):4r^2x^2 = y^2$$

h. e. $p^2x^4:4r^2 + 9a^6:x^2 = y^2$

$$4p^2x^3dx:4r^2 - 18a^6xdx:x^4 = 2ydy = 0 \ (\S.19)$$

$$p^2x^3dx:r^2 - 18a^6dx:x^3 = 0$$

$$p^2x^3:r^2 = 18a^6:x^3$$

$$p^2x^6 = 18a^6r^2$$

$$px^3 = 3a^3r\sqrt{2}$$

$$x^3 = 3a^3r\sqrt{2}:p$$

$$x = a\sqrt[3]{(3r\sqrt{2}:p)}$$

Quoniam $x^3 = 3a^3r\sqrt{2}:p$, erit $x^3:a^3 = 3r\sqrt{2}:1p$, consequenter evidens est

Theorema: Cubus radii basis Coni inter æquales minimam superficiem habentis est ad ipsum Conum in ratione composita radii ad peripheriam & $3\sqrt{2}$ ad 1.

PROBLEMA 21.

88. *Sit* ADB *semicirculus & curva* AMD *ejus naturæ, ut sit* BP : PN = AP : PM; *determinare punctum* M, *in quo* MN *est maxima linea earum, quæ simili modo determinantur.*



Sit diameter semicirculi AB $= a$, AP $= x$; erit PB $= a - x$ & PN $= \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 327. 377 *Geom.*). Est vero *per hypoth.*

$$BP : PN = AP : PM$$

$$a - x : \sqrt{(ax - x^2)} = x : PM$$

ideoque PM $= \frac{x\sqrt{(ax-x^2)}}{a-x} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(a-x)}}$, consequenter NM $=$ PN $-$ PM $= \sqrt{(ax - x^2)} - \sqrt{x^3}:\sqrt{(a-x)}$, & hinc MN$^2 = (a^2x - 2ax^2 + 2x^3 - 2\sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)}):(a-x) =$ (ob $\sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)} = ax^2 - x^3$), $\frac{a^2x - 4ax^2 + 4x^3}{a-x}$.

Quare cum NM^2 sit maximum aliquod, erit (§. 63)

$$\frac{(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x)dx + (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)dx}{(a-x)^2} = 0 \ (\S.19)$$

$$(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x) + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 = 0$$

h. e. $\left.\begin{array}{l} a^3 - 8a^2x + 12ax^2 \\ \quad - a^2x + 8ax^2 - 12x^3 \\ \quad + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 \end{array}\right\} = 0$

$$a^3 - 8a^2x + 16ax^2 - 8x^3 = 0$$

$a - 2x$

$$a^2 - 6ax + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 - 6ax = -a^2$$

$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax = -\tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{5}{16}a^2$$

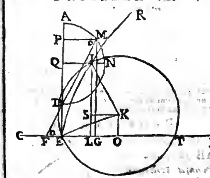
$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax + \tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{5}{16}a^2$$

$$\tfrac{3}{4}a - x = \tfrac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

$$x = \tfrac{3}{4}a - \tfrac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

Dividatur radius CB bifariam in E, erit CE $= \frac{1}{4}a$, ideoque, ob CD $= \frac{1}{2}a$, DE $= \sqrt{\frac{5}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$. Fiat EP $=$ ED; erit PB $= \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$, consequenter AP $=$ AB $-$ PB $= \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$.

PROBLEMA 22.



89. *Determinare maximam applicatam* QN *in curva* AMND *ejus naturæ,*

re, ut ducta recta FM *per punctum* D, *in quo curva* AMND *axem* AE *secat, ad lineam* CB *positione datam, sit eidem* AE *constanter æqualis.*

Sit $FM = AE = a$, $DE = b$, $EP = MG = x$, erit $DP = x - b$ & $FG = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§ 417 *Geom.*). Jam cum anguli ad P & G sint recti *per constr.* & ob parallelas FG & MP (§. 256 *Geom.*) $o = n$ (§. 233 *Geom.*); erit $\triangle$ FGM $\sim \triangle$ PDM, & ideo (§. 267 *Geom.*)

$$MG : GF = DP : PM$$

$$x : \sqrt{(a^2 - x^2)} = x - b : PM$$

ideoque $PM =$

$$\frac{(x-b)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} = \left(1 - \frac{b}{x}\right)\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Hinc $PM^2 = \left(1 - \frac{2b}{x} + \frac{b^2}{x^2}\right)(a^2 - x^2)$

$$= a^2 - \frac{2a^2b}{x} + \frac{a^2b^2}{x^2} - x^2 + 2bx - b^2$$

Habemus ideo (§. 63)

$$\frac{2a^2bdx}{x^2} - \frac{2a^2b^2dx}{x^3} - 2xdx + 2bdx = 0$$

$$\frac{a^2b}{x^2} - \frac{a^2b^2}{x^3} - x + b = 0 \quad x^3$$

$$a^2bx - a^2b^2 - x^4 + bx^3 = 0 \quad x - b$$

$$a^2b - x^3 = 0$$

$$x^3 = a^2b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Parametro a circa axem EB describatur parabola EIR (§. 400 *part.* 1) fiatque (§. 212 *Geom.*) $EO = \frac{1}{2}a$ & OK ad EB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$. Ex centro K radio KE describatur circulus EIT secans parabolam in I, erit IL ad EB perpendicularis ($= EQ$) $= x$, ideoque QN, perpendicularis ad AE transiens per I, maxima applicata.

Est enim $IS = IL - SL = x - \frac{1}{2}b$ &, cum $EL = x^2 : a$ (§. 391 *part.* 1), $LO = SK = \frac{1}{2}a - x^2 : a$. Quare $SI^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$ & $SK^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2 + x^4 : a^2$, consequenter $EK^2 = IK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - bx + x^4 : a^2$. Unde ob $EK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$ habetur $x^4 : a^2 - bx = 0$, ideoque $x^3 - a^2b = 0$.

PROBLEMA 23.

90. *Determinare maximam applicatam* PM *curvæ* AME *ejus naturæ, ut diameter circuli* ANB *sit axi* AE *& rectæ per* A *ductæ* MN *in quolibet curvæ puncto* M *æqualis.*

Sit $MN = AB = AE = a$, $AM = x$, $PM = y$, erit $AN = a - x$. Jam cum AB & PM sint ad AE perpendiculares *per hypoth.* erunt eædem inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), ac proinde AMP

AMP = NAB (§. 233 *Geom.*). Quare cum porro angulus ad P rectus sit (§. 78 *Geom.*) & ANB, qui est in semicirculo, sit itidem rectus (§. 317 *Geom.*); erit △AMP ∽ △ANB (§. 267 *Geom.*) &

$$PM : AM = AN : AB$$
$$y : x = a - x : a$$
$$ay = ax - x^2$$
$$ady = adx - 2xdx = 0$$
$$a - 2x = 0$$
$$a = 2x$$
$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Hinc porro $y = x - \frac{x^2}{a}$

$$= \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}a$$
$$= \tfrac{1}{4}a$$

Est igitur in casu applicatæ maximæ AM = AN = $\frac{1}{2}a$: unde reperitur AP = $\frac{1}{4}\sqrt{3a^2}$ (§. 417 *Geom.*).

SECTIO SECUNDA
DE CALCULO INTEGRALI SEU SUMMATORIO.
CAPUT PRIMUM
De Natura Calculi Integralis.

DEFINITIO 5.

91. *Calculus integralis* seu *Summatorius* est methodus quantitates differentiales summandi, hoc est, ex quantitate differentiali data inveniendi eam, ex cujus differentiatione resultat differentiale datum.

COROLLARIUM.

92. Integrationis itaque seu summationis rite peractæ indicium est, si quantitas inventa juxta regulas Cap. I. Sect. 1 traditas differentiata eam producit, quæ ad summandum proponebatur.

SCHOLION.

93. *Quoniam Angli differentialia quantitatum* fluxiones *vocant* (§. 6); *Calculum, quem nos differentialem dicimus*, Methodum fluxionum; *quem vero integralem vocamus & qui a differentiis ad summas, seu, ut cum Anglis loquar, a fluxionibus ad quantitates fluentes (ita nimirum variabiles dicunt) ascendit*, Methodum fluxionum inversam *appellant*.

HYPOTHESIS.

94. *Signum summæ aut quantitatis integralis sit* ∫, *ita ut* ∫ydx *denotet summam seu integrale differentialis* ydx.

PROBLEMA 24.

95. *Quantitatem differentialem integrare seu summare.*

RESOLUTIO.

Ex superioribus manifestum est, quod sit

I. $\int dx = x$ (§. 8).
II. $\int (dx \mp dy) = x \mp y$ (§. 11).
III. $\int (xdy + ydx) = xy$ (§. 12).
IV. $\int mx^{m-1}dx = x^m$ (§. 13).
V. $\int (n:m)x^{(n-m):m}dx = x^{n:m}$ (§. 17).
VI. $\int (ydx - xdy) : y^2 = x : y$ (§. 19).

Ex his casus quartus & quintus frequen-

quentius occurrunt, in quibus quantitas differentialis summatur, si exponenti variabilis unitas additur, & ea, quæ prodit, dividitur per novum exponentem ductum in differentiale radicis e.gr. in casu quarto per $(m-1+1)dx$, hoc est, per mdx.

Quodsi quantitas differentialis ad summandum proposita nulli illarum formularum similis; aut reducenda est ad summabilem finitam, aut ad seriam infinitam, cujus singuli termini summari possunt, vel etiam ad quadraturas & rectificationes curvarum simpliciorum, quæ quadrari vel rectificari nondum possunt, veluti ad quadraturam circuli, vel rectificationem arcus circuli: quas reductiones exemplis potius quam regulis docemus, ne calculi tironibus nauseam moveamus.

Et quia eadem differentialia prodeunt, si variabilibus constantes quantitates adjiciantur, quam si eædem abfuerint (§. 11); itaque fieri potest, ut $\int dx$ sit $x+a$ vel $x-a$, $\int(xdy+ydx) = xy \mp a^2$, vel $xy \pm ab$, & ita porro. Sed quid de quantitate adjicienda tenendum sit, docebitur paulo post.

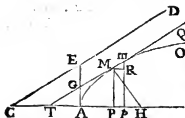
SCHOLION.

96. *Quemadmodum in analysi finitorum qualibet quantitas ad quemcunque dignitatis gradum evehi, sed non vice versa ex qualibet radix extrahi potest desiderata; ita similiter in Analysi infinitesimali quantitas qualibet variabilis aut ex variabilibus & constantibus quomodocunque composita haud difficulter differentiatur, sed non vice versa quodlibet differentiale integrari potest. Quemadmodum autem porro in Analysi finitorum non ex omnibus æquationibus radices extrahendi methodus hactenus inventa, neque enim ætas nostra transcendit limites ultra sæculum & quod excurrit Algebra jam assignatos: ita similiter in Analysi infinitorum calculus integralis suam perfectionem nondum est assecutus. Sicuti autem in Analysi finitorum ad methodos extrahendi radicem per approximationem recurrimus, ubi perfectam extrahere non datur; ita similiter in Analysi infinitorum ad series infinitas confugimus, ubi perfectam summationem dare non valemus.*

CAPUT II.

De usu Calculi Integralis in Quadraturis Curvarum.

DEFINITIO 6.



97. *Differentiale seu elementum areæ dicitur rectangulum* PMRp *ex semiordinata* PM *in differentiale abscissæ* Pp.

COROLLARIUM 1.

98. Si ergo semiordinata PM $= y$, abscissa AP $= x$, erit Pp = MR $= dx$, consequenter Elementum areæ PM . MR $= ydx$.

COROLLARIUM 2.

99. Quoniam mR $= dy$ & MR $= dx$; erit Δ MR$m = \frac{1}{2}dxdy$ (§. 392 *Geom.*). Sed $\frac{1}{2}dxdy$ est ipsius ydx infinitesima (§. 12), consequenter trapezium PMmp æquale est rectangulo PMRp in præsente nimirum casu, ubi pm ipsi PM infinite propinqua intelligitur (§. 4). Quare cum area AMP in infinita istiusmodi trapezia resolvi possit; erit ea $\int ydx$ (§. 91. 94).

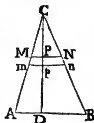
COROLLARIUM 3.

100. Quodsi itaque ex æquatione ad curvam datam substituatur valor ipsius y, & ydx integrabile

bile evadat; integratione peracta habetur quadratura curvæ. Curvam igitur quadrare idem est ac summare ydx.

Problema 25.

101. *Invenire aream trianguli.*



Sit CP $= x$, MN $= y$, CD $= a$, AB $= b$; erit ob MN ipsi AB parallelam (§. 268. 396 *Geom.*)

$$CP : MN = CD : AB$$
$$x : y = a : b$$
$$y = bx : a$$

Ergo elementum MNnm $= ydx$ (§. 98) $= bxdx : a$. Unde habetur $\int ydx = bx^2 : 2a$ (§. 95. 100): quæ est area indefinita CMN. Quodsi pro CP seu x substituatur CD seu a: prodibit area totius trianguli ACB $= ba^2 : 2a = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}$AB.CD, prorsus ut in Elementis Geometriæ (§. 392) demonstratum.

Scholion.

102. *Hoc exemplum ideo attulimus, ut tirones, quibus principia calculi summatorii sub initium duriora videntur, intelligant, per eum non alia reperiri, nisi quæ demonstrationibus rigidis firmantur; tum ut methodi applicationem in exemplo obvio facilius perspiciant.*

Probkema 26.

103. *Parabolam quadrare.*

Pro parabola Apolloniana (§. 388 *part.* 1)

$$ax = y^2$$
$$a^{1:2}x^{1:2} = y$$
$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} \text{ (§.95.100)} = \tfrac{2}{3}xy,$$

substituto valore ipsius $a^{1:2}x^{1:2}$.

Corollarium.

104. Est ergo spatium parabolicum ad rectangulum ex semiordinata in abscissam ut $\frac{2}{3}xy$ ad xy; hoc est, ut 2 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

Problema 27.

105. *Infinitas parabolas quadrare.*

Pro infinitis parabolis & curvis agnatis (§. 519 *part.* 1)

$$a^n x^m = y^r$$
$$a^{n:r}x^{m:r} = y$$

Ergo (§.98) $ydx = a^{n:r}x^{m:r}dx$

$$\int ydx = \frac{r}{m+r}a^{n:r}x^{m:r+1} \text{ (§.95.100)} = \frac{r}{m+r}xy$$

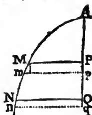
ob $a^{n:r}x^{m:r} = y$.

Corollarium.

106. Spatium parabolicum aut paraboloidicum quodcunque est ad rectangulum ex semiordinata in abscissam, ut $rxy : (m + r)$ ad xy, hoc est, ut r ad $m + r$ (§. 124 *part.* 1).

Problema 28.

107. *Quadrare segmentum spatii parabolici* PMNQ *inter duas semiordinatas* PM *&* QN *interceptum.*



I. Quoniam AP constans est & origo abscissæ indeterminatæ in P; sit AP $= b$, PQ $= x$, QN $= y$, AQ $= b + x$. Sit porro parameter $= a$, erit (§. 388 *part.* 1)

$$ab + ax = y^2$$
$$\sqrt{(ab + ax)} = y$$
$$ydx = dx\sqrt{(ab + ax)}$$

Ut hoc elementum integrabile reddatur; fiat

$\sqrt{(ab}$

$$\sqrt{(ab+ax)} = v$$

erit $ab + ax = v^2$

$$adx = 2vdv$$

$$dx = 2vdv : a$$

$$ydx = 2v^2dv : a$$

$\int ydx = \frac{2}{3}v^3 : a$ (§. 95. 100) $= \frac{2}{3}(ab+ax) \sqrt{(ab+ax)} : a = \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$.

Quoniam in P, $x=0$, & ſpatium quoque QNMP evaneſcit; ſi in integrali inventa ponatur $x=0$, quod relinquitur $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, oſtendit quid ei adjiciendum vel demendum, ut ſpatium QNMP nihilum evadat in P, conſequenter ut integrale fiat quadratura ipſius QNMP. Habemus nempe in noſtro caſu ſubtrahendum $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$; unde ipſius QNMP area $= \frac{2}{3}(b+x) \sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$.

II. Sit AQ conſtans, & $=b$, origo ipſius x in Q, erit QP $= x$, PM $= y$, AP $= b - x$ & (§. 388 *part.* 1)

$$ab - ax = y^2$$

$$\sqrt{(ab-ax)} = y$$

$$ydx = dx\sqrt{(ab-ax)}$$

Fiat ut ante $ab - ax = v^2$

erit $-adx = 2vdv$

$$dx = -2vdv : a$$

$$ydx = -2v^2dv : a$$

$\int ydx = -\frac{2}{3}v^3 : a$ (§. 95. 100) $= -\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{ab-ax)}$

Ut intelligatur, quid integrali ſit adjiciendum, quo ſpatii PMNQ menſuram conſtituat; ponatur ut ante $x=0$, relinquetur $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Unde manifeſtum eſt, ſi illi adjiciatur $+\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, haberi ſpatium PMNQ $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

SCHOLION.

108. *Spatium* PMNQ *eſſe in caſu priore* $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, *in poſteriore* $\frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{ab-ax)}$ *etiam ex problemate* 26 (§. 103) *manifeſtum eſt. Nimirum* PMNQ $=$ ANQ $-$ AMP. *Sed in caſu priore* ANQ $= \frac{2}{3}$AQ . QN $= \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$, & AMP $= \frac{2}{3}$AP . PM $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *Unde* PMNQ $= \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *In poſteriore* ANQ $= \frac{2}{3}$AQ . QN $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, & AMP $= \frac{2}{3}$AP . PM $= \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$. *Unde* QNMP $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

COROLLARIUM.

109. Quodſi ideo curva non ſupponatur deſcripta, ſed tantum æquatio ad eam detur, ut ideo non conſtet, ubi origo ipſius x ſit ſtatuenda; evidens eſt, ex reſolutione problematis præſentis, quod in integrali poni debeat $x=0$, & deletis iis, quæ per x multiplicantur, reſiduum, ſi quod fuerit, ſub ſigno contrario ipſi ſit adjiciendum, ut habeatur quadratura quæſita.

PROBLEMA 29.

110. *Quadrare curvam, ad quam* $xy^3 = a^4$.

Quoniam $y = a^{4:3}x^{-1:3}$

erit $ydx = a^{4:3}x^{-1:3}dx$

$\int ydx = \frac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2} = \frac{3}{2}a\sqrt[3]{ax^2}$ (§. 95).

PROBLEMA 30.

111. *Quadrare curvam* Carteſii (a), *ad quam* $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Quoniam $b^2y = bx^2 - x^3$

erit $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$$ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$$

$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$ (§. 95).

PRO-

(a) Epiſt. Tom. 3. p. 219.

PROBLEMA 31.

112. *Quadrare curvam, ad quam* $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4y$.

Quoniam

$$y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$$

erit $ydx = \left(\frac{x^5}{a^4} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2}{a} + a\right)dx$

$$\int ydy = \frac{x^6}{6a^4} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{3a} + ax \text{ (§. 95).}$$

PROBLEMA 32.

113. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Quoniam $y = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

erit $ydx = xdx\sqrt{(x^2 + a^2)}$

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(x^2 + a^2)} = v$$

erit $x^2 + a^2 = v^2$

$$2xdx = 2vdv$$

$$xdx = vdv$$

$$xdx\sqrt{(a^2 + x^2)} = v^2dv$$

$\int ydx = \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}(x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)}$. Ponatur $x = 0$, erit residuum $\frac{1}{3}a^2\sqrt{a^2}$ sive $\frac{1}{3}a^3$. Ergo quadratura curvæ $\frac{1}{3}(x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)} - \frac{1}{3}a^3$ (§. 109).

PROBLEMA 33.

114. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^3 + ax^2$.

Quoniam $y = x\sqrt{(x + a)}$

erit $ydx = xdx\sqrt{(x + a)}$

Ut elementum integrabile evadat, fiat

$$\sqrt{(x + a)} = v$$

erit $x + a = v^2$, & $x = v^2 - a$

$$dx = 2vdv$$

$$ydx = 2v^4dv - 2av^2dv$$

$\int ydx = \frac{2}{5}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = \frac{2}{5}(x + a)^2\sqrt{(x + a)} - \frac{2}{3}a(x + a)\sqrt{(x + a)} = \frac{6}{15}((x^2 + 2ax + a^2) - \frac{10}{15}(ax + a^2))\sqrt{(x + a)} = (6x^2 + 2ax - 4a^2)\sqrt{(x + a)} : 15$. Ponatur $x = 0$; relinquetur $-\frac{4}{15}a^2\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $\frac{1}{15}\sqrt{(x + a)}(6x^2 + 2ax - 4a^2) + \frac{4}{15}a^2\sqrt{a}$ (§. 109).

PROBLEMA 34.

115. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^2 : (x + a)$.

Quoniam $y = x : \sqrt{(x + a)}$

erit $ydx = xdx : \sqrt{(x + a)}$

Ponatur $\sqrt{(x + a)} = v$

erit $x + a = v^2$

$$x = v^2 - a$$

$$dx = 2vdv$$

$$xdx : \sqrt{(x + a)} = (2v^3dv - 2avdv) : v = 2v^2dv - 2adv$$

$\int ydx = \frac{2}{3}v^3 - 2av = \frac{2}{3}(x + a)\sqrt{(x + a)} - 2a\sqrt{(x + a)} = (2x + 2a - 6a)\frac{1}{3}\sqrt{(x + a)} = (2x - 4a)\frac{1}{3}\sqrt{(x + a)} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 3ax^2 + 4a^3)}$. Reductio ad mere surdam necessaria, ut appareat, si fiat $x = 0$, quinam termini nullescant, propterea quod $x - 2a$ signis afficitur diversis.

Ponatur $x = 0$; relinquetur $\frac{2}{3}\sqrt{4a^3} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $= \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 3ax^2 + 4a^3)} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$ (§. 109) $= \frac{2}{3}(x - 2a)\sqrt{(x + a)} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$.

PROBLEMA 35.

116. *Quadrare omnes curvas, quæ comprehenduntur sub æquatione generali*

$$y = \sqrt{(x + a)}.$$

Quoniam $y = (x + a)^{1:m}$

erit $ydx = dx(x + a)^{1:m}$

Ut elementum integrabile fiat, ponatur

$(x + a)$

$$(x+a)^{1:m} = v$$

erit $x + a = v^m$

$$dx = mv^{m-1}dv$$

$$ydx = mv^m dv$$

$$\int ydx = \frac{mv^{m+1}}{m+1} = \frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}.$$

Fiat $x = 0$; erit residuum $\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$.

Unde area curvæ $\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)} - \frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$ (§. 109).

PROBLEMA 36.

117. *Quadrare omnes curvas, quæ definiuntur hac æquatione generali* $y = ax^m : \sqrt{(b + cx^{m+1})}$.

Elementum harum curvarum $ydx = ax^m dx : \sqrt{(b + cx^{m+1})}$. Ut integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(b + cx^{m+1})} = v$$

erit $b + cx^{m+1} = v^2$

$$(m+1)cx^m dx = 2vdv$$

$$x^m dx = 2vdv : c(m+1)$$

$$ydx = 2adv : (m+1)c$$

$$\int ydx = 2av : (m+1)c = 2a\sqrt{(b + cx^{m+1})} : (m+1)c.$$

Fiat $x = 0$, relinquetur $2a\sqrt{b} : (m+1)c$

Est igitur area $\frac{2a\sqrt{(b+cx^{m+1})} - 2a\sqrt{b}}{(m+1)c}$ (§. 109).

PROBLEMA 37.

118. *Quadrare innumeras hyperbolas intra asymptotos.*

Pro infinitis hyperbolis intra asymptotos $a^{m+n} = y^m x^n$.

Fiat $a = 1$

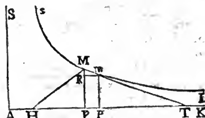
erit $1 = y^m x^n$

$$x^{-n} = y^m$$

$$x^{-n:m} = y$$

$$ydx = x^{-n:m}dx$$

$$\int ydx = \frac{m}{m-n}x^{-n:m+1} = \frac{m}{m-1}\sqrt[m]{x^{m-n}} = \frac{m}{m-n}\sqrt[m]{x^m y^m} = \frac{m}{m-n}xy.$$



Si $m > n$; spatii interminati SAPMs quadratura semper habetur: si $m < n$, ob valorem negativum reperitur quadratura spatii IMPK: si vero $m = n$, spatium neutrum quadratur. Sit enim $xy^2 = a^3$; erit $m = 2$, $n = 1$, ideoque SAPMs $= 2xy$. Si $xy^4 = a^5$; erit $m = 4$, $n = 1$, ideoque SAPMs $= \frac{4}{3}xy$. Si $x^2y = a^3$; theorema dat $a^3 : x = -xy$ seu xy pro spatio interminato IMPK. Si $x^4y = a^5$; habetur $m = 1$, $n = 4$ ideoque $-\frac{1}{3}xy$, hoc est $\frac{1}{3}xy =$ IMPK. Sed si $xy = a^2$; erit $m = 1$, $n = 1$, ideoque $m : (m - n) = \frac{1}{0}$: est ideo numerator respectu denominatoris infinitus.

SCHOLION.

119. Johannes Wallisius (a) *spatium* SAPMs *eo in casu, ubi valor negativus, vocavit* plusquam infinitum: *ostendit vero celeberrimus* Varignonius (b), *virum ceteroquin magno suo merito celebrem aliquid humani*.

(a) In Arithmet. infinit. Schol. prop. 102. fol. 407. & Prop. 101. fol. 409.

(b) Memoires de l'Academie Royale des Sciences An 1706. p. m. 25.

humani passum esse, consentiente summo Leibnitio (a).

PROBLEMA 38.

120. *Hyperbolam Apollonianam intra asymptotos quadrare.*

Quoniam ad hyperbolam intra asymptotos (§. 490 *part.* 1) $a^2 = by + xy$, seu, si fiat $a = b = 1$ (quod ponere licet, cum quantitatis b determinatio sit arbitraria, *vi §. cit.*),

$$1 = y + xy$$

erit $$1 : (1 + x) = y$$

hoc est, divisione actu facta (§. 45 *part.* 1)

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \text{ \&c.}$$

$$ydx = dx - xdx + x^2dx - x^3dx + x^4dx - x^5dx + x^6dx \text{ \&c. in infinit.}$$

$$\int ydx = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c. in infinit.}$$

SCHOLION.

121. *Hanc quadraturam hyperbolæ primus dedit serierum infinitarum inventor* Nicolaus Mercator(b). *Cum autem seriem quæsivisset per divisionem; celeberrimi Geometræ* Leibnitius *atque* Newtonus (c) *methodum hanc serierum infinitarum promoverunt, hic quidem eas eliciens per radicum extractiones, ille autem ex serie quadam præsupposita. Utriusque exempla in sequentibus occurrunt.*

PROBLEMA 39.

122. *Quadrare curvam, in qua* $x^2y + y = 1$.

Quoniam $x^2y + y = 1$

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

vel $$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$ydx = dx : (x^2 + 1)$$

vel $$= dx : (1 + x^2)$$

Resolvatur $1 : (x^2 + 1)$ per divisionem in seriem infinitam (§. 45 *part.* 1), reperietur

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} \text{ \&c.}$$

$$= x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} \text{ \&c.}$$

Quare

$$ydx = x^{-2}dx - x^{-4}dx + x^{-6}dx - x^{-8}dx \text{ \&c.}$$

ideoque

$$\int ydx = -x^{-1} + \tfrac{1}{3}x^{-3} - \tfrac{1}{5}x^{-5} + \tfrac{1}{7}x^{-7} \text{ \&c.}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} \text{ \&c.}$$

Resolvatur similiter $1 : (1 + x^2)$ in seriem (§. *cit.*), reperietur

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \text{ \&c.}$$

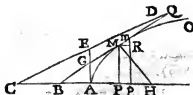
ideoque

$$ydx = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx \text{ \&c.}$$

Quare $\int ydx = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9$ &c.

Quoniam series exprimit aream, quia convergit, hoc est, termini continuo fiunt minores, ut in casu singulari tandem deveniatur ad particulam inassignabilem, etiamsi terminorum numerus sit finitus, series autem prior citius convergit posteriore; ideo utendum est serie prima, si x fuerit satis magna, secunda vero, si satis parva.

PROBLEMA 40.

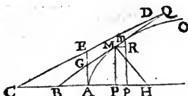


123. *Quadrare hyperbolam* AMP.

Quoniam in hyperbola $ay^2 = abx + bx^2$ (§. 459 *part.* 1); $y = \sqrt{(ax + x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$, ideoque $ydx = dx\sqrt{(ax + x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$, consequenter $\int ydx = \sqrt{(b:a)}$

Wolfii Oper. Math. Tom.I. Mmm

(a) In Actis Eruditorum A. 1712. p. 167. & seqq.
(b) In Logarithmotechnia Prop. 17. p. 31. & seqq.
(c) Vid. Epistolæ ipsorum apud *Wallisium* Vol. III. Operum Mathemat.



$\sqrt{(b:a)}\int dx\sqrt{(ax+x^2)}$. Quoniam $\int dx\sqrt{(ax+x^2)}$ est area hyperbolæ æquilateræ (§.507 *part.* 1); hac data datur etiam area hyperbolæ scalenæ. Quare ut elementum areæ hyperbolæ æquilateræ integrabile reddatur, solvatur $\sqrt{(ax+x^2)}$ in seriem infinitam (§. 98 *part.* 1), erit in theoremate generali

$$m=1,\ n=2,\ P=ax,$$
$$Q=x:a=a^{-1}x$$
$$P^{m:n}=a^{1:2}x^{1:2}=A$$
$$\frac{m}{n}AQ=\tfrac{1}{2}a^{1:2}x^{1:2}.a^{-1}x$$
$$=\tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2}=B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2}.a^{-1}x$$
$$=-\frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}=C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\tfrac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}.a^{-1}x$$
$$=+\frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2}=D$$
$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\tfrac{5}{8}.+\frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2}.a^{-1}x$$
$$=-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}=E$$
$$\frac{m-4n}{5n}EQ=-\tfrac{7}{10}.-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}.a^{-1}x$$
$$=+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}a^{-9:2}x^{11:2}\ \&c.$$

Est itaque

$$y=a^{1:2}x^{1:2}+\tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2}-\frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}+\frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}$$
&c. in infinit.

Quare

$$ydx=a^{1:2}x^{1:2}dx+\tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2}dx-\frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}dx+\frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2}dx-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}dx$$ &c. in infinit.

ideoque

$$\int ydx=\tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}+\tfrac{1}{5}a^{-1:2}x^{5:2}-\frac{1}{4.7}a^{-3:2}x^{7:2}+\frac{1.3}{4.6.9}a^{-5:2}x^{9:2}-\frac{1.3.5}{4.6.8.11}a^{-7:2}x^{11:2}+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}a^{-9:2}x^{13:2}$$
&c.

Quoniam $a^{1:2}x^{1:2}=\sqrt{ax}$, erit

$$\int ydx=\sqrt{ax}\Big(\tfrac{2}{3}x+\frac{x^2}{5a}-\frac{x^3}{4.7a^2}+\frac{1.3x^4}{4.6.9a^3}-\frac{1.3.5x^5}{4.6.8.11a^4}+\frac{1.3.5.7x^6}{4.6.8.10.13a^5}$$ &c. in infinit)

PROBLEMA 41.

124. *Circulum quadrare.*

Sit $AB=1$, (*Vid. Fig. seq. pag.*) $AP=x$, $PM=y$, erit (§. 377 *part.* 1)

$$y=\sqrt{(x-x^2)}$$

$$ydx=dx\sqrt{(x-x^2)}=dx(x-x^2)^{1:2}$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $x-x^2$ extrahatur radix per theorema generale (§. 98 *part.* 1), in quo erit $m=1, n=2, P=x, Q=-x^2:x=-x$

$$P^{m:n}=x^{1:2}=A$$
$$\frac{m}{n}AQ=\tfrac{1}{2}x^{1:2}.-x=-\tfrac{1}{2}x^{3:2}=B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\tfrac{1}{4}.-\tfrac{1}{2}x^{3:2}.-x$$
$$=-\frac{1}{2.4}x^{5:2}=C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\tfrac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}x^{5:2}.-x$$
$$=-\frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}=D$$
$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\tfrac{5}{8}.-\frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}.-x$$
$$=-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}=E$$

$\frac{m-4n}{5n}$

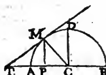
$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\frac{1}{40}. - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}. - x$
$= -\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2}$ &c. in infin.

Habemus ideo $ydx = x^{1:2}dx -$
$\frac{1}{2}x^{3:2}dx - \frac{1}{2.4}x^{5:2}dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}dx$
$\frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2}dx$
&c. in infinit.

Hinc $\int ydx = \frac{2}{3}x^{3:2} - \frac{1}{5}x^{5:2} - \frac{1}{4.7}x^{7:2}$
$- \frac{1.3}{4.6.9}x^{9:2} - \frac{1.3.5}{4.6.8.11}x^{11:2}$ &c. in infinit. $= \sqrt{x}(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{4.7}x^3 -$
$\frac{1.3}{4.6.9}x^4 - \frac{1.3.5}{4.6.8.11}x^5 - \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}x^7$
&c. in infinit.) $= \sqrt{x}(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 -$
$\frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5 - \frac{7}{1664}x^7$ &c. in infinit.)

Hæc nempe ſeries exhibet quadraturam indeterminatam ſegmenti AMP.

Aliter.



Quoniam ſi radius circuli $= 1$, CP $= x$, PM $= y$, (§. 377 *part.* 1) $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ & $\sqrt{(1 - x^2)} =$ $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10}$ &c. in infinitum (§. 98 *part.* 1), erit

$ydx = dx - \frac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{8}x^4dx - \frac{1}{16}x^6dx$
$- \frac{5}{128}x^8dx - \frac{7}{256}x^{10}dx$ &c. in infinitum.

$\int ydx = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9$
$- \frac{7}{2816}x^{11}$ &c. in infinit.

Quando x radio CA æqualis evadit, ſpatium DCPM degenerat in quadrantem. Subſtituta itaque 1 pro x; erit quadrans $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$
$- \frac{7}{2816}$ &c. in infinit.

Quodſi progreſſum in infinitum perſpicere lubet, multiplicatio, ut ante, tantummodo indicanda, dum $\sqrt{(1 - x^2)}$ in ſeriem reſolvitur.

Ita nimirum prodibit $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.4}x^4$
$- \frac{1.3}{2.4.6}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}$
&c. in infinit.

$ydx = dx - \frac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{2.4}x^4dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^6dx$
$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}dx$
&c.

$\int ydx = x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7$
$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.11}x^{11}$
&c. in infinit.

Dicatur terminus primus A, ſecundus B, tertius C, quartus D, quintus E &c. erit

$A = x$

$B = -\frac{1}{2.3}x^3 = -\frac{1.1}{2.3}Ax^2$

$C = -\frac{1}{2.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{2.3.4.5}x^5 =$
$-\frac{1.3}{4.5}Bx^2$

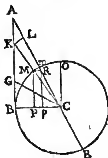
$D = -\frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 = -\frac{1.3.3.5}{2.3.4.5.6.7}x^7 =$
$-\frac{3.5}{6.7}Cx^2$

$E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 = \frac{1.3.5.3.5.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^9 =$
$-\frac{5.7}{8.9}Dx^2$

&c.

 Ali-

Aliter.



Sit tangens arcus dimidii $GB = x$, radius $BC = 1$; erit tangens integri seu dupli $KB = 2x:(1 - x^2)$ (§. 327 *part.* 1) & (§. 269 *Geom.*)

$$BG : BC = KG : KC$$
$$x : 1 = \frac{x + x^3}{1 - x^2} : \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Est enim $KG = 2x:(1 - x^2) - x = (2x - x + x^3):(1 - x^2) = (x + x^3):(1 - x^2)$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$$KC : KB = MC : PM$$
$$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} : \frac{2x}{1 - x^2} = 1 : \frac{2x}{1 + x^2}$$
$$KC : BC = MC : PC$$
$$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} : 1 = 1 : \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

Unde $PB = 1 - (1 + x^2):(1 + x^2) = (1 + x^2 - 1 + x^2):(1 + x^2) = 2x^2:(1 + x^2)$. Hinc differentiando eruitur $Pp = MR = (4xdx + 4x^3dx - 4x^3dx):(1 + x^2)^2$ (§. 19) $= 4xdx:(1 + x^2)^2$) & $mR = (2dx + 2x^2dx - 4x^2dx):(1 + x^2)^2$ (§. *cit.*) $= (2dx - 2x^2dx):(1 + x^2)^2$. Ob $MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 417 *Geom.*) habetur $Mm^2 = 16x^2dx^2:(1 + x^2)^4 + (4dx^2 - 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2):(1 + x^2)^4 = (4dx^2 + 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2):(1 + x^2)^4$ & $Mm = (2dx + 2x^2dx):(1 + x^2)^2 = 2dx:(1 + x^2)$. Denique $Mm \cdot \frac{1}{2}MC = dx:(1 + x^2)$. Ut sector hic infinite parvus MCm seu elementum sectoris BCM, cujus dimidii tangens x, summetur; resolvi debet $1:(1 + x^2)$ in seriem (§. 45 *part.* 1): quo facto reperitur $dx:(1 + x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. ideoque $\int dx:(1 + x^2) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. quæ series exprimit sectorem BCM, ita ut arcus dimidii tangens $GB = x$.

Quando arcus integer BM in quadrantem degenerat; tangens dimidii BG fit radio æqualis (§. 32 *Trig.*). Si ergo pro x substituatur 1, series $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinit. quadrantem circuli exprimit.

Brevius.

Sit tangens (*Vid. Fig. præc.*) $KB = x$, $BC = 1$ & secans CA alteri CK infinite propinqua ductusque arculus KL radio CK; erit $AK = dx$, $KC = \surd(1 + x^2)$ (§. 417 *Geom.*). Jam cum anguli ad B & L sint recti (§. 78) & ob angulum infinite parvum KCL angulus $BKC = KAC$ (§. 239 *Geom.* & §. 3 *Analys. infinit.*); erit (§. 267 *Geom.*)

$$KC : BC = KA : KL$$
$$\surd(1 + x^2) : 1 = dx : \frac{dx}{\surd(1 + x^2)}$$

Porro (§. 137. 412 *Geom.*)

$$CK : KL = CM : mM$$
$$\surd(1 + x^2) : \frac{dx}{\surd(1 + x^2)} = 1 : \frac{dx}{1 + x^2}$$

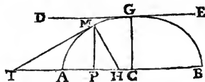
Sector igitur $CMm = \frac{1}{2}dx:(1 + x^2) = \frac{1}{2}(dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}$

$-x^{10}dx$ &c.). Unde per summationem eruitur sector BCM (cujus tangens $KB = x$) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9 - \frac{1}{22}x^{11}$ &c. in infinitum, ideoque si BM octans circuli seu arcus 45°; sector erit (§. 32 *Trigon.*) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22}$ &c. in infinitum. Hujus ideo seriei duplum $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum est quadrans circuli.

Scholion.

125. *Seriem primam invenit* Newtonus, *alteram* Jacobus Gregorius, *& in eandem incidit* Leibnitius *ignorans dubie procul prodituram fuisse Gregorianam, cum ex tangente quaereret aream. Neque enim putandum est, quod inventum seriei, quam a* Gregorio *repertam non ignorabat, etsi publice non constaret, sibi attribuerit absque ulla ratione vir probatae alias candoris. Sed nullum est dubium quin ingeniosissimus* Leibnitius *methodo ab iis diversa, quas ego proposui, ad suam pervenerit. Cum enim methodum priorem, in quam incideram ante annos complures, amico percontanti, unde constet, (quod* Leibnitius *in actis Eruditorum asseverat)* $\int dx:(1+x^2)$ *dependere a quadratura circuli & quomodo inde eruatur series* Leibnitiana *pro circulo* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. *responsurus, judicio* Leibnitii *submisissem, eam quidem non improbavit, monuit tamen, totum negotium brevius absolvi posse: unde etiam factum est, ut postea de breviori cogitarem.*

Problema 42.



126. *Ellipsin Apollonianam quadrare.*

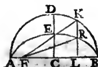
Sit $AC = a$, $GC = c$, $PC = x$; erit (§. 432 *part.* 1)

$$y^2 = c^2(a^2 - x^2):a^2$$
$$y = c\sqrt{(a^2 - x^2)}:a$$

Est vero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infinitum (§. 98 *part.* 1). Ergo $ydx = cdx - \frac{cx^2dx}{2a^2} - \frac{cx^4dx}{8a^4} - \frac{cx^6dx}{16a^6} - \frac{5cx^8dx}{128a^8} - \frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}}$ &c. in infinitum, consequenter $\int ydx = cx - \frac{cx^3}{6a^2} - \frac{cx^5}{40a^4} - \frac{cx^7}{112a^6} - \frac{5cx^9}{1152a^8} - \frac{7cx^{11}}{2816a^{10}}$ &c. in infinitum.

Quodsi pro x ponatur a; erit quadrans ellipsis $ac - \frac{1}{6}ac - \frac{1}{40}ac - \frac{1}{112}ac - \frac{5}{1152}ac - \frac{7}{2816}ac$ &c. in infinitum:

Aliter.



Quoniam elementum Ellipseos est $cdx\sqrt{(a^2 - x^2)}:a$; erit $ECLR = \frac{c}{a}\int dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Sed $\int dx\sqrt{(a^2 - x^2)} =$ DCLK (§. 124). Est itaque $a:c =$ DCLK : ECLR, hoc est, area elliptica ECLR est ad circularem DCLK ut axis minor 2CE ad majorem AB, qui est diameter circuli (§. 124). Pendet ideo quadratura ellipseos a quadratura circuli.

Corollarium I.

127. Si fiat $\sqrt{ac} = 1$, erit area ellipsis $= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ &c. in infinitum. Patet ideo ellipsin esse circulo aequalem, cujus diameter est media proportionalis inter axes ellipsis conjugatos (§. 124).

COROL-

COROLLARIUM 2.

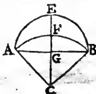
128. Est ergo ellipsis ad circulum, cujus diameter axi majori æqualis, ut *ac* ad a^2 (§. 408 *Geom.*), hoc est, ut *c* ad *a* (§. 124 *part.* 1), seu ut axis minor ad majorem: quod idem de segmentis indefinitis ostendimus analytice in resolutione.

COROLLARIUM 3.

129. Data circuli quadratura dabitur etiam quadratura ellipsis & conera.

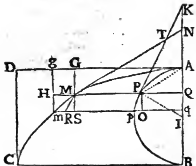
SCHOLION.

130. *Quamvis circuli integri quadratura finita hactenus dari non potuerit, varias tamen ejus portiones quadrarunt Geometræ. Primum quadraturam partialem alicujus lunulæ dedit jam olim* Hippocrates *Chius, ex mercatore naufrago Geometra factus. Sit* AEB *semicirculus &* GC = BG. *Describatur radio* BC *quadrans* AFB; *erit* AEBFA *Lunula Hippocratis. Quoniam* $BC^2 = 2GB^2$ (§. 417 *Geom.*); *erit quadrans* AFBC *semicirculo* AEB *æqualis* (§. 408 *Geom.*). *Ablato igitur utrinque segmento communi* AFBGA; *erit* AEBFA = △ ACB = GB^2.



PROBLEMA 43.

131. *Cycloidem quadrare.*



Quoniam TP = PM (§. 52); erunt in △ PMT anguli M & T æquales (§. 184 *Geom.*), ideoque TPQ = 2M (§. 239 *Geom.*). Est vero anguli APQ mensura arcus dimidius AP (§. 291 & 314 *Geom.*) & idem metitur angulum TPA (§. 322 *Geom.*). Ergo APQ = TPA (§. 142 *Geom.*). Sed TPQ = TPA + APQ = 2APQ = 2TMP *per demonstr.* Ergo APQ = TMP = M*m*S ob parallelas MP & *mq* (§. 233 *Geom.*). Quamobrem cum ad S & Q sint recti *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$AQ : QP = MS : mS$$

Sit jam AQ = x, AB = 1, erit MS = dx, PQ = $\sqrt{(x - x^2)}$ (§. 377 *part.* 1), & $mS = dx\sqrt{(x - x^2)} : x$. Reperimus autem supra (§. 124) $\sqrt{(x - x^2)} = x^{1:2} - \frac{1}{2}x^{3:2} - \frac{1}{8}x^{5:2} - \frac{1}{16}x^{7:2}$ &c. in infinitum. Ergo $dx\sqrt{(x - x^2)} : x =$ (quoniam ob divisionem per x factam numeratores exponentium duabus unitatibus minuuntur (§. 54 *part.* 1)) $x^{-1:2}dx - \frac{1}{2}x^{1:2}dx - \frac{1}{8}x^{3:2}dx - \frac{1}{16}x^{5:2}dx$ &c. in infinitum, cujus summa $2x^{1:2} - \frac{1}{3}x^{3:2} - \frac{1}{20}x^{5:2} - \frac{1}{56}x^{7:2}$ &c. in infinitum, est semiordinata cycloidis QM ad axem AB relatæ. Hinc QM. dx seu elementum QMSq spatii cycloidici AMQ = $2x^{1:2}dx - \frac{1}{3}x^{3:2}dx - \frac{1}{20}x^{5:2}dx - \frac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum: cujus summa = $\frac{4}{3}x^{3:2} - \frac{2}{15}x^{5:2} - \frac{1}{70}x^{7:2} - \frac{1}{252}x^{9:2}$ &c. in infinitum exprimit segmentum cycloidis AMQ.

Quodsi $mS = gG = dx\sqrt{(x - x^2)} : x$ ducatur in GM = AQ = x; reperietur elementum GMHg areæ AMG = $dx\sqrt{(x - x^2)}$: quod cum idem sit cum elemento segmenti circuli APQ (§. 124), erit spatium AMG segmento circuli APQ, consequenter area ADC semicirculo APB æqualis.

COROL-

COROLLARIUM.

132. Quoniam CB semiperipheriæ circuli æquatur (§. 574 *part.* 1), si ea $= p$ & AB $= a$; erit rectangulum BCDA $= ap$ (§. 375 *Geom.*) & semicirculus APB, ideoque & spatium cycloidicum externum ADC $= \frac{1}{4}ap$ (§. 429 *Geom.*). Ergo area semicycloidis ACB $= \frac{3}{4}ap$ & AMCBPA $= \frac{3}{4}ap$, consequenter area cycloidis est circuli genitoris tripla.

PROBLEMA 44.

133. *Cissoidem* Dioclis *quadrare*.

Quoniam $y^2 = x^3 : (1 - x)$, si 1 diameter circuli genitoris (§. 548 *part.* 1); erit

$$y = x\sqrt{x} : \sqrt{(1-x)} = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}$$

Extrahatur ergo ex $(1-x)^{-1:2}$ actu radix per theorema generale (§. 98 *part.* 1) in quo erit $m = -1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = -x$ & hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.1.-x = \tfrac{1}{2}x = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}x.-x = \frac{1.3}{2.4}x^2 = C$$

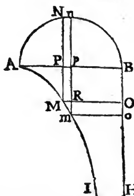
$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5.1.3}{6.2.4}x^2.-x = \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7.1.3.5}{8.2.4.6}x^3.-x = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4$$

&c. in infinitum.

Unde $ydx = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}dx = x^{3:2}dx + \frac{1}{2}x^{5:2}dx + \frac{1.3}{2.4}x^{7:2}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{9:2}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{11:2}dx$ &c. cujus summa $\frac{2}{5}x^{5:2} + \frac{1}{7}x^{7:2} + \frac{1.3}{4.9}x^{9:2} + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^{13:2}$ &c. in infinitum $= \sqrt{x}(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3 + \frac{1.3}{4.9}x^4 + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^5 + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^6$ &c. in infinitum) exprimit spatium APM in *Figura sequenti*.

Aliter.



Sit AP $= x$, PN $= v$, PM $= y$, AB $= a$; erit (§. 548 *part.* 1)

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

$$2aydy - 2xydy - y^2dx = 3x^2dx$$

$$2(a-x)dy - ydx = 3x^2dx : y$$

Quoniam (§. 547 *part.* 1) $x^2 = vy$; erit $x^2 : y = v$. Fiat præterea $a - x =$ PB $= z$; habebimus

$$2zdy - ydx = 3vdx$$

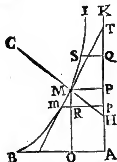
$$2\int zdy - \int ydx = 3\int vdx$$

Est vero vdx elementum circuli PN*np*; $\int zdy$ (ob $z =$ PB $=$ OM & $dy = m$R $= o$O) elementum *m*MO*o* areæ AMOB & ydx elementum PM*mp* areæ AMP. Jam quando $\int zdy$ integram aream intra cissoidem AI & ejus asymptotum BH exhibet, etiam $\int ydx$ est eadem area, ideoque $\int ydx = \int zdy$, consequenter $2\int zdy - \int ydx = \int zdy$. Quare cum in eodem casu $\int vdx$ semicirculum producat ANB; erit ob $\int zdy = 3\int vdx$ totum spatium cissoidale in infinitum protensum semicirculi genitoris ANB triplum.

PRO-

PROBLEMA 45.

134. *Quadrare Logiſticam* ſeu *Logarithmicam*.



Sit ſubtangens $PT = a$ (§. 54), $PM = y$, $Pp = dx$; erit (§. *cit.*)

$$ydx : dy = a$$
$$ydx = ady$$
$$\int ydx = ay$$

Spatium ergo interminatum KPMI æquatur rectangulo ex PM in PT.

COROLLARIUM 1.

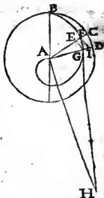
135. Sit $QS = z$; erit ſpatium interminatum $ISQK = az$, conſequenter $SMPQ = ay - az = a(y - z)$, hoc eſt ſpatium inter duas logiſticæ ſemiordinatas interceptum æquatur rectangulo ex ſubtangente in differentiam ſemiordinatarum.

COROLLARIUM 2.

136. Eſt itaque ſpatium BAPM ad ſpatium PMSQ ut differentia ſemiordinatarum AB & PM ad differentiam ſemiordinatarum PM & SQ (§. *preced.* & §. 124 *part.* 1).

PROBLEMA 46.

137. *Quadrare ſpirales*.



Sint omnia ut in problemate 8 (§. 50); erit arculus $EG = ydx : a$ qui ductus in $\frac{1}{2}AG$ producit ſectorem infinite parvum $GAE = y^2 dx : 2a$ (§. 435 *Geom.*). Eſt autem pro ſpirali Archimedea

$$ax = by \text{ (§. 571 } part. \text{ 1)}$$
$$a^2x^2 : b^2 = y^2$$
$$y^2 dx : 2a = ax^2 dx : 2b^2$$
$$\int y^2 dx : 2a = ax^3 : 6b^2$$

Quodſi pro arcu x ponatur integra peripheria b; erit ſpatium ſpirale integrum $\frac{1}{6}ab$. Similiter pro infinitis ſpiralibus ad circulum relatis (§. 572 *part.* 1)

$$a^m x^n = b^n y^m$$
$$a^m x^n : b^n = y^m$$
$$ax^{n:m} : b^{n:m} = y$$
$$a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m} = y^2$$
$$y^2 dx : 2a = ax^{2n:m} dx : 2b^{2n:m}$$
$$\int y^2 dx : 2a = max^{(2n+m):m} : (4n + 2m) b^{2n:m}$$

Quare ſi pro x ponatur integra peripheria circuli b, prodibit pro ſpatiis ſpiralibus integris $mab^{2n:m+1} : (4n + 2m) b^{2n:m} = mab : (4n + 2m)$.

Quodſi ponamus arcum BC eſſe ad CF ut abſciſſa ad ſemiordinatam in curva aliqua algebraica, eodem modo reperitur ſpatium ſpirale. Sit enim

e. gr.

e. gr. BC ad CF ut abſciſſa parabolæ ad ſemiordinatam, erit (ſumto r pro parametro)

$$rx = a^2 - 2ay + y^2$$

$$dx = (2ydy - 2ady) : r$$

$$y^2 dx : 2a = (y^3 dy - ay^2 dy) : ar$$

$$\int y^2 dx : 2a = y^4 : 4ar - y^3 : 3r$$

Nec abſimili modo invenitur ſpatium inter arcum BC & ſpiralem BF comprehenſum: cujus elementum eſt trapezium CFID $= (CD + FI)\frac{1}{2}FC$ (§. 400 *Geom.*). Eſt vero CD $= dx$, FI $= ydx : a$, FC $= a - y$, ideoque CFID $= (dx + ydx : a)\frac{1}{2}(a - y) = (a^2 dx - y^2 dx) : 2a$.

Si jam ſpiralis ſit parabolica, pro dx ſubſtituatur valor ipſius $(2ydy - 2ady) : r$; erit elementum ſpeciale $(ay^2 dy + a^2 ydy - y^3 dy - a^3 dy) : ar$, cujus ſumma $y^3 : 3r + ay^2 : 2r - y^4 : 4ar - a^2 y : r$ eſt ſpatium quæſitum BFC.

PROBLEMA 47.

138. *Quadrare Conchoidem Nicomedis.*

Sit AP $= x$, PM $= y$, BC $= b$, AB $= a$ & OQ ad PM perpendicularis; erit PB $=$ OQ $= a - x$, PC $= a + b - x$. Quoniam OQ & BA perpendiculares ad PM *per hypoth.* erunt inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), conſequenter (§. 268 *Geom.*)

$$PC : PM = OQ : OM$$

$$a + b - x : y = a - x : OM$$

& hinc OM $= y(a - x) : (a + b - x)$ ideoque OM$^2 = y^2 (a - x)^2 : (a + b - x)^2$. Porro OQ$^2 = (a - x)^2$ & QM$^2 =$ AB^2 (§. 535 *part.* I) $= a^2$. Quare (§. 417 *Geom.*)

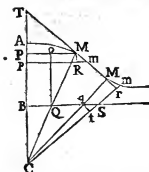
$$a^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \frac{y^2 (a - x)^2}{(a + b - x)^2}$$

$$2ax - x^2 = y^2 (a - x)^2 : (a + b - x)^2$$

$$\sqrt{(2ax - x^2)} = y(a - x) : (a + b - x)$$

$$y = \frac{a + b - x}{a - x} \sqrt{(2ax - x^2)}.$$

Habemus itaque elementum areæ PpmM $= ydx = \frac{(a + b - x)}{a - x} dx \sqrt{(2ax - x^2)}$, nec alia re opus eſt, quam ut $\sqrt{(2ax - x^2)}$ reſolvatur in ſeriem (§. 99 *part.* I), ſeries hæc porro ducatur in $a + b - x$ & factum tandem dividatur per $a - x$. Ita enim obtinetur ſeries, quæ ſingulis terminis in dx ductis exprimit elementum areæ atque eodem, quo ante, modo ſummatur. Ne calculus perplexus tirones turbet, ſumamus caſum ſimpliciſſimum, in quo eſt $b = a$, ideoque $a + b = 2a$, & ne $\sqrt{2}$ toties ſit ſcribenda, ponamus $2a = c$, ut ſit $a = \frac{1}{2}c$; erit $ydx = \frac{(c - x)}{\frac{1}{2}c - x} dx \sqrt{(cx - x^2)}$. Eſt autem $\sqrt{(cx - x^2)}$ ſemiordinata circuli, cujus diameter c, ideoque coincidit reſolutio in ſeriem cum ea, quam dedimus paulo ante (§. 124), niſi quod ibidem ſuppoſuerimus $c = 1$. Quoniam



niam tamen hic consultius est c retineri & in resolutione in gratiam operationum sequentium quædam notanda sunt; ideo non inconsultum ducimus vi theorematis *Nevvtoniani* (§. 99 *part.* 1) resolutionem ipsam instituere. Erit itaque

$$m = 1,\ n = 2,\ P = cx,\ Q = -x^2 : cx = -x : c = -c^{-1}x \text{ (§. 54. 55 part. 1)},$$

ideoque

$$P^{m:n} = c^{1:2}x^{1:2} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}c^{1:2}x^{1:2}\,.\,-c^{-1}x = -\frac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}\,.\,-\frac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2}\,.\,-c^{-1}x = -\frac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{1}{2}\,.\,-\frac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2}\,.\,-c^{-1}x = -\frac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}\,.\,-\frac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2}\,.\,-c^{-1}x = -\frac{5}{128}c^{-7:2}x^{9:2} \text{ \&c.}$$

Est itaque $\sqrt{(cx - x^2)} = c^{1:2}x^{1:2} - \frac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2} - \frac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2} - \frac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2} - \frac{5}{128}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Quodsi hanc seriem multiplices per $c - x$ & porro dividas per $\frac{1}{2}c - x$; prodibit $(c - x)\sqrt{(cx - x^2)} : (\frac{1}{2}c - x) = 2c^{1:2}x^{1:2} + c^{-1:2}x^{3:2} + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2} + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2} + \frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Multiplicatio & divisio modo ordinario instituitur. Etenim si seriem multiplices per c, prodit $c^{3:2}x^{1:2} - \frac{1}{2}c^{1:2}x^{3:2} - \frac{1}{8}c^{-1:2}x^{5:2} - \frac{1}{16}c^{-3:2}x^{7:2} - \frac{5}{128}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. in infinit. Si porro eandem ducas in $-x$, prodit $-c^{1:2}x^{3:2} + \frac{1}{2}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{1}{8}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{1}{16}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. Quodsi terminos homogeneos in unam summam colligas, obtinetur series $c^{3:2}x^{1:2} - \frac{3}{2}c^{1:2}x^{3:2} + \frac{3}{8}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{1}{16}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{3}{128}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. Hac porro divisa per $\frac{1}{2}c - x$ (§. 40 *part.* 1), prodit quotus $2c^{1:2}x^{1:2} + c^{-1:2}x^{3:2} + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2} + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2} + \frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c.

Est ideo elementum areæ Conchoidis $2c^{1:2}x^{1:2}dx + c^{-1:2}x^{3:2}dx + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2}dx + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2}dx + \frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}dx$ &c. in infinit.

Quare area $AMP = \frac{4}{3}c^{1:2}x^{3:2} + \frac{2}{5}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{11}{14}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{5}{4}c^{-5:2}x^{9:2} + \frac{723}{352}c^{-7:2}x^{11:2}$ &c. in infinit.

Problema 48.

139. *Invenire rationem, quam habent spatia curvilinea juxta axem eundem vel axes æquales descripta, semiordinatis correspondentibus rationem constantem habentibus.*

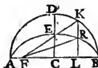
Sit elementum spatii curvilinei unius $= ydx$. Quoniam ordinatæ ad æquales partes axis continuo applicantur

per

per hypoth. erit elementum spatii alterius zdx, posita nempe semiordinata hujus z, abscissa communi x. Sed cum in singulis elementis eadem semper sit ratio ipsius y ad z *per hypoth.* erit $\int ydx : \int zdx = ydx : zdx$ (§. 187 *Arith.*) $= y : z$ (§. 181 *Arith.*).

Theorema. Spatia curvilinea æque alta habent rationem basium, quibus insistunt, si semiordinatæ correspondentes fuerint in ratione constante.

COROLLARIUM 1.



140. Quare si ARB fuerit semiellipsis, AKB semicirculus & KL ad AB perpendicularis; erit KL ad RL in ratione constante DC ad EC (§. 599 *part.* 1), ideoque segmentum circulare BKL ad segmentum ellipticum BRL ut KL ad RL.

COROLLARIUM 2.

141. Quodsi ex foco F ducantur rectæ FR & KF, eruunt quoque triangula FKL & FRL ut KL ad RL (§. 389 *Geom.*). Quamobrem sector circularis BFK est ad sectorem ellipticum RFB ut KL ad RL (§. 187 *Arith.*). Cum itaque KL : RL = CD : CE (§. 599 *part.* 1) & ut CD ad CE ita circulus integer ad ellipsin integram (§. 128); erit quoque sector KFB ad sectorem RFB ut circulus ad ellipsin (§. 167 *Arith.*); consequenter ut sector KFB ad aream integri circuli, ita sector RFB ad integram ellipsis aream (§. 173 *Arith.*).

SCHOLION.

142. *Quoniam sectores ex arcuum elementis derivantur; de iis quadrandis agemus capite sequente, ubi arcuum rectificatio docetur.*

CAPUT III.

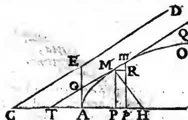
De Usu Calculi Integralis in Rectificatione Curvarum.

DEFINITIO 7.

143. **R***Ectificatio curvæ* est inventio rectæ, cui æqualis est linea curva.

COROLLARIUM.

144. Cum linea curva concipiatur constare ex innumeris lineolis rectis infinite exiguis; si una earum inveniatur per calculum differentialem, summa dabit longitudinem curvæ. Nimirum



cum ex superioribus constet, esse MR $= dx$, mR $= dy$ (§. 20); erit Mm seu elementum curvæ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quodsi itaque ex æquatione differentiali ad curvam specialem substituatur valor vel ipsius dx^2, vel ipsius dy^2; habetur elementum speciale: quod integratum prodit longitudinem curvæ.

SCHOLION.

145. *Interdum elementum curvæ commodius ex circumstantiis specialibus eruitur, prout exempla mox afferenda loquuntur.*

PROBLEMA 49.

146. *Parabolam rectificare.*

Pro parabola $adx = 2ydy$ (§. 21)

$$a^2dx^2 = 4y^2dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2)} = dy\sqrt{(a^2 + 4y^2)} : a.$$

Ut hoc elementum curvæ integrabile fiat, resolvatur in seriem infinitam

(§ 99 *part.* 1); erit in theoremate generali

$$n=2, m=1, P=a^2, Q=4y^2:a^2$$

$$P^{m:n}=a=A$$

$$\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}a.4y^2:a^2=2y^2:a=B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}.\frac{2y^2}{a}.\frac{4y^2}{a^2}=-\frac{2y^4}{a^3}=C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{3}{6}.-\frac{2y^4}{a^3}.\frac{4y^2}{a^2}=\frac{4y^6}{a^5}=D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}.\frac{4y^6}{a^5}.\frac{4y^2}{a^2}=-\frac{10y^8}{a^7}$$

&c. in infinitum.

Quare $dy\sqrt{(a^2+4y^2)}:a=dy+\frac{2y^2}{a^2}dy-\frac{2y^4}{a^4}dy+\frac{4y^6}{a^6}dy-\frac{10y^8}{a^8}dy$ &c. cujus integrale $y+\frac{2y^3}{3a^2}-\frac{2y^5}{5a^4}+\frac{4y^7}{7a^6}-\frac{10y^9}{9a^8}$ &c. in infinitum exprimit arcum parabolicum AM.

COROLLARIUM 1.

147. Sint AC & DC semiaxes conjugati hyperbolæ æquilateræ; erit $AC=DC=a$ (§. 505 *part.* 1). Sit $CQ=MP=2y$; erit (§. 534 *part.* 1) $QM=\sqrt{(4y^2+a^2)}$. Quodsi *qm* intelligatur ipsi QM infinite propinqua; erit $Qq=2dy$, ideoque elementum areæ $CQMA=2.dy\sqrt{(a^2+4y^2)}$. Pendet itaque rectificatio parabolæ a quadratura spatii hyperbolici CQMA.

COROLLARIUM 2.

148. Sit AMR parabola, cujus parameter AC, & circa communem axem descripta hyperbola æquilatera ANT, cujus axis 2CA. Si fiat $CQ=AV=KN=2PM$ & rectangulum COSA spatio curvilineo CQNA æquale; erit $\frac{2}{2}AS$ æqualis arcui AM (§ 146. 147), consequenter $SV=2AM-2PM$, seu differentia inter ordinatam & arcum respondentem, & $OSVQ=VNA$.

SCHOLION.

149. *Probe notandum est, omnes summationes reduci ad quadraturas curvarum, quocunque in casu iisdem utamur. Unde ut sint perfectæ, in omnibus observanda est regula supra tradita de quadraturis* (§. 109).

PROBLEMA 50.

150. *Rectificare parabolam secundi generis, ad quam* $ax^2=y^3$, *seu sumto* $a=1$, $x^2=y^3$.

Quoniam $x^2=y^3$

erit $2xdx=3y^2dy$

$4x^2dx^2=9y^4dy^2$

$dx^2=9y^4dy^2:4x^2=9y^4dy^2:4y^3=\frac{9}{4}ydy^2$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(\frac{9}{4}ydy^2+dy^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{(9ydy^2+4dy^2)}=\frac{1}{2}dy\sqrt{(9y+4)}$.

Ut elementum integrabile reddatur, fiat,

$\sqrt{(9y}$

$$\sqrt{(9y+4)} = v$$

erit

$$9y + 4 = v^2$$

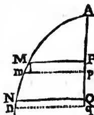
$$9dy = 2vdv$$

$$\tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y+4)} = \tfrac{1}{9}v^2 dv$$

$$\int \tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y+4)} = \tfrac{1}{27}v^3 = \tfrac{1}{27}(9y+4)\sqrt{(9y+4)}.$$

Ut vero summa exprimat longitudinem arcus, fiat $y=0$; erit residuum $= \frac{4}{27}\sqrt{4} = \frac{8}{27}$; ideoque arcus $\frac{1}{27}(9y+4)\sqrt{(9y+4)} - \frac{8}{27}$ (§. 109).

COROLLARIUM.



151. Sit parameter parabolæ Apolonianæ 1, AP $= 1$, PQ $= \frac{9}{4}y$; erit AQ $= \frac{9}{4}y + 1$ &, ob parametrum 1, $QN^2 = \frac{9}{4}y + 1 = (9y+4):4$ (§. 388 *part.* 1), consequenter QN $= \frac{1}{2}\sqrt{(9y+4)}$. Est ideo elementum QNnq spatii parabolici PMNQ $= \frac{1}{2}dy\sqrt{(9y+4)}$: quod divisum per 1 sive parametrum dat elementum arcus parabolæ secundi generis, ad quam $ax^2 = y^3$. Pendet ideo rectificatio a quadratura parabolæ Apollonianæ: quæ cum dari possit (§. 103), mirum non est, illam quoque rectificabilem esse.

PROBLEMA 51.

152. *Infinitas parabolas rectificare.*

Si parameter $= 1$, erit pro infinitis parabolis (§. 519 *part.* 1)

$$y^m = x$$

$$my^{m-1}dy = dx$$

$$m^2y^{2m-2}dy^2 = dx^2$$

h. e. posito ($r = 2n - 2$),

$$m^2y^r dy^2 = dx^2$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{(m^2y^r dy^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(m^2y^r+1)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $m^2y^r + 1$ extrahenda est radix per theorema generale (§. 99 *part.* 1); in quo erit

$$m = 1,\ n = 2,\ P = 1,\ Q = m^2y^r$$
$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\tfrac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}m^2y^r = B$$

$$\tfrac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}m^2y^r\cdot m^2y^r = -\tfrac{1}{2.4}m^4y^{2r} = C$$

$$\tfrac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}\cdot -\tfrac{1}{2.4}m^4y^{2r}\cdot m^2y^r = +\tfrac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r} = D$$

$$\tfrac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}\cdot m^2y^r = -\tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r} = E$$

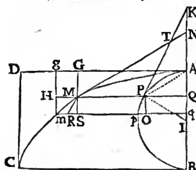
$$\tfrac{m-4n}{5n}EQ = -\tfrac{7}{10}\cdot -\tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}\cdot m^2y^r = +\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}$$ &c. in infinitum.

Habemus itaque $dy\sqrt{(1+m^2y^r)} = dy + \frac{1}{2}m^2y^r dy - \frac{1}{2.4}m^4y^{2r}dy + \frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}dy - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}dy$ &c. in infinitum, cujus integrale $y + \frac{1}{2(r+1)}m^2y^{r+1} - \frac{1}{2.4(2r+1)}m^4y^{2r+1} + \frac{1.3}{2.4.6(3r+1)}m^6y^{3r+1} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(4r+1)}m^8y^{4r+1} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(5r+1)}m^{10}y^{5r+1}$ &c. in infinitum indefinite exprimit arcum parabolicum cujuscunque generis.

Quodsi pro r substituatur valor ipsius $2m-2$; prodibit idem arcus $= y + \frac{1}{2(2m-1)}m^2y^{2m-1} - \frac{1}{2.4(4m-3)}m^4y^{4m-3} - \frac{1.3}{2.4.5(6m-5)}m^6y^{6m-5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(8m-7)}m^8y^{8m-7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(10m-9)}m^{10}y^{10m-9}$ &c. in infinitum.

PRO-

P R O B L E M A 52.



153. *Dato sinu* PQ *arcus* AP *invenire arcum* AP.

Sit radius $AI = 1$, $PQ = y$, $AQ = x$; erit (§. 377 *part.* 1)

$$2x - x^2 = y^2$$

$$2dx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = ydy : (1 - x)$$

$$dx^2 = y^2dy^2 : (1 - 2x + x^2) = y^2dy^2 : (1 - y^2)$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dy^2}{1 - y^2} + dy^2$$

$$= (y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2) : (1 - y^2) = dy^2 : (1 - y^2)$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy : \sqrt{(1 - y^2)} = dy(1 - y^2)^{-1:2}$$

Resolvatur hoc elementum in seriem infinitam per extractionem radicis vi theorematis generalis (§. 99 *part.* 1) in quo erit

$$m = -1,\ n = 2,\ P = 1,\ Q = -y^2$$

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}.1.-y^2 = \frac{1}{2}y^2 = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}.\frac{1}{2}y^2.-y^2 = \frac{1.3}{2.4}y^4 = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{6}.\frac{1.3}{2.4}y^4.-y^2 = \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7.1.3.5}{8.2.4.6}y^6.-y^2 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8$$

&c. in infinitum.

Est ideo $dy : \sqrt{(1 - y^2)} = dy + \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1.3}{2.4}y^4dy + \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8dy$ &c. in infinitum, cujus integrale $y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$ &c. est arcus AP, cujus sinus $PQ = y$, sinu toto existente 1. Si terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. & secundus multiplicetur per $\frac{1}{1}$, tertius per $\frac{3}{3}$, quartus per $\frac{3.5}{3.5}$, quintus per $\frac{3.5.7}{3.5.7}$ &c. cum sit

$$A = y$$

$$B = \frac{1}{2.3}y^3 = \frac{1.1}{2.3}Ay^2$$

$$C = \frac{1.3}{2.4.5}y^5 = \frac{1.3.3}{2.3.4.5}y^5 = \frac{3.3}{4.5}By^2$$

$$D = \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 = \frac{1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}y^7 = \frac{5.5}{6.7}Cy^2$$

$$E = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9 = \frac{1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}y^9 = \frac{7.7}{8.9}Dy^2 \text{ \&c.}$$

series inventa in hanc degenerat: $y + \frac{1.1}{2.3}Ay^2 + \frac{3.3}{4.5}By^2 + \frac{5.5}{6.7}Cy^2 + \frac{7.7}{8.9}Dy^2$ &c.

Si Cosinus $QI = x$; erit (§. 417 *Geom.*) $PQ = \sqrt{(1 - x^2)}$. Sit pq ipsi PQ infinite propinqua & PO ad pq perpendicularis cum anguli Q & q sint recti *per hypoth.* $PO = Qq = dx$ & $\triangle\triangle$ pOP atque PQI rectangula. Quare cum OPQ sit rectus (§. 230 *Geom.*) & pPI itidem rectus (§. 38); erit etiam $pPO = IPQ$ (§. 91 *Arith.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$PQ : PI = PO : Pp$$

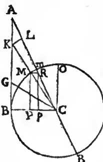
$$\sqrt{(1 - x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

Cum ideo hoc elementum coincidat cum anteriore, evidens est, si in serie anteriore pro y substituatur x, prodire seriem pro arcu, qui est illius complementum ad 90°.

COROL-

COROLLARIUM I.

154. Quoniam elementum arcus $Mm = dy : \sqrt{(1-y^2)}$, si $MC = 1$, $PM = y$ (§. 153); erit sector elementaris $MCm = dy : 2\sqrt{(1-y^2)}$ (§. 435 *Geom.*), consequenter sector BCM $= \frac{1}{2}\int dy : (\sqrt{1-y^2}) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4 \cdot 3}y^3 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 5}y^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}y^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}y^9$ &c. in infinitum.



COROLLARIUM 2.

155. Quodsi $MC = 1$, $PC = y$, erit denuo $Mm = dy : \sqrt{(1-y^2)}$ (§. 153), consequenter & $MCm = dy : 2\sqrt{(1-y^2)}$. Summa vero exhibet sectorem MCO.

COROLLARIUM 3.

156. Si fiat $y = 1$, sector BCM vel MCO degenerat in quadrantem, qui ideo erit $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{3}{4 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$ &c. sive $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{224} + \frac{35}{2304}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 53.

157. *Dato sinu verso (Vid. Fig. §. 153) AQ invenire arcum AP.*

Sit $AQ = x$, diameter $AB = 1$, erit $QP = \sqrt{(x - x^2)}$ (§. 377 *part. 1*) & *vi probl. praec.* $Pp = dx : 2\sqrt{(x-x^2)} = \frac{1}{2}dx(x-x^2)^{-1:2}$. Cum ideo sit in theoremate generali (§. 99 *part. 1*)

$m = -1$, $n = 2$, $P = x$, $Q = -x$; erit

$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$

$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}x^{-1:2} \cdot -x = \frac{1}{2}x^{1:2} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}x^{1:2} \cdot -x = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^{3:2} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^{3:2} \cdot -x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^{5:2} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^{5:2} \cdot -x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^{7:2}$ &c. in infinitum.

Hinc $\frac{1}{2}dx : \sqrt{(x-x^2)} = \frac{1}{2}x^{-1:2}dx + \frac{1}{4}x^{1:2}dx + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4}x^{3:2}dx + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 6}x^{5:2}dx + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum, cujus integrale $x^{1:2} + \frac{1}{2 \cdot 3}x^{3:2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^{5:2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^{7:2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}x^{9:2}$ &c. in infinitum, seu $\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}x^4\right.$ &c. in infinitum) exprimit arcum AP, quia $x^{1:2} = \sqrt{x}$.

PROBLEMA 54.

158. *Data tangente (Vid. Fig. §. 154) BK invenire arcum BM.*

Sit tangens $BK = x$, radius $BC = 1$, erit $Mm = dx : (1 + x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. in infinitum (§. 124). Hujus seriei summa $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. in infinitum dat arcum BM.

Cum tangens 45° sit radio aequalis (§. 32 *Trigon.*), si pro x ponatur 1; prodibit arcus 45° seu dimidius quadrans $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum, quae eadem series quadranti satisfacit, si diameter $= 1$.

PROBLEMA 53.

160. *Dato arcu (Vid. Fig. §. 154 BM invenire sinum PM.*

Sit sinus $PM = y$, radius $BC = 1$, arcus $BM = v$; erit $v = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum (§. 153). Valor ipsius y invenietur extrahendo radicem ex $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum. Est nimirum in theoremate generali (§. 366 *part. 1*) $a = 1$, $c = \frac{1}{6}$, $e = \frac{3}{40}$ &c. ideoque

$$v : a = v$$
$$-acv^3 : a^5 = -\tfrac{1}{6}v^3$$
$$+(3a^2c^2 - a^3e)v^5 : a^9 = (\tfrac{3}{36} - \tfrac{3}{40})v^5$$
$$= (\tfrac{1}{12} - \tfrac{3}{40})v^5$$
$$= \tfrac{40-36}{12.40}v^5$$
$$= \tfrac{4}{12.40}v^5 = \tfrac{1}{120}v^5.$$

Hinc $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5$ &c. in infinitum $= \frac{1}{1}v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5$ &c. in infinitum: unde lex progressionis manifesta est. Nimirum $y = v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c.

Quodsi theorema generale supponere non libet, reperietur valor ipsius y eodem modo, quo (§. 366 *part.* 1) theorema generale investigavimus. Sit nempe

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 + \&c.$$

erit (§. 95 *part.* 1)

$$y^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 + \&c.$$
$$+ 3a^2cv^7 + \&c.$$
$$y^5 = a^5v^5 + 5a^4bv^7 + \&c.$$
$$y^7 = a^7v^7 + \&c.$$

Habemus itaque

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \&c.$$
$$\tfrac{1}{6}y^3 = +\tfrac{1}{6}a^3v^3 + \tfrac{1}{2}a^2bv^5 + \tfrac{1}{2}ab^2v^7 \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{2}a^2cv^7$$
$$\tfrac{3}{40}y^5 = +\tfrac{3}{40}a^5v^5 + \tfrac{3}{8}a^4bv^7 \&c.$$
$$\tfrac{5}{112}y^7 = \tfrac{5}{112}a^7y^7 \&c.$$
$$-v = -v$$

$$a - 1 = 0 \qquad b + \tfrac{1}{6} = 0$$
$$a = 1 \qquad b = -\tfrac{1}{6}$$

$$c + \tfrac{1}{2}a^2b + \tfrac{3}{40}a^5 = 0$$

h. e. $c - \frac{1}{12} + \frac{3}{40} = 0$

$$c = \tfrac{1}{12} - \tfrac{3}{40} = \tfrac{40-36}{12.40} = \tfrac{1}{120}$$

$$d + \tfrac{1}{2}ab^2 + \tfrac{1}{2}a^2c + \tfrac{3}{8}a^4b + \tfrac{5}{112}a^7 = 0$$

h. e. $d + \frac{1}{72} + \frac{1}{240} - \frac{1}{16} + \frac{5}{112} = 0$

seu $d + \frac{1}{5040} = 0$

$$d = -\tfrac{1}{5040}$$

Nimirum $\frac{1}{72} + \frac{1}{240} = \frac{13}{720}$, $\frac{13}{720} - \frac{1}{16} = -\frac{2}{45}$ tandem $\frac{5}{112} - \frac{2}{45} = \frac{1}{5040}$. Habemus itaque ut ante $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5 - \frac{1}{5040}v^7$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 56.

161. *Dato arcus* BM *invenire tangentem* BK.

Sit tangens $= x$, radius $= 1$, arcus $= v$; erit (§. 158) $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. Unde eodem modo, quo in problemate præcedente, reperitur $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c. (§. 366 *part.* 1).

Est nimirum vi theorematis generalis $x = \frac{v}{a} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{14b^4 + 6a^2bd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^4}v^5$ &c.

Jam vero $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$, $e = \frac{1}{5}$ per legem comparationis, ideoque

$$-\tfrac{ac}{a^5} = -\tfrac{1}{3} \qquad 3a^2c^2 - a^3e = \tfrac{1}{5}$$
$$\text{h. e. } \tfrac{3}{9} - e = \tfrac{1}{5}$$
$$c = +\tfrac{1}{3} \qquad e = \tfrac{3}{9} - \tfrac{1}{5}$$
$$= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}$$
$$= \tfrac{5-3}{15} = \tfrac{2}{15}$$

Quare $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c.

Potest

Poteſt etiam valor ipſius x eodem modo inveniri, quo in problemate præcedente.

Ponamus nempe $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. erit (§. 95 *part.* 1)

$$x^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \text{ \&c.} + 3a^2cv^7 \text{ \&c.}$$
$$x^5 = + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \text{ \&c.}$$
$$x^7 = + a^7v^7 \text{ \&c.}$$

Habemus ideo ob

$$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c.} = v$$
$$-v = -v$$
$$x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3 = -\tfrac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{ \&c.} - a^2cv^7$$
$$+\tfrac{1}{5}x^5 = +\tfrac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{7}x^7 \quad -\tfrac{1}{7}a^7v^7 \text{ \&c.}$$

Quamobrem

$$\frac{a - 1 = 0}{a = 1} \quad \frac{b - \tfrac{1}{3} = 0}{b = \tfrac{1}{3}} \quad \frac{c - a^2b + \tfrac{1}{5}a^5 = 0}{c = b - \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}}$$
$$= \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$
$$\frac{d - ab^2 - a^2c + a^4b - \tfrac{1}{7}a^7 = 0}{d - \tfrac{1}{9} - \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7} = 0}$$
$$d = \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{9} = \frac{126 + 135 - 210}{945} = \frac{51}{945} = \frac{17}{315}.$$

His ergo valoribus coefficientium a, b, c, d &c. in æquatione aſſumtitia $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. ſubſtitutis, prodit $x = v + \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{2}{15}v^5 + \tfrac{17}{315}v^7$ &c.

SCHOLION.

162. *Me non monente apparet, ſi plures termini deſiderentur, aſſumtitiam quoque ex pluribus conflandam eſſe.*

PROBLEMA 57.

163. *Dato arcu* AP *invenire ſinum verſum* AQ.

Quodſi formulam deſideres, quam *Newtonus* dedit (a); radius ſupponi debet 1. In formula ſuperiori, quam pro arcu ex ſinu verſo eruimus (§. 157), diameter eſt 1. Quamobrem hæc prius eadem, qua ſupra uſi ſumus, methodo eruenda. Sit igitur AI = 1, AQ $= x$; erit AB = 2, PQ $= \sqrt{(2x - x^2)}$, & per demonſtrata (§. 153)

$$PQ : PI = PO : Pp$$
$$\sqrt{(2x - x^2)} : 1 = dx : Pp$$

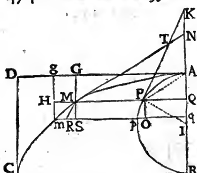
conſequenter $Pp = dx : \sqrt{(2x - x^2)} = dx(2x - x^2)^{-1:2}$ cumque ſit (§. 99 *part.* 1)

$m = -1$, $n = 2$, $P = 2x$, $Q = -x^2 : 2x = -\tfrac{1}{2}x$; erit

$$P^{m:n} = (2x)^{-1:2} = \frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}} = A$$
$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}} \cdot -\tfrac{1}{2}x = + \frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}} = B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4} \cdot \frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}} \cdot -\tfrac{1}{2}x = + \frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}} = C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6} \cdot \frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}} \cdot -\tfrac{1}{2}x = + \frac{5x^{5:2}}{128\sqrt{2}}$$

&c.

(a) In Epiſtola ad *Leibnitium*, quæ legitur apud *Wallisium* Vol. III. Oper. f. 625.



Est itaque $Pp = \frac{x^{-1:2}dx}{\sqrt{2}} + \frac{x^{1:2}dx}{4\sqrt{2}} + \frac{3x^{3:2}dx}{32\sqrt{2}} + \frac{5x^{5:2}dx}{128\sqrt{2}}$ &c.
ideoque arcus $AP = \frac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}} + \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

Nam $\frac{x^{3:2}}{4\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{2x^{3:2}}{3\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}}$

$\frac{3x^{5:2}}{32\sqrt{2}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{2\cdot 3x^{5:2}}{5\cdot 32\sqrt{2}} = \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}}$

$\frac{5x^{7:2}}{128\sqrt{2}\cdot\frac{7}{2}} = \frac{2\cdot 5x^{7:2}}{128\cdot 7\sqrt{2}} = \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$.

Sit jam $AP = v$,

erit $v = \frac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}} + \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

ideoque

$$v^2 = \frac{4x}{2} + \frac{4x^2}{2\cdot 6} + \frac{x^3}{2\cdot 36} \text{ \&c.} + \frac{4\cdot 3x^3}{2\cdot 80}$$

hoc est, $v^2 = 2x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{72}x^3 + \frac{3}{40}x^3$

Ponatur

$$x = av^2 + bv^4 + cv^6 \text{ \&c.}$$

erit $x^2 = a^2v^4 + 2abv^6$
$x^3 = + a^3v^6$

ideoque

$$2x = 2av^2 + 2bv^4 + 2cv^6 \text{ \&c.}$$
$$+ \tfrac{1}{3}x^2 = + \tfrac{1}{3}a^2v^4 + \tfrac{2}{3}abv^6$$
$$+ \tfrac{1}{72}x^3 = + \tfrac{1}{72}a^3v^6$$
$$+ \tfrac{3}{40}x^3 = + \tfrac{3}{40}a^3v^6.$$
$$- v^2 = - v^2$$

Quamobrem

$2a - 1 = 0$
$2a = 1$
$a = \frac{1}{2}$

$2b + \frac{1}{3}a^2 = 0$
$2b = -\frac{1}{3}a^2$
$b = -\frac{1}{6}a^2$
$= -\frac{1}{6.4} = -\frac{1}{24}$

$2c + \frac{2}{3}ab + \frac{1}{72}a^3 + \frac{3}{40}a^3 = 0$

$c = -\frac{1}{3}ab - \frac{1}{144}a^3 - \frac{3}{80}a^3$

$-\frac{1}{3}ab = + \frac{1}{144} = + \frac{8}{144\cdot 8}$

$-\frac{1}{144}a^3 = -\frac{1}{144\cdot 8}$

$-\frac{1}{3}ab - \frac{1}{144}a^3 = \frac{7}{144\cdot 8} = \frac{7}{1152}$

$-\frac{3}{80}a^3 = -\frac{3}{80\cdot 8} = -\frac{3}{640}$

$c = \frac{4480 - 3456}{1152\cdot 640}$
$= \frac{1024}{1152\cdot 640}$
$= \frac{16}{1152\cdot 10} = \frac{1}{720}$

Est igitur $x = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{24}v^4 + \frac{1}{720}v^6$ &c. Enimvero $2 = 1\cdot 2$, $24 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$, $720 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$. Quare $x = \frac{1}{1\cdot 2}v^2 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v^4 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}v^6$ &c. Quodsi jam terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C &c. erit $x = \frac{1}{1\cdot 2}v^2 - \frac{1}{3\cdot 4}Av^2 + \frac{1}{5\cdot 6}Bv^2 - \frac{1}{7\cdot 8}Cv^2$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

164. Quoniam radius $= 1$, erit sinus complementi seu cosinus arcus $v = 1 - \frac{1}{1\cdot 2}v^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}v^6 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}v^8$ &c.

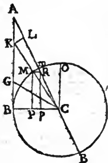
COROL-

COROLLARIUM 2.

165. Si $1 - \frac{1}{1 \cdot 2}v^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}v^4$, sive $1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$ praxi satisfacit pro sinu complementi arcus, & cosinus iste dicatur c; erit $c = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$, consequenter $v = \sqrt{(6 + \sqrt{(24c + 12)})}$ (§. 143 *part.* 1)

PROBLEMA 58.

166. *Dato arcu* BM *invenire secantem* KC.



Sit BC $= 1$, arcus $= v$, erit KB $= v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 +$ &c. (§. 161) ideoque BC$^2 = 1$, KB$^2 = v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6$ &c. consequenter (§. 417 *Geom.*) ob $\frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6 = \frac{17}{45}v^6$, KC$^2 = 1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c. Quodsi inde radix vulgari modo extrahatur, prodit KG $= 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{24}v^4 + \frac{61}{720}v^6$ &c. quemadmodum typus exempli ostendit.

$$1 + v^2 + \tfrac{2}{3}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}$$
$$1$$
$$\overline{\quad + v^2 + \tfrac{2}{3}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}}$$
$$(2)$$
$$+ v^2 + \tfrac{1}{4}v^4$$
$$\overline{\quad + \tfrac{5}{12}v^4 + \tfrac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}}$$
$$(2 + v^2)$$
$$+ \tfrac{5}{12}v^4 + \tfrac{5}{24}v^6 \text{ \&c.}$$
$$\overline{\quad + \tfrac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}}$$
$$(2 + v^2 + \tfrac{5}{12}v^4)$$
$$+ \tfrac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}$$
$$\overline{\quad \text{\&c. \&c.}}$$

SCHOLION.

167. *Seriem pro sinu & sinu verso ex arcu atque pro arcu ex iisdem determinando invenit* Newtonus (a); *seriem pro tangente & secante ex arcu, atque arcu ex tangente determinando* Jacobus Gregorius (b). *Existimavit autem* Leibnitius *series istas Trigonometriam canonicam ad quantamcunque exactitudinem in numeris a Tabularum necessitate liberare.*

PROBKEMA 59.

168. *Rectificare cycloidem.*

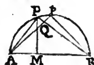
Sit AQ $= x$ (*Vid. Fig. pag. anteced.*), AB $= 1$, erit Qq $=$ MS $= dx$, PQ $= \sqrt{(x - x^2)}$ (§. 377 *part.* 1), & hinc AP $= \sqrt{x} = x^{1:2}$ (§. 417 *Geom.*), consequenter ob △△ APQ & MmS similitudinem supra demonstratam (§. 131)

$$\text{AQ} : \text{AP} = \text{MS} : \text{M}m$$
$$x : x^{1:2} = dx : x^{-1:2}dx$$

Est ergo Mm, differentiale arcus Cycloidici AM, $= x^{-1:2}dx$. Unde $\int x^{-1:2}dx = 2x^{1:2} = 2$AP est arcus AM, seu arcus Cycloidis AM est chordæ arcus circuli genitoris ipsi respondentis AP duplus.

PROBLEMA 60.

169. *Data chorda arcus* AP *invenire arcum cognominem, quem subtendit.*



Sit AB $= 1$, AP $= x$: cum angulus APB sit rectus (§. 317 *Geom.*), erit PB $= \sqrt{(1 - x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Sit porro Ap ipsi AP infinite propinqua. Quoniam angulus AQB $=$ APB $+$ PAp (§. 239 *Geom.*) & ipsius PAp mensura est $\frac{1}{2}$Pp (§. 314 *Geom.*); erit AQB $=$ APB (§. 4), consequenter rectus (§. 145 *Geom.*). Est igitur & PQp $=$ AQB (§. 156 *Geom.*) rectus (§. 145

Geom.)

(a) Vide Commercium epistolicum D. Joh. Collin pag. 40. 53.
(b) Ibidem pag. 45.

Geom.) itidemque AQP rectus (§. 65 *Geom.*) ideoque ipsi APQ æqualis (§. 145 *Geom.*), & hinc AP $=$ AQ (§. 255. 89 *Geom.*), consequente Qp differentiale chordæ AP (§. 6) $= dx$. Porro anguli PAB mensura est arcus dimidius PB & anguli QPp mensura $\frac{1}{2}p$B (§. 314 *Geom.*): quare cum arcus PB & pB ob infinite parvum Pp sint æquales (§. 4), erit angulus PAB $=$ QPp (§. 141 *Geom.*). Habemus itaque (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AB = pQ : Pp$$
$$\sqrt{(1-x^2)} : 1 = dx : Pp$$

ideoque $Pp = dx : \sqrt{(1-x^2)}$ & hinc porro arcus $AP = \int dx : \sqrt{(1-x^2)}$. Eadem igitur formula satisfacit arcui AP ex corda cognomine determinando, quam supra invenimus pro eodem ex sinu PM determinando (§. 153), nimirum arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9$ &c. in infinitum.

Quodsi $PB = x$, erit $PQ = dx$ & $AP = \sqrt{(1-x^2)}$, atque eodem prorsus modo reperitur arcus $PB = \int dx : \sqrt{(1-x^2)}$, ut ideo eadem series satisfaciat utrique arcui AP & PB inveniendo.

P R O B L E M A 61.

170. *Data chorda arcus* AP (*Vid. Fig. anteced.*) *invenire segmentum circuli cognomine.*

Sit diameter circuli $AB = 1$, chorda $AP = x$, erit per demonstrata in problemate præcedente $PB = \sqrt{(1-x^2)}$ & $pQ = dx$, necnon $\triangle APB \sim \triangle PQp$: erit etiam (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AP = pQ : PQ$$
$$\sqrt{(1-x^2)} : x = dx : PQ$$

ideoque $PQ = x\,dx : \sqrt{(1-x^2)}$, consequenter cum PQ haberi possit pro arcu infinite parvo ex centro A radio AP descripto (§. 38), ideoque APQ pro sectore circulari, erit $APQ = x^2 dx : 2\sqrt{(1-x^2)}$ (§. 435 *Geom.*) $= \frac{1}{2}x^2 dx (1-x^2)^{-1:2}$.

Est vero $(1-x^2)^{-1:2}$ seu $1 : \sqrt{(1-x^2)}$ $= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8$ &c. (§. 153), ideoque

$$APQ = \tfrac{1}{2}x^2 dx (1-x^2)^{-1:2} = \tfrac{1}{2}x^2 dx + \tfrac{1}{4}x^4 dx + \tfrac{1.3}{4.4}x^6 dx + \tfrac{1.3.5}{4.4.6}x^8 dx + \tfrac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{10} dx \text{ \&c. in infinitum.}$$

Ergo segmentum circuli $AP = \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{4.5}x^5 + \frac{1.3}{4.4.7}x^7 + \frac{1.3.5}{4.4.6.9}x^9 + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.11}x^{11}$ &c. in infinitum.

P R O B L E M A 62.

171. *Dato arcu* AP (*Vid. Fig. anteced.*) *invenire chordam cognominem.*

Sit diameter circuli $AB = 1$, chorda $AP = x$, erit arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. (§. 169). Dicatur idem arcus v, erit $v = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. ideoque chorda $AP = x = v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c. in infinitum, ut supra (§. 160).

Quodsi diameter dicatur d, non 1, reperietur arcus $AP = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5d^4}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}x^7$ &c. & vicissim chor-

chorda AP $= v - \frac{1}{1.2.3d^2}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5d^4}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7d^6}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9d^8}v^9$ &c. id quod calculos ſuperiores repetenti apparet.

PROBLEMA 63.

172. *Rectificare arcum ellipſis* GM. Sit CG$=c$, AC$=a$, PC$=x$, PM $=y$, erit (§. 432 *part.* 1)

$$a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2$$
$$2a^2ydy = -2c^2xdx$$
$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$
$$dy^2 = \frac{c^4x^2dx^2}{a^4y^2}$$
$$= \frac{c^4x^2dx^2}{a^4c^2-a^2c^2x^2} = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4-a^2x^2}$$
$$dx^2+dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4-a^2x^2}$$
$$= \frac{a^4dx^2-a^2x^2dx^2+c^2x^2dx^2}{a^4-a^2x^2}$$
$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4-a^2x^2+c^2x^2)}}{\sqrt{(a^4-a^2x^2)}}$$
$$= \frac{dx\sqrt{(a^4-a^2x^2+c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

Ut elementum hoc integrabile reddatur, tam numerator $\sqrt{(a^4-a^2x^2+c^2x^2)}$, quam denominator $a\sqrt{(a^2-x^2)}$, reſolvendus eſt in ſeriem, & ſeries prior per poſteriorem dividenda eo modo, quem mox ſubjiciemus. Eſt itaque (§. 99 *part.* 1) in caſu primo $m=1, n=2, P=a^4, Q=-(a^2+c^2)x^2:a^4$

Fiat $a^2-c^2=b^2$ ob commoditatem calculi, erit $Q=-b^2x^2:a^4$.

Unde porro obtinetur

$$P^{m:n} = a^2 = A$$
$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}.a^2.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^2x^2}{2a^2} = B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}.-\frac{b^2x^2}{2a^2}.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^4x^4}{8a^6} = C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{1}{6}.-\frac{b^4x^4}{8a^6}.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^6x^6}{16a^{10}} = D$$
$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{1}{8}.-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \text{ \&c.}$$

Eſt itaque $\sqrt{(a^4-b^2x^2)} = \sqrt{(a^4-a^2x^2+c^2x^2)} = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$ &c. in infinitum $=$ K

Enimvero $\sqrt{(a^2-x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. in infinit. (§. 126)

Quare $a\sqrt{(a^2-x^2)} = a^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$ &c. in infinit. $=$ L.

Seriem ideo primam K per alteram L diviſurus probe obſervare debes omnes terminos in diviſione emergentes, in quibus x ad eandem dimenſionem aſſurgit, haberi pro uno, cum pro coefficientibus omnibus ſimul ſumtis ſubſtitui poſſit unus, qualis etiam in caſu ſingulari revera prodiret, ubi a & b in numeris dantur, ſi fractiones ad eandem denominationem reductæ in unam ſummam colligerentur. Quamobrem terminus unuſquiſque dividendæ dividitur per a^2, quotcunque partibus fuerit auctus in

ipſo

ipſo diviſionis actu, & integra ſeries dividens ducitur in quotum, atque a dividenda ſubtrahitur quemadmodum in communi diviſione fieri ſolet; id quod ex typo exempli ſubjecti attento lectori obvium.

$$K = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$L = a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$\text{Reſid. I.} - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$+ \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{16a^4} + \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$L.B = -\frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{16a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$
$$+ \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{x^8}{32a^6}$$

$$\text{Reſid. II.} \quad - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$- \frac{b^2x^4}{4a^4} - \frac{b^2x^6}{16a^6} - \frac{b^2x^8}{32a^8}$$
$$+ \frac{3x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{9x^8}{128a^6}$$

$$L.C = - \frac{b^4x^4}{8a^6} + \frac{b^4x^6}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$- \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{8a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$
$$+ \frac{3x^4}{8a^2} - \frac{3x^6}{16a^4} - \frac{3x^8}{64a^6}$$

$$\text{Reſid. III.} = - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$- \frac{b^4x^6}{16a^8} - \frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$- \frac{3b^2x^6}{16a^6} - \frac{b^2x^8}{16a^8}$$
$$+ \frac{5x^6}{16a^4} + \frac{15x^8}{128a^6}$$

$$L.D = - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} + \frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$- \frac{b^4x^6}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{32a^{10}}$$
$$- \frac{3b^2x^6}{16a^6} + \frac{3b^2x^8}{32a^8}$$
$$+ \frac{5x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{32a^6}$$

A. B. C. D. E.

$$1 - \frac{b^2x^2}{2a^4} - \frac{b^4x^4}{8a^8} - \frac{b^6x^6}{16a^{12}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{16}}$$
$$+ \frac{x^2}{2a^2} - \frac{b^2x^4}{4a^6} - \frac{b^4x^6}{16a^{10}} - \frac{b^6x^8}{32a^{14}}$$
$$+ \frac{3x^4}{8a^4} - \frac{3b^2x^6}{16a^8} - \frac{3b^4x^8}{64a^{12}}$$
$$+ \frac{5x^6}{16a^6} - \frac{5b^2x^8}{32a^{10}}$$
$$+ \frac{35x^8}{128a^8}$$

Reſid.

Resid. IIII.

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^6}$$

&c. &c.

Substituatur jam valor ipsius b. Quoniam

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4$$
$$b^6 = a^6 - 3a^4c^2 + 3a^2c^4 - c^6$$
$$b^8 = a^8 - 4a^6c^2 + 6a^4c^4 - 4a^2c^6 + c^8$$

erit

1.

$$-\frac{b^2x^2}{2a^4} = -\frac{x^2}{2a^2} + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$+\frac{x^2}{2a^2} = +\frac{x^2}{2a^2}$$
$$B = +\frac{c^2x^2}{2a^4}$$

2.

$$-\frac{b^4x^4}{8a^8} = -\frac{x^4}{8a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^6} = -\frac{x^4}{4a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^4} = +\frac{3x^4}{8a^4}$$
$$C = +\frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

3.

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{12}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8} - \frac{3c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^{10}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{c^2x^6}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{16a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^8} = -\frac{3x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^6} = +\frac{5x^6}{16a^6}$$
$$D = +\frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

4.

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{16}} = -\frac{5x^8}{128a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{30c^4x^8}{128a^{12}} + \frac{5c^6x^8}{32a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{14}} = -\frac{x^8}{32a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{32a^{12}} + \frac{c^6x^8}{32a^{14}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{12}} = -\frac{3x^8}{64a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{64a^{12}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^{10}} = -\frac{5x^8}{32a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^8} = +\frac{35x^8}{128a^8}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Habemus itaque

$$A = 1$$
$$B = \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$C = \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$D = \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Quamobrem prolixo satis calculo, quem tamen distincte hic explicari consultum fuit, ut sit exemplar in casibus similibus, tandem reperitur.

$\sqrt{(a^4}$

$$\frac{\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$

$$1 + \frac{c^2x^2}{2a^4} + \frac{c^2x^4}{2a^6} + \frac{c^2x^6}{2a^8} + \frac{c^2x^8}{2a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^4}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Est igitur elementum arcus

$$\frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} = dx +$$
$$\frac{c^2x^2dx}{2a^4} + \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} + \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} - \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

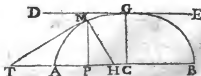
&c. in infinitum.

Tandem ideo arcus $GM = x$

$$+ \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} + \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} - \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} + \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

Quodsi terminorum homogeneorum coefficientes reducas ad eandem denominationem; erit $GM = x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{4a^2c^2 - c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 - 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7 + \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 + 24a^2c^6 - 5c^8}{1152a^{16}}x^9$.

C o r o l l a r i u m 1.



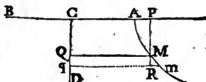
173. Quodsi ponamus esse $GC : AC = 1 : m$, ideoque $AC = mc$; erit $GM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 + \frac{4m^2 - 1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4 - 4m^2 + 1}{112m^{12}c^6}x^7 + \frac{64m^6 - 48m^4 + 24m^2 - 5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Quare si species ellipsis in casu dato determinetur, hoc est, m per numerum determinatum explicetur; prodibit series multo simplicior. Sit enim $m = 2$; erit $GM = x + \frac{1}{96c^2}x^3 + \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7 + \frac{3419}{75497472c^8}x^9$ &c.

C o r o l l a r i u m 2.

174. Quodsi $c = a$, ellipsis degenerat in circulum & series pro circulo evadit $x + \frac{x^3}{6a^2} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{1152a^8}$ &c. hoc est, si $a = 1$, series $= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$, &c. prorsus ut supra (§. 153).

P r o b l e m a 64.



175. *Rectificare arcum hyperbolae* AM.

Sit $BC = AC = c$, $CQ = PM = x$, dimidius axis conjugatus $= a$, $CP = y$; erit $BP = y + c$, $AP = y - c$,

$$AP \cdot PB = y^2 - c^2;$$

Quare (§. 469 *part.* 1)

$$a^2 : c^2 = x^2 : y^2 - c^2$$
$$a^2y^2 - a^2c^2 = c^2x^2$$
$$a^2y^2 = a^2c^2 + c^2x^2$$
$$2a^2ydy = 2c^2xdx$$
$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$

h. e.

h. e. $a^4c^2dy^2 + a^2c^2x^2dy^2 = c^4x^2dx^2$

$$a^4dy^2 + a^2x^2dy^2 = c^2x^2dx^2$$

$$dy^2 = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$

$$= \frac{a^4dx^2 + a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 + a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

Elementum hoc nonnisi signis differt ab elemento ellipsis (§. 172). Quamobrem eodem prorsus modo, quo in problemate præcedente, reperitur elementum arcus $Mm = dx$

$$\frac{c^2x^2dx}{2a^4} - \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} - \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} + \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} - \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

Quare arcus AM =

$$+ \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} - \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} + \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} - \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

hoc est, reductione coefficientium in eodem termino ad eandem denominationem facta, $x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{4a^2c^2 - c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 + 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7 - \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 - 24a^2c^6 - 5c^8}{1152a^{16}}x^9$ &c.

Quodsi denuo hyperbolæ axes ponantur inter se ut 1 ad m, hoc est, si sit $a = mc$, reperietur arcus $AM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 - \frac{4m^2 - 1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4 + 4m^2 + 1}{112m^{12}c^6}x^7 - \frac{64m^6 - 48m^4 - 24m^2 - 5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Et si species hyperbolæ determinetur, explicando m per numerum determinatum, erit $AM = x + \frac{1}{96c^2}x^3 - \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7 - \frac{3419}{75497472c^8}x^9$ &c.

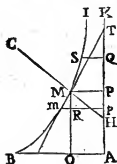
Series ideo pro arcu hyperbolico a serie pro arcu elliptico non differt nisi signis.

Corollarium.

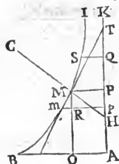
176. Si hyperbola fuerit æquilatera, erit $c = a$ & series pro arcu AM multo simplicior evadit. Est nempe $= x + \frac{x^3}{6a^2} - \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{13x^7}{112a^6} - \frac{141x^9}{1152a^8}$ &c.

Problema 65.

177. *Rectificare Logarithmicam.*



Sit curvæ subtangens $= a$, $PM = y$, $Pp = dx$, erit (§. 54) $\frac{ydx}{dy}$



$\frac{ydx}{dy} = a$

$ydx = ady$

$dx = \frac{ady}{y}$

$dx^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$

$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2} + dy^2$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(\frac{a^2}{y^2} + 1)}$

Ut elementum hoc mM integrabile reddatur, ex $a^2 : y^2 + 1$ extrahenda est radix. Erit itaque in theoremate generali (§. 99 *part.* 1)

$m = 1, n = 2, P = \frac{a^2}{y^2}, Q = 1 : \frac{a^2}{y^2} = \frac{y^2}{a^2}$

$P^{m:n} = \frac{a}{y} = A$

$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{y} \cdot \frac{y^2}{a^2} = \frac{y}{2a} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y}{2a} \cdot \frac{y^2}{a^2} = -\frac{y^3}{8a^3} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{y^3}{8a^3} \cdot \frac{y^2}{a^2} = +\frac{y^5}{16a^5} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{y^5}{16a^5} \cdot \frac{y^2}{a^2} = -\frac{5y^7}{128a^7}$ &c.

Est itaque $\sqrt{(\frac{a^2}{y^2} + 1)} = \frac{a}{y} + \frac{y}{2a} - \frac{y^3}{8a^3} + \frac{y^5}{16a^5} - \frac{5y^7}{128a^7}$ &c. in infinitum.

Eadem series prodit, si ex $\sqrt{(a^2 + y^2)}$ extrahatur radix (§. *cit.*) &, quae provenit, $a + \frac{y^2}{2a} - \frac{y^4}{8a^3} + \frac{y^6}{16a^5} - \frac{5y^8}{128a^7}$ porro dividatur per y. Habemus itaque elementum Mm arcus interminati MI $= \frac{ady}{y} + \frac{ydy}{2a} - \frac{y^3dy}{8a^3} + \frac{y^5dy}{16a^5} - \frac{5y^7dy}{128a^7}$ &c.

Quare arcus MI $= \int\frac{ady}{y} + \frac{y^2}{4a} - \frac{y^4}{32a^3} + \frac{y^6}{96a^5} - \frac{5y^8}{1024a^7}$ &c.

Ponatur SQ $= z$, erit arcus interminatus SI $= \int\frac{adz}{z} + \frac{z^2}{4a} - \frac{z^4}{32a^3} + \frac{z^6}{96a^5} - \frac{5z^8}{1024a^7}$ &c.

Est igitur arcus MS $= \int\frac{ady}{y} - \int\frac{adz}{z} + \frac{y^2 - z^2}{4a} - \frac{y^4 + z^4}{32a^3} + \frac{y^6 - z^6}{96a^5} - \frac{5y^8 + 5z^8}{1024a^7}$ &c.

$\int\frac{ady}{y} - \int\frac{adz}{z}$ est spatium hyperbolicum asymptoticum inter duas semiordinatas $a^2 : y$ & $a^2 : z$ comprehensum, & per a divisum (§. 118).

Est autem a latus potentiae hyperbolae, y & z sunt abscissae in asymptoto sumtae (§. 488 *part.* 1). Pendet ideo rectificatio curvae logarithmicae a quadratura hyperbolae, quae per series infinitas in superioribus data (§. 120).

Potest etiam alia adhuc ratione extrahi radix. Nimirum poni potest $P = 1$, $Q = \frac{a^2}{y^2} = a^2y^{-2}$. Quare cum sit ut ante $m = 1$, $n = 2$; erit

$P^{m:n}$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}.1.a^2y^{-2} = \frac{1}{2}a^2y^{-2} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}.\frac{1}{2}a^2y^{-2}.a^2y^{-2} =$
$-\frac{1}{8}a^4y^{-4} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}.-\frac{1}{8}a^4y^{-4}.a^2y^{-2} =$
$+\frac{1}{16}a^6y^{-6} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}.\frac{1}{16}a^6y^{-6}.a^2y^{-2} =$
$-\frac{5}{128}a^8y^{-8}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dy + \frac{1}{2}a^2y^{-2}dy - \frac{1}{8}a^4y^{-4}dy + \frac{1}{16}a^6y^{-6}dy - \frac{5}{128}a^8y^{-8}dy$ &c. in infinitum.

Quare longitudo curvæ $= y - \frac{1}{2}a^2y^{-1} + \frac{1}{24}a^4y^{-3} - \frac{1}{80}a^6y^{-5} + \frac{5}{896}a^8y^{-7}$ &c. $= y - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{5a^8}{896y^7}$ &c.

Sit jam alia semiordinata $SQ = z$, erit longitudo curvæ $= z - \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

Ergo arcus inter semiordinatas y & z interceptus $MS = y - z - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896y^7} - \frac{5a^8}{856z^7}$ &c.

COROLLARIUM.

178. Quoniam series istæ satisfaciunt quæsito, quatenus convergunt, & termini continuo minores fiunt (§. 53 *part.* 1), in Logarithmica autem y continuo fit minor, ita ut tandem infra subtangentem a decrescat; serie prima utendum est, si $a > y$; posteriori autem si $y > a$.

PROBLEMA 66.

179. ***Rectificare hyperbolam ex æquatione ad hyperbolam intra asymptotos.***

Quoniam $xy = a^2$ (§. 488 *part.* 1), erit $y = a^2 : x = a^2x^{-1}$

$dy = -a^2x^{-2}dx$

$dy^2 = a^4x^{-4}dx^2$

$dy^2 + dx^2 = dx^2 + a^4x^{-4}dx^2$

$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx\sqrt{(1 + a^4x^{-4})}$

Elementum hoc arcus hyperbolici non multum differt ab elemento arcus logarithmicæ (§. 177).

Vi theorematis generalis (§. 99 *part.* 1)

$m = 1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = a^4x^{-4}$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}.1.a^4x^{-4} = \frac{1}{2}a^4x^{-4} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}.\frac{1}{2}a^4x^{-4}.a^4x^{-4} = -$
$\frac{1}{2.4}a^8x^{-8} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}a^8x^{-8}.a^4x^{-4} =$
$+\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}.\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}.a^4x^{-4}$
$= -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dx + \frac{1}{2}a^4x^{-4}dx - \frac{1}{2.4}a^8x^{-8}dx + \frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16}dx$ &c. consequenter longitudo curvæ $= x - \frac{1}{2.3}a^4x^{-3} + \frac{1}{2.4.7}a^8x^{-7} - \frac{1.3}{2.4.6.11}a^{12}x^{-11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15}a^{16}x^{-15}$ &c. $= x - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}}$ &c. in infinitum.

Quodsi alia abscissa sit z; erit longitudo curvæ $z - \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c.

 Arcus

Arcus igitur inter semiordinatas abscissis x & z respondentes interceptus $= x - z - \frac{a^4}{2 \cdot 3x^3} + \frac{a^4}{2 \cdot 3z^3} + \frac{a^8}{2 \cdot 4 \cdot 7x^7} - \frac{a^8}{2 \cdot 4 \cdot 7z^7} - \frac{1 \cdot 3a^{12}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 11x^{11}} + \frac{1 \cdot 3a^{12}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 11z^{11}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5a^{16}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 15x^{15}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5a^{16}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 15z^{15}}$ &c. in infinitum.

Eadem prorsus series prodit, si in elemento curvæ generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituatur valor ipsius dx^2, ut elementum curvæ speciale evadat $dy \sqrt{(1 + a^4 y^{-4})}$. Enimvero cum y continuo decrescat, nec unquam sit major latere potentiæ a; series hæc altera parum convergit.

Quodsi a dicatur 1, erit series pro arcu intercepto $x - z - \frac{1}{2 \cdot 3x^3} + \frac{1}{2 \cdot 3z^3} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 7x^7} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 7z^7} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 11x^{11}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 11z^{11}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 15x^{15}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 15z^{15}}$ &c. in infinitum $= x - z - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{56x^7} - \frac{1}{56z^7} - \frac{1}{176x^{11}} + \frac{1}{176z^{11}} + \frac{5}{1920x^{15}} - \frac{5}{1920z^{15}}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 67.

180. *Data area hyperbolæ intra asymptotos, invenire abscissam eidem respondentem.*

Sit area hyperbolæ $= t$, abscissa a fine lateris potentiæ hyperbolæ computata $= x$, erit (§. 120)

$$t = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \text{ \&c.}$$

Fiat $x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$ &c.

erit

$$x^2 = + a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4 + 2act^4$$

$$x^3 = + a^3t^3 + 3a^2bt^4$$

$$x^4 = + a^4t^4$$

ideoque

$$x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4 \text{ \&c.}$$

$$-\tfrac{1}{2}x^2 = -\tfrac{1}{2}a^2t^2 - abt^3 - \tfrac{1}{2}b^2t^4 - act^4$$

$$+\tfrac{1}{3}x^3 = +\tfrac{1}{3}a^3t^3 + a^2bt^4$$

$$-\tfrac{1}{4}x^4 = -\tfrac{1}{4}a^4t^4$$

$$-t = -t$$

Habemus itaque

$$a - 1 = 0 \qquad a = 1$$

$$b - \tfrac{1}{2}a^2 = 0 \qquad b = \tfrac{1}{2}$$

$$c - ab + \tfrac{1}{3}a^3 = 0$$

h. e. $c - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$

$$c = \tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6}$$

$$d - \tfrac{1}{2}b^2 - ac + a^2b - \tfrac{1}{4}a^4 = 0$$

h. e. $d - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$

$$d = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{24} - \tfrac{6}{24} = \tfrac{1}{24}$$

Est igitur $x = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4$ &c. $= \frac{1}{1}t + \frac{1}{1 \cdot 2}t^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}t^4 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}t^5$ &c. in infinitum. Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $x = t + \frac{1}{2}At + \frac{1}{3}Bt + \frac{1}{4}Ct + \frac{1}{5}Dt$ &c. in infinitum.

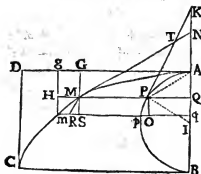
SCHOLION.

181. *Eodem prorsus modo in aliis casibus inveniri potest basis, si figuræ area datur per seriem infinitam, ut pluribus exemplis non sit opus.*

PROBLEMA 68.

182. *Quadrare Cycloidem ex supposita arcus circuli rectificatione vi sinus versi.*

In



In Cycloide est arcus AP = PM (§. 575 *part.* 1). Jam si AQ = x, arcus AP (§. 157), consequenter

$$PM = x^{1:2} + \tfrac{1}{6}x^{3:2} + \tfrac{1}{40}x^{5:2} + \tfrac{1}{112}x^{7:2} \text{ \&c.}$$
$$PQ = x^{1:2} - \tfrac{1}{2}x^{3:2} - \tfrac{1}{8}x^{5:2} - \tfrac{1}{16}x^{7:2} \text{ (§. 124)}$$
$$QM = 2x^{1:2} - \tfrac{1}{3}x^{3:2} - \tfrac{1}{20}x^{5:2} - \tfrac{1}{56}x^{7:2},$$

Quare elementum QMmq = $2x^{1:2}dx - \tfrac{1}{3}x^{3:2}dx - \tfrac{1}{20}x^{5:2}dx - \tfrac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. prorsus ut supra (§. 131).

SCHOLION.

183. *Methodo hac quadrandi cycloidem usus est* Newtonus (a): *quam ideo superiori addidimus, ut appareat, quemodo subinde quadratura curvarum ex aliarum rectificationibus deducantur. Etenim pro circulo substitui possunt curvæ aliæ, quarum arcus* AP *æqualis est* PM. *Dari etiam possunt exempla, in quibus arcus datur non per abscissam, ut in exemplo præsente, sed per semiordinatam veluti si* AP *sit parabola* (§. 146).

PROBLEMA 69.

184. *Data chorda arcus cujuscunque invenire chordam arcus alterius, qui sit ad illum in ratione data.*

Sit diameter circuli = d
chorda arcus dati = a
ratio arcuum = 1 : n
chorda arcus quæsiti = x
erit (§. 169)

$$\text{arcus datus} = a + \frac{1}{2\cdot 3d^2}a^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5d^4}a^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7d^6}a^7 \text{ \&c.} = a + \frac{1}{2\cdot 3d^2}a^3 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}a^5 + \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}a^7 \text{ \&c.}$$

$$\text{arcus quæsitus} = x + \frac{1}{2\cdot 3d^2}x^3 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}x^5 + \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}x^7 \text{ \&c.}$$

Quoniam arcus datus ad quæsitum ut 1 ad n; erit (§. 297 *Arith.*)

$$na + \frac{n}{2\cdot 3d^2}a^3 + \frac{3\cdot 3n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}a^5 + \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}a^7 \text{ \&c.} = x + \frac{1}{2\cdot 3d^2}x^3 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}x^5 + \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}x^7 \text{ \&c.}$$

consequenter si prima series sit = A altera = B, erit B − A = 0.

Fiat

$$x = ba + ia^3 + ka^5 + la^7 \text{ \&c.}$$
$$x^3 = b^3a^3 + 3b^2ia^5 + 3b^2ka^7 + 3bi^2a^7$$
$$x^5 = + b^5a^5 + 5b^4ia^7$$
$$x^7 = b^7a^7$$

ideoque

$$x = ba + ia^3 + ka^5 + la^7 \text{ \&c.}$$
$$+\frac{1}{2\cdot 3d^2}x^3 = +\frac{1}{2\cdot 3d^2}b^3a^3 + \frac{1}{2d^2}b^2ia^5 + \frac{1}{2d^2}b^2ka^7 \text{ \&c.} + \frac{1}{2d^2}bi^2a^7 \text{ \&c.}$$
$$+\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}x^5 = +\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}b^5a^5 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4d^4}b^4ia^7 \text{ \&c.}$$
$$+\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}x^7 = +\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}b^7a^7 \text{ \&c.}$$
&c. &c.
$$-A = -na - \frac{n}{2\cdot 3d^2}a^3 - \frac{3\cdot 3n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}a^5 - \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}a^7 \text{ \&c.}$$

(a) In Analysi per æquationes numero terminorum infinitas p. 18.

Habe-

Habemus itaque

$$b - n = 0$$

$$b = n$$

$$i + \frac{1}{2.3d^2} b^3 - \frac{n}{2.3d^2} = 0$$

$$i = \frac{n - n^3}{2.3d^2} = \frac{n(1 - n^2)}{2.3d^2}$$

$$k + \frac{1}{2d^2} b^2 i + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} b^5 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} = 0$$

$$k = \frac{3.3n}{2.3.4.5\, d^4} - \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} b^5 - \frac{1}{2d^2} b^2 i$$

Est vero

$$b^5 = n^5 \qquad b^2 = n^2$$

$$\frac{3.3}{2.3.4.5d^4} b^5 = \frac{9n^5}{2.3.4.5d^4} \qquad i = \frac{n - n^3}{2.3d^2}$$

$$b^2 i = \frac{n^3 - n^5}{2.3d^2}$$

$$\frac{h^2 i}{2d^2} = \frac{n^3 - n^5}{3.4d^2}$$

$$= \frac{10n^3 - 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

Quamobrem

$$k = \frac{9n - 9n^5 - 10n^3 + 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{9n - 10n^3 + n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{n(1 - n^2)(9 - n^2)}{2.3.4.5d^4}$$

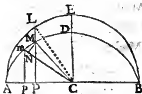
Eodem modo reperitur $l = \frac{n(1 - n^2)(9 - n^2)(25 - n^2)}{2.3.4.5.6.7d^6}$

Est igitur chorda arcus quæsiti $= na + \frac{n(1 - n^2)}{2.3d^2} a^3 + \frac{n(1 - n^2)(9 - n^2)}{2.3.4.5d^4} a^5 + \frac{n(1 - n^2)(9 - n^2)(25 - n^2)}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7$ &c. in infinitum.

S C H O L I O N.

185. *Cum sinus sit arcus dupli subtensa dimidia* (§. 2. Trigon.); *formula præsens sinibus computandis inservit.*

P R O B L E M A 70.



186. *Quadrare sectorem Ellipsis* DCM.

Ducatur Cm ex centro C ipsi CM infinite propinqua & ex eodem centro C radio CM describatur arcus MN, erit angulus ad N rectus (§. 38) & sector infinite parvus CMN $=$ MN. $\frac{1}{2}$CM (§. 435 *Geom.*). Est vero Mm^2 $-$ Nm^2 $=$ MN^2 (§. 417 *Geom.*).

Sit jam AC $= a$, parameter $= b$,

PC $= x$, PM $= y$

erit AP $= a - x$

PB $= a + x$

AP . PB $= a^2 - x^2$

consequenter (§. 420 *part.* 1)

b : AB $=$ PM^2 : AP . PB

$$b : 2a = y^2 : a^2 - x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2 b - bx^2}{2a} = \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}.$$

Porro CP$^2 = x^2$

$$PM^2 = \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2} \text{ (§. 417 Geo.)}$$

$$= \frac{4a^2 x^2 + 2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a} \sqrt{(4a^2 x^2 + 2a^3 b - 2abx^2)}$$

$$= \frac{1}{2a} (4a^2 x^2 + 2a^3 b - 2abx^2)^{1:2}$$

$$Nm = \frac{2axdx - bxdx}{\sqrt{(4a^2 x^2 - 2abx^2 + 2a^3 b)}}$$

Nm^2

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Jam $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$ (§. 172)

Est vero $c^2 = \frac{1}{2}ab$ (§. 423 *part.* 1)

Ergo $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + \frac{1}{2}abx^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$

$$= \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2}$$

Habemus itaque

$$NM^2 = \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2} + \frac{dx^2(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Quodsi jam partes has ipsius NM^2 reducas ad eandem denominationem, prodibit $(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b) = 8a^5bx^2 - 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 - 8a^4b^2x^2 - 2ab^3x^4 + 4a^6b^2 + 2a^3b^3x^2$ & $(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)(2a^3b - 2abx^2) = -8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 - 2a^3b^3x^2 + 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 + 2ab^3x^4$.

Quare NM^2

$$= \frac{4a^6b^2dx^2}{(2a^3b - 2abx^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$$

ideoque NM

$$= \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$$

Jam cum sit $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$; erit tandem elementum sectoris $CMN = \frac{a^2bdx}{2\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}}$ $= \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{2ab}.\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{a^2 - x^2)}}$.

Est vero $\sqrt{2ab} = 2c$. Ergo CMN $= \frac{2acdx}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{acdx}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, consequenter sector $DCM = \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

Enimvero $\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ est elementum arcus circuli LE radio CA descripti, cujus sinus est PC (§. 153). Quare cum in superioribus hujus arcus elementum integrare docuimus, non alia re opus est, quam ut is ducatur in $\frac{1}{2}c$ sive quartam partem axis minoris CD, ut prodeat sector ellipticus DCM.

COROLLARIUM.

187. Quodsi fiat (*Vid. Fig.* §. 186) $c = a$, hoc est CD = CE, Ellipsis degenerat in circulum, & formula pro sectore DCM degenerat in $\frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{1}{2}CE.LE$, ideoque sector ellipticus DCM in sectorem circuli ECL (§. 435 *Geom.*). Est itaque

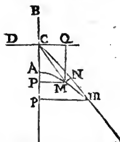
$$DCM : ECL = \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} : \frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$
$$= c : a$$
$$= CD : AC \quad (§. 124 \textit{ part. } 1)$$

hoc est, sector ellipticus DCM est ad sectorem circuli circa axem majorem descripti, sinu arcuum PC utrobique existente eodem, ut axis minor ad majorem.

SCHOLION.

188. *Pendet ideo quadratura sectoris elliptici a quadratura sectoris circuli.*

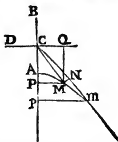
PROBLEMA 71.



189. *Quadrare sectorem hyperbolicum* CAM *radio* CM *ex centro* C *ducto.*

Intelligatur radius Cm ipsi CM infinite propinquus, & radio CM describatur arcus circuli MN, erit ad N angulus rectus (§. 38), $MN^2 = Mm^2 - Nm^2$ (§. 417 *Geom.*) & $\frac{1}{2}$CM.MN

sector



ſector infinite parvus CMN (§. 435 *Geom.*), ſeu elementum ſectoris hyperbolici quadrandi CAM.

Sit jam PC $= x$
AC $=$ CB $= a$ erit AP $= x - a$
Parameter $= b$ PB $= x + a$

$$AP . PB = x^2 - a^2$$

ideoque (§. 459 *part.* 1)

$$AB : b = AP . PB : PM^2$$

$$2a : b = x^2 - a^2 : PM^2$$

Quare

$$PM^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$CP^2 = x^2$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{bx^2 - ba^2}{2a} \text{ (§. 417 \textit{Geom.})}$$

$$= \frac{2ax^2 + bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a} \surd(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)^{1:2}$$

$$Nm = \frac{2axdx + bxdx}{\surd(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$Nm^2 = \frac{dx^2(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Jam $y^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$.

$$2ydy = \frac{2bxdx}{2a}$$

$$y^2dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2y^2}$$

$$= \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + dx^2$$

h.e. $Mm^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$NM^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$+ dx^2 \frac{(-4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b} \text{ (§. 417 \textit{Geom.})}$$

Si fiat reductio ad eandem denominationem (§. 235 *Arith.*), reperitur

$$b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$
$$4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$

$$-2a^3b^3x^2 - 4a^4b^2x^2 + 4a^6b^2$$
$$+ 2ab^3x^4 + 4a^2b^2x^4 - 4a^4b^2x^2$$
$$+ 4a^2b^2x^4 + 8a^3bx^4 - 8a^5bx^2$$

&

$$-4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2$$
$$2abx^2 - 2a^3b$$

$$+ 8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 + 2a^3b^3x^2$$
$$- 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 - 2ab^3x^4$$

conſequenter productis hiſce in unam ſummam collectis,

$$NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^2}{(2abx^2 - 2a^3b)(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$NM = \frac{2a^3bdx}{\surd(2abx^2 - 2a^3b)\surd(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

Jam $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\surd(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)$

$$\tfrac{1}{2}CM . NM = \frac{2a^2bdx}{4\surd(2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$= \frac{adx\surd 2ab}{4\surd(x^2 - a^2)}$$

Eſt

Est vero $\sqrt{2ab}$ axis conjugatus (§. 461 *part.* 1), qui si dicatur $2c$; erit sectoris hyperbolici elementum

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

Jam in hyperbola æquilatera $a = c$ (§. 505 *part.* 1). Ergo elementum sectoris $= \frac{a^2 dx}{2\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

Resolvatur $1:\sqrt{(x^2-a^2)} = (x^2-a^2)^{-1:2}$ in seriem (§. 99 *part.* 1), erit

$$m = -1,\ n = 2$$

$$P = x^2,\ Q = -\frac{a^2}{x^2} = -a^2x^{-2}$$

$$P^{m:n} = x^{-1} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.x^{-1}.-a^2x^{-2} = +\tfrac{1}{2}a^2x^{-3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}a^2x^{-3}.-a^2x^{-2} = +\tfrac{1.3}{2.4}a^4x^{-5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\tfrac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}.-a^2x^{-2} = +\tfrac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.\tfrac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}.-a^2x^{-2} = +\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}$$

Habemus itaque

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = x^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^2x^{-3}dx + \tfrac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}dx + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}dx + \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}dx$$ &c. in infinitum.

Quare $\frac{acdx}{2\sqrt{(x^2-a^2)}} = \tfrac{1}{2}acx^{-1}dx + \tfrac{1}{4}a^3cx^{-3}dx + \tfrac{1.3}{4.4}a^5cx^{-5}dx + \tfrac{1.3.5}{4.4.6}a^7cx^{-7}dx + \tfrac{1.3.5.7}{4.4.6.8}a^9cx^{-9}dx$ &c.

Habemus itaque sectorem CAM $= \tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx - \tfrac{1}{2.4}a^3cx^{-2} - \tfrac{1.3}{4.4.4}a^5cx^{-4} - \tfrac{1.3.5}{4.4.6.6}a^7cx^{-6} - \tfrac{1.3.5.7}{4.4.6.8.8}a^9cx^{-8}$ &c. $= \tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx - \frac{a^3c}{2.4x^2} - \frac{1.3}{4.4.4.x^4}a^5c - \frac{1.3.5}{4.4.6.6.x^6}a^7c - \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.8x^8}a^9c$ &c. in infinitum.

Quoniam $\tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx$ pendet a quadratura hyperbolæ intra asymptotos (§. 120); evidens est quadraturam sectoris hyperbolici in hoc casu supponere quadraturam hyperbolæ intra asymptotos.

Quodsi hyperbola ad axem secundum referenda, fiat dimidius axis secundus CD $= c$, CA $=$ CB $= a$, CQ $=$ PM $= x$, CP $=$ QM $= y$, erit $PM^2 = x^2$, AP.PB $= y^2 - a^2$ & (§. 469 *part.* 1)

$$AC^2 : CD^2 = AP.PB : PM^2$$

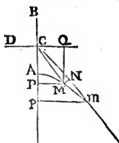
$$a^2 : c^2 = y^2 - a^2 : x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} - c^2 = x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} = x^2 + c^2$$

Quoniam linea, quæ est tertia proportionalis ad axem secundum 2CD & primarium AB dicitur parameter respectu axis secundi, quemadmodum parameter respectu axis primarii AB est tertia proportionalis ad AB & 2CD (§. 461 *part.* 1); si parameter respectu axis 2CD dicatur p, erit $c : a = 2a : p$, ideoque $2a^2 : c = p$, consequenter $2a^2 : c^2 = p : c$ & $c^2 : a^2 = 2c : p$. Hoc valore ipsius $c^2 : a^2$ in æquatione substituto, prodit

 $\frac{2cy^2}{p}$



$$\frac{2cy^2}{p} = x^2 + c^2$$

$$y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

Jam $PM^2 = x^2$

Ergo $CM^2 = x^2 + \frac{px^2 + pc^2}{2c}$

$$= \frac{2cx^2 + px^2 + pc^2}{2c}$$

$$= \frac{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}{4c^2}$$

$$CM = \frac{1}{2c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$Nm = \frac{2cxdx + pxdx}{\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

Porro $y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$

ideoque $2ydy = \frac{2pxdx}{2c}$

$$dy^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{4c^2y^2}$$

$$= \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2c^3p}$$

$$Mm^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + dx^2$$

$$= \frac{p^2x^2dx^2 + 2pcx^2dx^2 + 2pc^3dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Nm^2 = \frac{(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$NM^2 = \frac{(p^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + dx^2\frac{(-4c^2x^2 - 4pcx^2 - p^2x^2)}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3} =$$

$$\frac{4p^2c^6dx^2}{(2pcx^2 + 2pc^3)(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$NM = \frac{2pc^3dx}{\sqrt{(2pcx^2 + 2pc^3)}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\tfrac{1}{2}CM = \frac{1}{4c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$CMN = \frac{2pc^2dx}{4\sqrt{2pc}\sqrt{(x^2 + c^2)}}$$

$$= \frac{cdx\sqrt{2pc}}{4\sqrt{(c^2 + x^2)}}$$

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(c^2 + x^2)}} \text{ ob } \sqrt{2pc} = 2a.$$

$$= \tfrac{1}{2}acdx(c^2 + x^2)^{-1:2}$$

Resolvatur $1 : \sqrt{(c^2 + x^2)}$ in seriem: erit in theoremate generali (§.99 *part.* 1)

$m = -1$, $n = 2$, $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$

$$P^{m:n} = c^{-1} = \frac{1}{c} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{x^2}{c^2} = -\frac{x^2}{2c^3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}\cdot -\frac{x^2}{2c^3}\cdot\frac{x^2}{c^2} = +\frac{1.3x^4}{2.4c^5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5.}{6.}\frac{1.3x^4}{2.4c^5}\cdot\frac{x^2}{c^2} = -\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8}\cdot -\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7}\cdot\frac{x^2}{c^2} = + \frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8c^9} \text{ \&c.}$$

Est itaque $\frac{acdx}{2\sqrt{(c^2 + x^2)}} = \frac{1}{2}adx - \frac{ax^2dx}{4c^2} + \frac{1.3ax^4dx}{4.4c^4} - \frac{1.3.5ax^6dx}{4.4.6c^6} + \frac{1.3.5.7ax^8dx}{4.4.6.8c^8}$ &c. consequenter CMA $= \frac{1}{2}ax - \frac{ax^3}{3.4c^2} + \frac{1.3ax^5}{4.4.5c^4} - \frac{1.3.5ax^7}{4.4.6.7c^6} + \frac{1.3.5.7ax^9}{4.4.6.8.9c^8}$ &c.

Patet igitur, quadraturam sectoris hyperbolici CAM hoc in casu non pen-

pendere a Quadratura hyperbolæ intra asymptotos. Quoniam tamen x ultra a in infinitum excrescit; ubi procul a vertice discesseris, series posterior minus convergit priori; sed quamdiu $x < a$, eadem magis convergit.

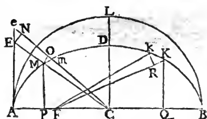
Corollarium 1.

190 Quoniam in hyperbola $y^2 = (bx^2 + bc^2) : ac$; erit $2c : b = x^2 + c^2 : y^2$, hoc est, axis secundus seu conjugatus est ad ipsius parametrum ut summa quadratorum semiordinatæ PM & dimidii axis conjugati CD ad quadratum distantiæ semiordinatæ a centro CP.

Corollarium 2.

191. Cum in hyperbola æquilatera sit $c = a$ (§. 505 *part.* 1); sector hyperbolicus est $\int a^2 dx : 2\sqrt{(a^2 + x^2)} = \frac{1}{2}ax - \frac{x^3}{3 \cdot 4a} + \frac{1 \cdot 3x^5}{4 \cdot 4 \cdot 5a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x^9}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9a^7}$ &c.

Problema 72.



192. *Data tangente* AE *arcus elliptici* AM *invenire sectorem* AMC.

Quoniam tangens AE axi conjugato DC est parallela (§. 448. 444 *part.* 1), DC vero ad AB perpendicularis; erit etiam EA perpendicularis ad AB (§. 230 *Geom.*), ideoque angulus ad A rectus (§. 78 *Geom.*). Sit jam AC $= a$, CD $= 1$, AE $= x$, PM $= y$. Ducatur Ce ipsi CE infinite propinqua, & ex centro C radio CE arcus EN atque radio CM arcus MO. Erit $\triangle EeN \sim \triangle AEC$, quemadmodum supra in casa simili (§. 124) demonstratum est, $Ee = dx$ &, ob $EC^2 = AE^2 + AC^2$ (§. 417 *Geom.*), $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$. Jam cum sit (§. 175 *Geom.*)

$$EC : AC = Ee : EN$$

$$\sqrt{(x^2 + a^2)} : a = dx : EN$$

erit $EN = \frac{adx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}}$

Porro ob parallelismum rectarum AE & PM (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$EA : AC = PM : PC$$

$$x : a = y : PC$$

ideoque $PC = \frac{ay}{x}$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Porro (§. 430 *part.* 1)

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$

(§. 88 *part.* 1)

$$1 : a^2 = y^2 : a^2 - \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Quare (§. 297 *Arith.*)

$$a^2y^2 = \frac{a^2x^2 - a^2y^2}{x^2}$$

$$x^2y^2 = x^2 - y^2$$

$$x^2y^2 + y^2 = x^2$$

$$PM^2 = y^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2 + 1}$$

$$CM^2 = \frac{x^2 + a^2}{x^2 + 1}$$

$$CM = \frac{\sqrt{(x^2 + a^2)}}{\sqrt{(x^2 + 1)}}$$

Denique ob sectores similes CEN & CMO (§. 137. 412 *Geom.*):

CE:

ipso divisionis actu, & integra series dividens ducitur in quotum, atque a dividenda subtrahitur quemadmodum in communi divisione fieri solet; id quod ex typo exempli subjecti attento lectori obvium.

$$K = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$L = a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$\text{Resid. I.} - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{16a^4} + \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$\text{L. B} = - \frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{16a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{x^8}{32a^6}$$

$$\text{Resid. II.} \quad - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$- \frac{b^2x^4}{4a^4} - \frac{b^2x^6}{16a^6} - \frac{b^2x^8}{32a^8}$$

$$+ \frac{3x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{9x^8}{128a^6}$$

$$\text{L. C} = - \frac{b^4x^4}{8a^6} + \frac{b^4x^6}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$

$$- \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{8a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$

$$+ \frac{3x^4}{8a^2} - \frac{3x^6}{16a^4} - \frac{3x^8}{64a^6}$$

$$\text{Resid. III.} = - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$- \frac{b^4x^6}{16a^8} - \frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$

$$- \frac{3b^2x^6}{16a^6} - \frac{b^2x^8}{16a^8}$$

$$+ \frac{5x^6}{16a^4} + \frac{15x^8}{128a^6}$$

$$\text{L. D} = - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} + \frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$

$$- \frac{b^4x^6}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{32a^{10}}$$

$$- \frac{3b^2x^6}{16a^6} + \frac{3b^2x^8}{32a^8}$$

$$+ \frac{5x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{32a^6}$$

A. B. C. D. E.

$$1 - \frac{b^2x^2}{2a^4} - \frac{b^4x^4}{8a^8} - \frac{b^6x^6}{16a^{12}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{16}}$$

$$+ \frac{x^2}{2a^2} - \frac{b^2x^4}{4a^6} - \frac{b^4x^6}{16a^{10}} - \frac{b^6x^8}{32a^{14}} -$$

$$+ \frac{3x^4}{8a^4} - \frac{3b^2x^6}{16a^8} - \frac{3b^4x^8}{64a^{12}}$$

$$+ \frac{5x^6}{16a^6} - \frac{5b^2x^8}{32a^{10}}$$

$$+ \frac{35x^8}{128a^8}$$

Resid.

Resid. IIII.

$$-\frac{5b^8x^8}{128x^{14}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32x^8}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^6}$$

&c. &c.

Substituatur jam valor ipsius b. Quoniam

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4$$
$$b^6 = a^6 - 3a^4c^2 + 3a^2c^4 - c^6$$
$$b^8 = a^8 - 4a^6c^2 + 6a^4c^4 - 4a^2c^6 + c^8$$

erit

1.

$$-\frac{b^2x^2}{2a^4} = -\frac{x^2}{2a^2} + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$+\frac{x^2}{2a^2} = +\frac{x^2}{2a^2}$$

$$B = +\frac{c^2x^2}{2a^4}$$

2.

$$-\frac{b^4x^4}{8a^8} = -\frac{x^4}{8a^4} + \frac{c^2x^4}{4x^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^6} = -\frac{x^4}{4a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^4} = +\frac{3x^4}{8a^4}$$

$$C = +\frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

3.

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{12}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8} - \frac{3c^4x^6}{16x^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16x^{10}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{c^2x^6}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{16a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^8} = -\frac{3x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16x^6} = +\frac{5x^6}{16a^6}$$

$$D = +\frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

4.

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{16}} = -\frac{5x^8}{128a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{30c^4x^8}{128a^{12}} + \frac{5c^6x^8}{32a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{14}} = -\frac{x^8}{32a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{32x^{12}} + \frac{c^6x^8}{32a^{14}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{12}} = -\frac{3x^8}{64a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{64a^{12}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^{10}} = -\frac{5x^8}{32a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^8} = +\frac{35x^8}{128a^8}$$

$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8x^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128x^{16}}$$

Habemus itaque

$$A = 1$$
$$B = \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$C = \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$D = \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4x^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Quamobrem prolixo satis calculo, quem tamen distincte hic explicari consultum fuit, ut sit exemplar in casibus similibus, tandem reperitur.

$V(a^4$

$$\frac{\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$

$$1 + \frac{c^2x^2}{2a^4} + \frac{c^2x^4}{2a^6} + \frac{c^2x^6}{2a^8} + \frac{c^2x^8}{2a^{10}} \&c.$$
$$- \frac{c^4x^4}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Est igitur elementum arcus

$$\frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} = dx +$$
$$\frac{c^2x^2dx}{2a^4} + \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} + \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} - \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

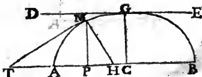
&c. in infinitum.

Tandem ideo arcus $GM = x$

$$+ \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} + \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \&c.$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} - \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} + \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

Quodsi terminorum homogeneorum coefficientes reducas ad eandem denominationem ; erit $GM = x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{4a^2c^2 - c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 - 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7 + \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 + 24a^2c^6 - 5c^8}{1152a^{16}}x^9$.

COROLLARIUM I.



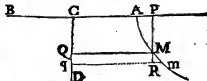
173. Quodsi ponamus esse $GC : AC = 1 : m$, ideoque $AC = mc$; erit $GM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 + \frac{4m^2 - 1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4 - 4m^2 + 1}{112m^{12}c^6}x^7 + \frac{64m^6 - 48m^4 + 24m^2 - 5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Quare si species ellipsis in casu dato determinetur, hoc est, m per numerum determinatum explicetur ; prodibit series multo simplicior. Sit enim $m = 2$; erit $GM = x + \frac{1}{96c^2}x^3 + \frac{7}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7 + \frac{3419}{75497472c^8}x^9$ &c.

COROLLARIUM 2.

174. Quodsi $c = a$, ellipsis degenerat in circulum & series pro circulo evadit $x + \frac{x^3}{6a^2} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{1152a^8}$ &c. hoc est, si $a = 1$, series $= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$, &c. prorsus ut supra (§. 153).

PROBLEMA 64.



175. *Rectificare arcum hyperbolæ AM.*

Sit $BC = AC = c$, $CQ = PM = x$, dimidius axis conjugatus $= a$, $CP = y$; erit $BP = y + c$, $AP = y - c$,

$AP . PB = y^2 - c^2$;

Quare (§. 469 *part.* 1)

$$a^2 : c^2 = x^2 : y^2 - c^2$$
$$a^2y^2 - a^2c^2 = c^2x^2$$
$$a^2y^2 = a^2c^2 + c^2x^2$$
$$2a^2ydy = 2c^2xdx$$
$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$

h. e.

h. e. $a^4c^2dy^2 + a^2c^2x^2dy^2 = c^4x^2dx^2$

$$a^4dy^2 + a^2x^2dy^2 = c^2x^2dx^2$$

$$dy^2 = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$

$$= \frac{a^4dx^2 + a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$

$$\surd(dx^2 + dy^2) = \frac{dx\surd(a^4 + a^2x^2 + c^2x^2)}{a\surd(a^2 + x^2)}$$

Elementum hoc nonnisi signis differt ab elemento ellipsis (§. 172). Quamobrem eodem prorsus modo, quo in problemate præcedente, reperitur elementum arcus $Mm = dx$

$$+ \frac{c^2x^2dx}{2a^4} - \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} - \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}} \&c.$$

$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} + \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$

$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} - \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$

$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

Quare arcus AM =

$$+ \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} - \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \&c.$$

$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} + \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$

$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} - \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$

$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

hoc est, reductione coefficientium in eodem termino ad eandem denominationem facta, $x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{4a^2c^2 - c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 + 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7 - \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 - 24a^2c^6 - 5c^8}{1152a^{16}}x^9$ &c.

Quodsi denuo hyperbolæ axes ponantur inter se ut 1 ad m, hoc est, si sit $a = mc$, reperietur arcus $AM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 - \frac{4m^2 - 1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4 + 4m^2 + 1}{112m^{12}c^6}x^7 - \frac{64m^6 - 48m^4 - 24m^2 - 5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Et si species hyperbolæ determinetur, explicando m per numerum determinatum, erit $AM = x + \frac{1}{96c^2}x^3 - \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7 - \frac{3419}{75497472c^8}x^9$ &c.

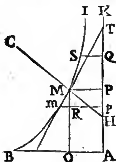
Series ideo pro arcu hyperbolico a serie pro arcu elliptico non differt nisi signis.

COROLLARIUM.

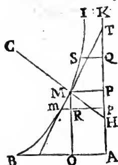
176. Si hyperbola fuerit æquilatera, erit $c = a$ & series pro arcu AM multo simplicior evadit. Est nempe $= x + \frac{x^3}{6a^2} - \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{13x^7}{112a^6} - \frac{141x^9}{1152a^8}$ &c.

PROBLEMA 65.

177. *Rectificare Logarithmicam.*



Sit curvæ subtangens $= a$, $PM = y$, $Pp = dx$, erit (§. 54)



$$\frac{ydx}{dy} = a$$

$$ydx = ady$$

$$dx = \frac{ady}{y}$$

$$dx^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2} + dy^2$$

$$\surd(dx^2 + dy^2) = dy\surd(\frac{a^2}{y^2} + 1)$$

Ut elementum hoc mM integrabile reddatur, ex $a^2 : y^2 + 1$ extrahenda est radix. Erit itaque in theoremate generali (§. 99 *part.* 1)

$m = 1, n = 2, P = \frac{a^2}{y^2}, Q = 1 : \frac{a^2}{y^2} = \frac{y^2}{a^2}$

$P^{m:n} = \frac{a}{y} = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{y} \cdot \frac{y^2}{a^2} = \frac{y}{2a} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y}{2a} \cdot \frac{y^2}{a^2} = -\frac{y^3}{8a^3} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{y^3}{8a^3} \cdot \frac{y^2}{a^2} = +\frac{y^5}{16a^5} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{y^5}{16a^5} \cdot \frac{y^2}{a^2} = -\frac{5y^7}{128a^7}$ &c.

Est itaque $\surd(\frac{a^2}{y^2} + 1) = \frac{a}{y} + \frac{y}{2a} - \frac{y^3}{8a^3} + \frac{y^5}{16a^5} - \frac{5y^7}{128a^7}$ &c. in infinitum.

Eadem series prodit, si ex $\surd(a^2 + y^2)$ extrahatur radix (§. *cit.*) &, quae provenit, $a + \frac{y^2}{2a} - \frac{y^4}{8a^3} + \frac{y^6}{16a^5} - \frac{5y^8}{128a^7}$ porro dividatur per y. Habemus itaque elementum Mm arcus interminati MI $= \frac{ady}{y} + \frac{ydy}{2a} - \frac{y^3dy}{8a^3} + \frac{y^5dy}{16a^5} - \frac{5y^7dy}{128a^7}$ &c.

Quare arcus MI $= \int\frac{ady}{y} + \frac{y^2}{4a} - \frac{y^4}{32a^3} + \frac{y^6}{96a^5} - \frac{5y^8}{1024a^7}$ &c.

Ponatur SQ $= z$, erit arcus interminatus SI $= \int\frac{adz}{z} + \frac{z^2}{4a} - \frac{z^4}{32a^3} + \frac{z^6}{96a^5} - \frac{5z^8}{1024a^7}$ &c.

Est igitur arcus MS $= \int\frac{ady}{y} - \int\frac{adz}{z} + \frac{y^2 - z^2}{4a} - \frac{y^4 + z^4}{32a^3} + \frac{y^6 - z^6}{96a^5} - \frac{5y^8 + 5z^8}{1024a^7}$ &c.

$\int\frac{ady}{y} - \int\frac{adz}{z}$ est spatium hyperbolicum asymptoticum inter duas semiordinatas $a^2 : y$ & $a^2 : z$ comprehensum, & per a divisum (§. 118).

Est autem a latus potentiae hyperbolae, y & z sunt abscissae in asymptoto sumtae (§. 488 *part.* 1). Pendet ideo rectificatio curvae logarithmicae a quadratura hyperbolae, quae per series infinitas in superioribus data (§. 120).

Potest etiam alia adhuc ratione extrahi radix. Nimirum poni potest $P = 1$, $Q = \frac{a^2}{y^2} = a^2y^{-2}$. Quare cum sit ut ante $m = 1$, $n = 2$; erit

$P^{m:n}$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} . 1 . a^2 y^{-2} = \frac{1}{2} a^2 y^{-2} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} . \frac{1}{2} a^2 y^{-2} . a^2 y^{-2} =$
$- \frac{1}{8} a^4 y^{-4} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} . -\frac{1}{8} a^4 y^{-4} . a^2 y^{-2} =$
$+ \frac{1}{16} a^6 y^{-6} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} . \frac{1}{16} a^6 y^{-6} . a^2 y^{-2} =$
$- \frac{5}{128} a^8 y^{-8}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dy + \frac{1}{2} a^2 y^{-2} dy - \frac{1}{8} a^4 y^{-4} dy + \frac{1}{16} a^6 y^{-6} dy - \frac{5}{128} a^8 y^{-8} dy$ &c. in infinitum.

Quare longitudo curvæ $= y - \frac{1}{2} a^2 y^{-1} + \frac{1}{24} a^4 y^{-3} - \frac{1}{80} a^6 y^{-5} + \frac{5}{896} a^8 y^{-7}$ &c. $= y - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{5a^8}{896y^7}$ &c.

Sit jam alia semiordinata $SQ = z$, erit longitudo curvæ $= z - \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

Ergo arcus inter semiordinatas y & z interceptus $MS = y - z - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896y^7} - \frac{5a^8}{856z^7}$ &c.

C O R O L L A R I U M.

178. Quoniam series istæ satisfaciunt quæsito, quatenus convergunt, & termini continuo minores fiunt (§. 53 *part.* 1), in Logarithmica autem y continuo fit minor, ita ut tandem infra subtangentem a decrescat; serie prima utendum est, si $a > y$; posteriori autem si $y > a$.

P R O B L E M A 66.

179. *Rectificare hyperbolam ex æquatione ad hyperbolam intra asymptotos.*

Quoniam $xy = a^2$ (§. 488 *part.* 1), erit $y = a^2 : x = a^2 x^{-1}$

$dy = - a^2 x^{-2} dx$

$dy^2 = a^4 x^{-4} dx^2$

$dy^2 + dx^2 = dx^2 + a^4 x^{-4} dx^2$

$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{(1 + a^4 x^{-4})}$

Elementum hoc arcus hyperbolici non multum differt ab elemento arcus logarithmicæ (§. 177).

Vi theorematis generalis (§. 99 *part.* 1)

$m = 1,\ n = 2,\ P = 1,\ Q = a^4 x^{-4}$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} . 1 . a^4 x^{-4} = \frac{1}{2} a^4 x^{-4} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} . \frac{1}{2} a^4 x^{-4} . a^4 x^{-4} = -$
$\frac{1}{2.4} a^8 x^{-8} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} . - \frac{1}{2.4} a^8 x^{-8} . a^4 x^{-4} =$
$+ \frac{1.3}{2.4.6} a^{12} x^{-12} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} . \frac{1.3}{2.4.6} a^{12} x^{-12} . a^4 x^{-4}$
$= - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{16} x^{-16}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dx + \frac{1}{2} a^4 x^{-4} dx - \frac{1}{2.4} a^8 x^{-8} dx + \frac{1.3}{2.4.6} a^{12} x^{-12} dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{16} x^{-16} dx$ &c. consequenter longitudo curvæ $= x - \frac{1}{2.3} a^4 x^{-3} + \frac{1}{2.4.7} a^8 x^{-7} - \frac{1.3}{2.4.6.11} a^{12} x^{-11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15} a^{16} x^{-15}$ &c. $= x - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}}$ &c. in infinitum.

Quodsi alia abscissa sit z; erit longitudo curvæ $z - \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c.

Arcus igitur inter semiordinatas abscissis x & z respondentes interceptus $= x - z - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}} - \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c. in infinitum.

Eadem prorsus series prodit, si in elemento curvæ generali $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ substituatur valor ipsius dx^2, ut elementum curvæ speciale evadat $dy \sqrt{(1 + a^4y^{-4})}$. Enimvero cum y continuo decrescat, nec unquam sit major latere potentiæ a; series hæc altera parum convergit.

Quodsi a dicatur 1, erit series pro arcu intercepto $x - z - \frac{1}{2.3x^3} + \frac{1}{2.3z^3} + \frac{1}{2.4.7x^7} - \frac{1}{2.4.7z^7} - \frac{1.3}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15x^{15}} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c. in infinitum $= x - z - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{56x^7} - \frac{1}{56z^7} - \frac{1}{176x^{11}} + \frac{1}{176z^{11}} + \frac{5}{1920x^{15}} - \frac{5}{1920z^{15}}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 67.

180. *Data area hyperbolæ intra asymptotos, invenire abscissam eidem respondentem.*

Sit area hyperbolæ $= t$, abscissa a fine lateris potentiæ hyperbolæ computata $= x$, erit (§. 120)

$$t = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \text{ \&c.}$$

Fiat $x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$ &c.

erit
$$x^2 = + a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4 + 2act^4$$
$$x^3 = + a^3t^3 + 3a^2bt^4$$
$$x^4 = + a^4t^4$$

ideoque

$$x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{2}x^2 = -\tfrac{1}{2}a^2t^2 - abt^3 - \tfrac{1}{2}b^2t^4 - act^4$$
$$+\tfrac{1}{3}x^3 = +\tfrac{1}{3}a^3t^3 + a^2bt^4$$
$$-\tfrac{1}{4}x^4 = -\tfrac{1}{4}a^4t^4$$
$$-t = -t$$

Habemus itaque

$$a - 1 = 0 \qquad b - \tfrac{1}{2}a^2 = 0$$
$$a = 1 \qquad b = \tfrac{1}{2}$$
$$c - ab + \tfrac{1}{3}a^3 = 0$$
h.e. $c - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$
$$c = \tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6}$$
$$d - \tfrac{1}{2}b^2 - ac + a^2b - \tfrac{1}{4}a^4 = 0$$
h.e. $d - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$
$$d = \tfrac{3+4}{24} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{24} - \tfrac{6}{24} = \tfrac{1}{24}$$

Est igitur $x = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4$ &c. $= \frac{1}{1}t + \frac{1}{1.2}t^2 + \frac{1}{1.2.3}t^3 + \frac{1}{1.2.3.4}t^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}t^5$ &c. in infinitum. Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $x = t + \frac{1}{2}At + \frac{1}{3}Bt + \frac{1}{4}Ct + \frac{1}{5}Dt$ &c. in infinitum.

SCHOLION.

181. *Eodem prorsus modo in aliis casibus inveniri potest basis, si figuræ area datur per seriem infinitam, ut pluribus exemplis non sit opus.*

PROBLEMA 68.

182. *Quadrare Cycloidem ex supposita arcus circuli rectificatione vi sinus versi.*

In

In Cycloide est arcus AP = PM (§. 575 *part.* 1). Jam si AQ = x, arcus AP (§. 157), consequenter

$$PM = x^{1:2} + \tfrac{1}{6}x^{3:2} + \tfrac{1}{40}x^{5:2} + \tfrac{1}{112}x^{7:2} \text{ \&c.}$$
$$PQ = x^{1:2} - \tfrac{1}{2}x^{3:2} - \tfrac{1}{8}x^{5:2} - \tfrac{1}{16}x^{7:2} \text{ (§. 124)}$$
$$QM = 2x^{1:2} - \tfrac{1}{3}x^{3:2} - \tfrac{1}{20}x^{5:2} - \tfrac{1}{56}x^{7:2}.$$

Quare elementum $QMmq = 2x^{1:2}dx - \tfrac{1}{3}x^{3:2}dx - \tfrac{1}{20}x^{5:2}dx - \tfrac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. prorsus ut supra (§. 131).

SCHOLION.

183. *Methodo hac quadrandi cycloidem usus est* Newtonus (a): *quam ideo superiori addidimus, ut appareat, quomodo subinde quadraturæ curvarum ex aliarum rectificationibus deducantur. Etenim pro circulo substitui possunt curvæ aliæ, quarum arcui* AP *æqualis est* PM. *Dari etiam possunt exempla, in quibus arcus datur non per abscissam, ut in exemplo præsente, sed per semiordinatam veluti si* AP *sit parabola* (§. 146).

PROBLEMA 69.

184. *Data chorda arcus cujuscunque invenire chordam arcus alterius, qui sit ad illum in ratione data.*

Sit diameter circuli = d
chorda arcus dati = a
ratio arcuum = $1 : n$
chorda arcus quæsiti = x
erit (§. 169)

arcus datus $= a + \frac{1}{2\cdot 3d^2}a^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5d^4}a^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7d^6}a^7$ &c. $= a + \frac{1}{2\cdot 3d^2}a^3 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}a^5 + \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}a^7$ &c.

arcus quæsitus $= x + \frac{1}{2\cdot 3d^2}x^3 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}x^5 + \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}x^7$ &c.

Quoniam arcus datus ad quæsitum ut 1 ad n; erit (§. 297 *Arith.*)

$$na + \frac{n}{2\cdot 3d^2}a^3 + \frac{3\cdot 3n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}a^5 + \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}a^7 \text{ \&c.} = x + \frac{1}{2\cdot 3d^2}x^3 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}x^5 + \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}x^7 \text{ \&c.}$$

consequenter si prima series sit = A altera = B, erit B − A = 0.

Fiat

$$\begin{array}{llll}
x = ba + ia^3 & + ka^5 & + la^7 & \text{\&c.} \\
x^3 = & b^3a^3 + 3b^2ia^5 & + 3b^2ka^7 & \\
 & & + 3bi^2a^7 & \\
x^5 = & + b^5a^5 & + 5b^4ia^7 & \\
x^7 = & & b^7a^7 &
\end{array}$$

ideoque

$$\begin{array}{lllll}
x = & ba & + ia^3 & + ka^5 & + la^7 \text{ \&c.} \\
+\frac{1}{2\cdot 3d^2}x^3 = & & + \frac{1}{2\cdot 3d^2}b^3a^3 & + \frac{1}{2d^2}b^2ia^5 & + \frac{1}{2d^2}b^2ka^7 \text{ \&c.} \\
 & & & & + \frac{1}{2d^2}bi^2a^7 \text{ \&c.} \\
+\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}x^5 = & & & + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}b^5a^5 & + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4d^4}b^4ia^7 \text{ \&c.} \\
+\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}x^7 = & & & & + \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}b^7a^7 \text{ \&c.} \\
\text{\&c.} & & & & \text{\&c.} \\
-A = & -na & - \frac{n}{2\cdot 3d^2}a^3 & - \frac{3\cdot 3n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}a^5 & - \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}a^7 \text{ \&c.}
\end{array}$$

(a) In Analysi per æquationes numero terminorum infinitas p. 18.

Habe-

Habemus itaque

$$b - n = 0$$

$$b = n$$

$$i + \frac{1}{2\cdot 3d^2}b^3 - \frac{n}{2\cdot 3d^2} = 0$$

$$i = \frac{n - n^3}{2\cdot 3d^2} = \frac{n(1 - n^2)}{2\cdot 3d^2}$$

$$k + \frac{1}{2d^2}b^2 i + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}b^5 - \frac{3\cdot 3n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4} = 0$$

$$k = \frac{3\cdot 3n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,d^4} - \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}b^5 - \frac{1}{2d^2}b^2 i$$

Est vero

$$b^5 = n^5 \qquad b^2 = n^2$$

$$\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}b^5 = \frac{9n^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4} \qquad i = \frac{n - n^3}{2\cdot 3d^2}$$

$$b^2 i = \frac{n^3 - n^5}{2\cdot 3d^2}$$

$$\frac{h^2 i}{2d^2} = \frac{n^3 - n^5}{3\cdot 4d^2}$$

$$= \frac{10n^3 - 10n^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}$$

Quamobrem

$$k = \frac{9n - 9n^5 - 10n^3 + 10n^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}$$

$$= \frac{9n - 10n^3 + n^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}$$

$$= \frac{n(1 - n^2)(9 - n^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5d^4}$$

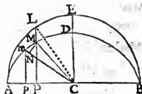
Eodem modo reperitur $l = \frac{n(1 - n^2)(9 - n^2)(25 - n^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}$

Est igitur chorda arcus quæsiti $= na + \frac{n(1 - n^2)}{2\cdot 3d^2}a^3 + \frac{n(1 - n^2)(9 - n^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,d^4}a^5 + \frac{n(1 - n^2)(9 - n^2)(25 - n^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7d^6}a^7$ &c. in infinitum.

S C H O L I O N.

185. *Cum sinus sit arcus dupli subtensa dimidia* (§. 2. Trigon.); *formula præsens sinibus computandis inservit.*

P R O B L E M A 70.



186. *Quadrare sectorem Ellipsis* DCM.

Ducatur C*m* ex centro C ipsi CM infinite propinqua & ex eodem centro C radio CM describatur arcus MN, erit angulus ad N rectus (§. 38) & sector infinite parvus CMN $=$ MN. $\frac{1}{2}$CM (§. 435 *Geom.*). Est vero Mm^2 — Nm^2 = MN^2 (§. 417 *Geom.*).

Sit jam AC $= a$, parameter $= b$,

$$PC = x,\; PM = y$$

erit

$$AP = a - x$$

$$PB = a + x$$

$$AP\,.\,PB = a^2 - x^2$$

consequenter (§. 420 *part.* 1)

$$b : AB = PM^2 : AP\,.\,PB$$

$$b : 2a = y^2 : a^2 - x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2 b - bx^2}{2a} = \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}.$$

Porro $CP^2 = x^2$

$$PM^2 = \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{2a^3 b - 2abx^2}{4a^2} \text{ (§. 417 Geo.)}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2a^3 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2a^3 b - 2abx^2)}$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2a^3 b - 2abx^2)^{1:2}$$

$$Nm = \frac{2axdx - bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3 b)}}$$

Nm^2

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Jam $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$ (§. 172)

Est vero $c^2 = \frac{1}{2}ab$ (§. 423 *part.* 1)

Ergo $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + \frac{1}{2}abx^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$

$$= \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2}$$

Habemus itaque

$$NM^2 = \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2} + \frac{dx^2(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Quodsi jam partes has ipsius NM^2 reducas ad eandem denominationem, prodibit $(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b) = 8a^5bx^2 - 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 - 8a^4b^2x^2 - 2ab^3x^4 + 4a^6b^2 + 2a^3b^3x^2$ & $(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)(2a^3b - 2abx^2) = -8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 - 2a^3b^3x^2 + 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 + 2ab^3x^4$.

Quare NM^2

$$= \frac{4a^6b^2dx^2}{(2a^3b - 2abx^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$$

ideoque NM

$$= \frac{2a^3bdx}{V(2a^3b - 2abx^2)V(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$$

Jam cum sit $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}V(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)$; erit tandem elementum sectoris $CMN = \frac{a^2bdx}{2V(2a^3b - 2abx^2)}$ $= \frac{2a^2bdx}{4V2ab . V(a^2 - x^2)} = \frac{adxV2ab}{4V(a^2 - x^2)}$.

Est vero $V2ab = 2c$. Ergo $CMN = \frac{2acdx}{4V(a^2 - x^2)} = \frac{acdx}{2V(a^2 - x^2)}$, consequenter sector $DCM = \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{V(a^2 - x^2)}$.

Enimvero $\frac{adx}{V(a^2 - x^2)}$ est elementum arcus circuli LE radio CA descripti, cujus sinus est PC (§. 153). Quare cum in superioribus hujus arcus elementum integrare docuimus, non aliare opus est, quam ut is ducatur in $\frac{1}{2}c$ sive quartam partem axis minoris CD, ut prodeat sector ellipticus DCM.

C O R O L L A R I U M.

187. Quodsi fiat (*Vid. Fig.* §. 186) $c = a$, hoc est CD = CE, Ellipsis degenerat in circulum, & formula pro sectore DCM degenerat in $\frac{1}{2}a\int\frac{adx}{V(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}CE . LE$, ideoque sector ellipticus DCM in sectorem circuli ECL (§. 435 *Geom.*). Est itaque

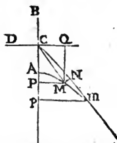
$$DCM : ECL = \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{V(a^2 - x^2)} : \frac{1}{2}a\int\frac{adx}{V(a^2 - x^2)}$$
$$= c : a$$
$$= CD : AC \quad (§. 124\ part.\ 1)$$

hoc est, sector ellipticus DCM est ad sectorem circuli circa axem majorem descripti, sinu arcuum PC utrobique existente eodem, ut axis minor ad majorem.

S C H O L I O N.

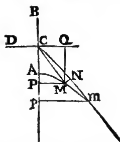
188. *Pendet ideo quadratura sectoris elliptici a quadratura sectoris circuli.*

P R O B L E M A 71.



189. *Quadrare sectorem hyperbolicum* CAM *radio* CM *ex centro* C *ductο.*

Intelligatur radius Cm ipsi CM infinite propinquus, & radio CM describatur arcus circuli MN, erit ad N angulus rectus (§. 38), $MN^2 = Mm^2 - Nm^2$ (§. 417 *Geom.*) & $\frac{1}{2}$CM . MN sector



fector infinite parvus CMN (§. 435 *Geom.*), seu elementum sectoris hyperbolici quadrandi CAM.

Sit jam $PC = x$

$AC = CB = a$ erit $AP = x - a$

Parameter $= b$ $PB = x + a$

$$AP.PB = x^2 - a^2$$

ideoque (§. 459 *part.* 1)

$$AB : b = AP.PB : PM^2$$

$$2a : b = x^2 - a^2 : PM^2$$

Quare

$$PM^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$CP^2 = x^2$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{bx^2 - ba^2}{2a} \text{ (§. 417 Geom.)}$$

$$= \frac{2ax^2 + bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)^{1:2}$$

$$Nm = \frac{2axdx + bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{dx^2(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Jam $y^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$.

$$2ydy = \frac{2bxdx}{2a}$$

$$y^2dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2y^2}$$

$$= \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + dx^2$$

h.e. $Mm^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$NM^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$+ dx^2\frac{(-4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b} \text{ (§. 417 Geom.)}$$

Si fiat reductio ad eandem denominationem (§. 235 *Arith.*), reperitur

$$b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$
$$4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$

$$-2a^3b^3x^2 - 4a^4b^2x^2 + 4a^6b^2$$
$$+ 2ab^3x^4 + 4a^2b^2x^4 - 4a^4b^2x^2$$
$$+ 4a^2b^2x^4 + 8a^3bx^4 - 8a^5bx^2$$

&

$$-4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2$$
$$2abx^2 - 2a^3b$$

$$+ 8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 + 2a^3b^3x^2$$
$$- 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 - 2ab^3x^4$$

consequenter productis hisce in unam summam collectis,

$$NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^2}{(2abx^2 - 2a^3b)(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

Jam $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$

$$\frac{1}{2}CM.NM = \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$= \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Est

Est vero $\sqrt{2ab}$ axis conjugatus (§. 461 *part.* 1), qui si dicatur $2c$; erit sectoris hyperbolici elementum

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Jam in hyperbola æquilatera $a = c$ (§. 505 *part.* 1). Ergo elementum sectoris $= \frac{a^2dx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$.

Resolvatur $1 : \sqrt{(x^2 - a^2)} = (x^2 - a^2)^{-1:2}$ in seriem (§. 99 *part.* 1), erit

$$m = -1,\ n = 2$$

$$P = x^2,\ Q = -\frac{a^2}{x^2} = -a^2x^{-2}$$

$$P^{m:n} = x^{-1} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.x^{-1}.-a^2x^{-2} = +\tfrac{1}{2}a^2x^{-3}$$
$$= B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}a^2x^{-3}.-a^2x^{-2} =$$
$$+\frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}.-a^2x^{-2} =$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}.-a^2x^{-2}$$
$$= +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}$$

Habemus itaque

$\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = x^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^2x^{-3}dx + \frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}dx$ &c. in infinitum.

Quare $\frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \tfrac{1}{2}acx^{-1}dx + \tfrac{1}{4}a^3cx^{-3}dx + \frac{1.3}{4.4}a^5cx^{-5}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}a^7cx^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}a^9cx^{-9}dx$ &c.

Habemus itaque sectorem CAM $= \tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx - \frac{1}{2.4}a^3cx^{-2} - \frac{1.3}{4.4.4}a^5cx^{-4} - \frac{1.3.5}{4.4.6.6}a^7cx^{-6} - \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.8}a^9cx^{-8}$ &c. $= \tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx - \frac{a^3c}{2.8x^2} - \frac{1.3}{4.4.4.x^4}a^5c - \frac{1.3.5}{4.4.6.6.x^6}a^7c - \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.8x^8}a^9c$ &c. in infinitum.

Quoniam $\tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx$ pendet a quadratura hyperbolæ intra asymptotos (§. 120); evidens est quadraturam sectoris hyperbolici in hoc casu supponere quadraturam hyperbolæ intra asymptotos.

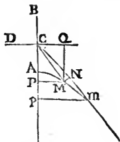
Quodsi hyperbola ad axem secundum referenda, fiat dimidius axis secundus CD $= c$, CA $=$ CB $= a$, CQ $=$ PM $= x$, CP $=$ QM $= y$, erit $PM^2 = x^2$, AP . PB $= y^2 - a^2$ & (§. 469 *part.* 1)

$$AC^2 : CD^2 = AP.PB : PM^2$$
$$a^2 : c^2 = y^2 - a^2 : x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} - c^2 = x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} = x^2 + c^2$$

Quoniam linea, quæ est tertia proportionalis ad axem secundum 2CD & primarium AB dicitur parameter respectu axis secundi, quemadmodum parameter respectu axis primarii AB est tertia proportionalis ad AB & 2CD (§. 461 *part.* 1); si parameter respectu axis 2CD dicatur p, erit $c : a = 2a : p$, ideoque $2a^2 : c = p$, consequenter $2a^2 : c^2 = p : c$ & $c^2 : a^2 = 2c : p$. Hoc valore ipsius $c^2 : a^2$ in æquatione substituto, prodit



$$\frac{2cy^2}{p} = x^2 + c^2$$

$$y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

Jam $PM^2 = x^2$

Ergo $CM^2 = x^2 + \frac{px^2 + pc^2}{2c}$

$$= \frac{2cx^2 + px^2 + pc^2}{2c}$$

$$= \frac{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}{4c^2}$$

$$CM = \frac{1}{2c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$Nm = \frac{2cxdx + pxdx}{\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

Porro $y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$

ideoque $2ydy = \frac{2pxdx}{2c}$

$$dy^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{4c^2y^2}$$

$$= \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2c^3p}$$

$$Mm^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + dx^2$$

$$= \frac{p^2x^2dx^2 + 2pcx^2dx^2 + 2pc^3dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Nm^2 = \frac{(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$NM^2 = \frac{(p^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)dx^2}{2pcx^3 + 2pc^3} +$$

$$dx^2\frac{(-4c^2x^2 - 4pcx^2 - p^2x^2)}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3} =$$

$$\frac{4p^2c^6dx^2}{(2pcx^2 + 2pc^3)(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$NM = \frac{2pc^3dx}{\sqrt{(2pcx^2 + 2pc^3)}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2p}}$$

$$\tfrac{1}{2}CM = \frac{1}{4c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$CMN = \frac{2pc^2dx}{4\sqrt{2pc}\sqrt{(x^2 + c^2)}}$$

$$= \frac{cdx\sqrt{2pc}}{4\sqrt{(c^2 + x^2)}}$$

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(c^2 + x^2)}} \text{ ob } \sqrt{2pc} = 2a.$$

$$= \tfrac{1}{2}acdx\,(c^2 + x^2)^{-1:2}$$

Resolvatur $1 : \sqrt{(c^2 + x^2)}$ in seriem: erit in theoremate generali (§. 99 *part.* 1)

$m = -1,\ n = 2,\ P = c^2,\ Q = \frac{x^2}{c^2}$.

$$P^{m:n} = c^{-1} = \frac{1}{c} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{x^2}{c^2} = -\frac{x^2}{2c^3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}\cdot -\frac{x^2}{2c^3}\cdot\frac{x^2}{c^2} = +\frac{1.3x^4}{2.4c^5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{6}\cdot\frac{1.3x^4}{2.4c^5}\cdot\frac{x^2}{c^2} = -\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8}\cdot -\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7}\cdot\frac{x^2}{c^2} = + \frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8c^9} \text{ \&c.}$$

Est itaque $\frac{acdx}{2\sqrt{(c^2 + x^2)}} = \tfrac{1}{2}adx - \frac{ax^2dx}{4c^2} + \frac{1.3ax^4dx}{4.4c^4} - \frac{1.3.5ax^6dx}{4.4.6c^6} + \frac{1.3.5.7ax^8dx}{4.4.6.8c^8}$ &c. consequenter CMA $= \tfrac{1}{2}ax - \frac{ax^3}{3.4c^2} + \frac{1.3ax^5}{4.4.5c^4} - \frac{1.3.5ax^7}{4.4.6.7c^6} + \frac{1.3.5.7ax^9}{4.4.6.8.9c^8}$ &c.

Patet igitur, quadraturam sectoris hyperbolici CAM hoc in casu non pen-

pendere a Quadratura hyperbolæ intra asymptotos. Quoniam tamen x ultra a in infinitum excrescit; ubi procul a vertice discesseris, series posterior minus convergit priori; sed quamdiu $x < a$, eadem magis convergit.

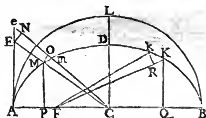
COROLLARIUM I.

190 Quoniam in hyperbola $y^2 = (bx^2 + bc^2) : 2c$; erit $2c : b = x^2 + c^2 : y^2$, hoc est, axis secundus seu conjugatus est ad ipsius parametrum ut summa quadratorum semiordinatæ PM & dimidii axis conjugati CD ad quadratum distantiæ semiordinatæ a cento CP.

COROLLARIUM 2.

191. Cum in hyperbola æquilatera sit $c = a$ (§. 505 *part.* 1); sector hyperbolicus est $\int a^2 dx : 2\sqrt{(a^2 + x^2)} = \frac{1}{2}ax - \frac{x^3}{3 \cdot 4a} + \frac{1 \cdot 3x^5}{4 \cdot 4 \cdot 5a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x^9}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9a^7}$ &c.

PROBLEMA 72.



192. *Data tangente* AE *arcus elliptici* AM *invenire sectorem* AMC.

Quoniam tangens AE axi conjugato DC est parallela (§. 448. 444 *part.* 1), DC vero ad AB perpendicularis; erit etiam EA perpendicularis ad AB (§. 230 *Geom.*), ideoque angulus ad A rectus (§. 78 *Geom.*). Sit jam AC $= a$, CD $= 1$, AE $= x$, PM $= y$. Ducatur Ce ipsi CE infinite propinqua, & ex centro C radio CE arcus EN atque radio CM arcus MO. Erit $\triangle$ EeN $\sim \triangle$ AEC, quemadmodum supra in casu simili (§. 124) demonstratum est, E$e = dx$ &, ob $EC^2 = AE^2 + AC^2$ (§. 417 *Geom.*), $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$. Jam cum sit (§. 175 *Geom.*)

$$EC : AC = Ee : EN$$

$$\sqrt{(x^2 + a^2)} : a = dx : EN$$

erit $EN = \frac{adx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}}$

Porro ob parallelismum rectarum AE & PM (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$EA : AC = PM : PC$$

$$x : a = y : PC$$

ideoque $PC = \frac{ay}{x}$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Porro (§. 430 *part.* 1)

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$

(§. 88 *part.* 1)

$$1 : a^2 = y^2 : a^2 - \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Quare (§. 297 *Arith.*)

$$a^2y^2 = \frac{a^2x^2 - a^2y^2}{x^2}$$

$$x^2y^2 = x^2 - y^2$$

$$x^2y^2 + y^2 = x^2$$

$$PM^2 = y^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2 + 1}$$

$$CM^2 = \frac{x^2 + a^2}{x^2 + 1}$$

$$CM = \frac{\sqrt{(x^2 + a^2)}}{\sqrt{(x^2 + 1)}}$$

Denique ob sectores similes CEN & CMO (§. 137. 412 *Geom.*):

 CE:



$$CE:EN = CM:OM$$

$$\sqrt{(x^2+a^2)} : \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}} :$$

ideoque $OM = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}\sqrt{(x^2+1)}}$

Jam $\frac{1}{2}CM = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{2\sqrt{(x^2+1)}}$

Ergo $CMO = \frac{\frac{1}{2}adx}{1+x^2}$

Est igitur elementum sectoris elliptici ACM idem cum sectore circuli (§.124), si $CD = 1$.

Quare sector $AMC = \frac{1}{2}a\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 \text{ \&c. in infinitum}\right)$.

PROBLEMA 73.

193. *Dato sectore (Vid. Fig. anteced.) KFB recta KF ex foco Ellipsis ducta, invenire semiordinatam KQ.*

Sit $AC = CB = a$, $QK = y$

$FB = b$ sector $KFB = \frac{1}{2}v$

$CD = c$; erit Differentiale ejus $\frac{1}{2}dv$ & ob $QB . QA = BC^2 - QC^2$ (§.88 *part.* 1) ex natura ellipsis (§. 430 *part.* 1)

$$CD^2 : CB^2 = QK^2 : CB^2 - QC^2$$

ideoq; $CD^2 : QK^2 = CB^2 : CB^2 - QC^2$

(§.124 *part.* 1)

$$CD^2 : CD^2 - QK = CB^2 : QC^2$$

$$c^2 : c^2 - y^2 = a^2 :$$

consequenter $CQ^2 = a^2(c^2 - y^2) : c^2$

$CQ = a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$

$CB = a$

$QB = a - a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$

$FB = b$

$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$

Differentiale ipsius $BQ = \frac{aydy}{c\sqrt{(c^2-y^2)}}$

$KQ = y$

Elementum segmenti $KQB = \frac{ay^2dy}{c\sqrt{(c^2-y^2)}}$

Porro

$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$

$\frac{1}{2}QK = \frac{1}{2}y$

$\triangle FQK = \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ay + \frac{ay\sqrt{(c^2-y^2)}}{2c}$

Differentiale $\triangle FQK = \frac{1}{2}bdy - \frac{1}{2}ady - \frac{ay^2dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}} + ady\sqrt{(c^2-y^2)} : 2c$

hoc est, reductione ad eandem denominationem facta,

$$d\triangle FQK = \frac{(bc-ac)\sqrt{(c^2-y^2)}dy + (ac^2 - 2ay^2)dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}}$$

$$dKQB = \frac{2ay^2dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}}$$

$$dFKB = \frac{(bc-ac)\sqrt{(c^2-y^2)}dy + ac^2dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}}$$

$$= \frac{acdy + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}dy}{2\sqrt{(c^2-y^2)}}$$

Habemus itaque

$$\frac{acdy + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}dy}{2\sqrt{(c^2-y^2)}} = \frac{1}{2}dv$$

$$(ac + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})dy = dv\sqrt{(c^2-y^2)}$$

$$\frac{dy}{dv}(ac + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}) = \sqrt{(c^2-y^2)}$$

$$\frac{dy}{dv}(ac + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}) = \sqrt{(c^2-y^2)} =$$

Jam

Jam ut valor ipsius y per v exprimatur, quod est quod quæritur, fiat

$$y = bv + iv^3 + lv^5 + mv^7 \text{ \&c.}$$

$$\text{erit } dy = bdv + 3iv^2dv + 5lv^4dv + 7mv^6dv$$

$$\begin{array}{rllll}
\frac{dy}{dv} = & b & + 3iv^2 & + 5lv^4 & + 7mv^6 \\
y^2 = & & b^2v^2 & + 2biv^4 & + i^2v^6 \\
 & & & & + 2blv^6 \text{ \&c.} \\
y^4 = & & & b^4v^4 & + 4b^3iv^6 \text{ \&c.} \\
y^6 = & & & & b^6v^6 \text{ \&c.}
\end{array}$$

Porro (§. 98 *part.* 1)

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{(c^2 - y^2)} = & c - \frac{y^2}{2c} - \frac{y^4}{8c^3} - \frac{y^6}{16c^5} \text{ \&c.} \\
= & c - \frac{h^2v^2}{2c} - \frac{2hiv^4}{2c} - \frac{i^2v^6}{2c} \text{ \&c.} \\
 & \qquad - \frac{2hlv^6}{2c} \text{ \&c.} \\
 & \qquad - \frac{h^4v^4}{8c^3} - \frac{4h^3iv^6}{8c^3} \text{ \&c.} \\
 & \qquad - \frac{h^6v^6}{16c^5} \text{ \&c.}
\end{array}$$

$$\frac{bdy}{dv} = bb + 3biv^2 + 5blv^4 + 7bmv^6 \text{ \&c.}$$

$$\begin{array}{rllll}
\frac{bdy}{dv}\sqrt{(c^2 - y^2)} = & bcb & + 3bciv^2 & + 5bclv^4 & + 7bcmv^6 \\
 & & - \frac{bh^3}{2c} & - \frac{2bh^2i}{2c} & - \frac{bhi^2}{2c} \\
 & & & & - \frac{2bh^2l}{2c} \\
 & & & - \frac{bh^5}{8c^3} & - \frac{4bh^4i}{8c^3} \\
 & & & - \frac{3bh^2i}{2c} & - \frac{bh^7}{16c^5} \\
 & & & & - \frac{6bhi^2}{2c} \\
 & & & & - \frac{5bh^2l}{2c} \\
 & & & & - \frac{3bh^4i}{8c^3}
\end{array}$$

Quodsi pro b substituatur a prodibit valor ipsius $\frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2 - y^2)}$.

Quamobrem si hi valores in æquatione $\frac{dy}{dv}(ac + (b - a)\sqrt{(c^2 - y^2)}) - \sqrt{(c^2 - y^2)} = 0$ substituantur, prodibit

$\frac{acdv}{dv}$

$$\frac{acdy}{dv} = acb + 3aciv^2 + 5aclv^4 + 7acmv^6 \ \&c.$$

$$\frac{bdy}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)} = bcb + 3bciv^2 + 5bclv^4 + 7bcmv^6 \ \&c.$$

$$- \frac{bh^3}{2c}v^2 - \frac{2bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bhi^2}{2c}v^6$$

$$- \frac{7bh^2l}{2c}v^6$$

$$- \frac{bh^5}{8c^3}v^4 - \frac{7bh^4i}{8c^3}v^6$$

$$- \frac{3bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bh^7}{16c^5}v^6$$

$$- \frac{6bhi^2}{2c}v^6$$

$$-\frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)} = -acb - 3aciv^2 - 5aclv^4 - 7acmv^6 \ \&c.$$

$$+ \frac{ah^3}{2c}v^2 + \frac{2ah^2i}{2c}v^4 + \frac{ahi^2}{2c}v^6$$

$$+ \frac{7ah^2l}{2c}v^6$$

$$+ \frac{ah^5}{8c^3}v^4 + \frac{7ah^4i}{8c^3}u^6$$

$$+ \frac{3ah^2i}{2c}v^4 + \frac{ah^7}{16c^5}v^6$$

$$+ \frac{6ahi^2}{2c}v^6$$

$$-\sqrt{(c^2 - y^2)} = -c + \frac{h^2}{2c}v^2 + \frac{2hi}{2c}v^4 + \frac{i^2}{2c}v^6 \ \&c.$$

$$+ \frac{2hl}{2c}v^6$$

$$+ \frac{h^4}{8c^3}v^4 + \frac{4h^3i}{8c^3}v^6$$

$$+ \frac{h^6}{16c^3}v^6$$

$$\&c. = 0$$

Habemus itaque

$$acb + bcb - acb - c = 0$$

$$bcb - c = 0$$

$$bb - 1 = 0$$

$$bb = 1$$

$$b = \frac{1}{b}$$

$$3aci + 3bci - \frac{bh^3}{2c} - 3aci + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$

$$6ac^2i + 6bc^2i - bb^3 - 6ac^2i + ab^3 + b^2 = 0$$

$$6bc^2i = bb^3 - ab^3 - b^2$$

$$= \frac{1}{b^2} - \frac{2}{b^3} - \frac{1}{b^2}$$

$$= -\frac{2}{b^3}$$

$$i = -\frac{2}{6b^4c^2}$$

5acl

$$5acl + 5bcl - \frac{2bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} - \frac{3bh^2i}{2c} - 5acl$$
$$+ \frac{2ah^2i}{2c} + \frac{2h^5}{8c^3} + \frac{32h^2i}{2c} + \frac{2hi}{2c} + \frac{b^4}{8c^3} = 0$$

$$40ac^4l + 40bc^4l - 8bc^2b^2i - bb^5$$
$$- 12bc^2b^2i - 40ac^4l + 8ac^2b^2i + ab^5$$
$$+ 12ac^2b^2i + 8c^2bi + b^4 = 0$$

h.e. $40bc^4l - 20bc^2b^2i - bb^5 + 20ac^2b^2i$
$$+ ab^5 + 8c^2bi + b^4 = 0$$

$$40bc^4l = 20bc^2b^2i + bb^5 - 20ac^2b^2i$$
$$- ab^5 - 8c^2bi - b^4$$

$$b^2 = \frac{1}{b^2} \qquad bb^5 = \frac{1}{b^4}$$

$$i = -\frac{a}{6b^4c^2} \qquad -ab^5 = -\frac{a}{b^5}$$

$$b^2i = -\frac{a}{6b^6c^2} \qquad bi = -\frac{2}{6b^5c^2}$$

$$20bc^2b^2i = -\frac{10a}{3b^5} \qquad -8c^2bi = +\frac{4a}{3b^5}$$

$$-20ac^2b^2i = +\frac{10a^2}{3b^6}$$

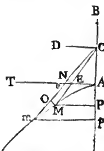
Ergo $40bc^4l =$

$$-\frac{10a}{3b^5} + \frac{1}{b^4} + \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{3a}{3b^5} + \frac{4a}{3b^5} - \frac{1}{b^4}$$
$$= \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{9a}{3b^5} = \frac{10a^2 - 9ab}{3b^6}$$

$$l = \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}$$

Reperitur eodem modo $m = -\frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}$, ideoque tandem $y = \frac{1}{b}v - \frac{a}{6b^4c^2}v^3 + \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}v^5 - \frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}v^6$ &c.

P R O B L E M A 74.



194. *Quadrare sectorem hyperbolicum* CAM, *data tangente ad verticem* AE.

Calculus prorsus idem, qui supra pro ellipsi in casu simili (§. 192). Si enim $AC = CB = a$, $PM = y$, $AE = x$, $CD = 1$ erit $Ee = dx$, $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$ & ob △△ AEC & EeN similitudinem $EN = adx : \sqrt{(x^2 + a^2)}$, ob similitudinem vero △△ CPM & CAE ut in Ellipsi $PC = ay : x$, atque ob analogiam $CD^2 : AC^2 = PM^2 : CP^2 - AC^2$ ex natura hyperbolæ (§. 469. & §. 94 *part.* 1), $a^2y^2 = (a^2y^2 - a^2x^2) : x^2$. Hinc ut supra (§.192) reperitur $CM = \sqrt{(a^2 + x^2)} : \sqrt{(1 + x^2)}$ & ob $CE : EN = CM : OM$ porro $OM = adx : \sqrt{(a^2 + x^2)}\sqrt{(1 + x^2)}$, tandemque elementum MOC sectoris $CMA = \frac{\frac{1}{2}adx}{1 + x^2}$: quod idem prorsus est, quod pro ellipsi & circulo reperimus.

C O R O L L A R I U M.

195. Eadem ergo series sectoribus circuli, ellipsis atque hyperbolæ ex data tangente inveniendis inservit.

CAPUT

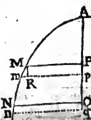
CAPUT IV.

De Usu Calculi Integralis in cubandis solidis & dimetiendis superficiebus eorundem.

DEFINITIO 8.

496. Solidum cubare idem est ac spatium solido comprehensum dimetiri.

PROBLEMA 75.



197. *Cubare solidum ex rotatione figuræ planæ ANQ circa rectam AQ tanquam axem facta genitum.*

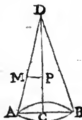
RESOLUTIO.

Sit semiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua: parallelogrammulum PMR*p* haud differt a trapeziolo PM*mp* (§.99). Cylindrulus ergo, quem in rotatione figuræ ANQ circa axem AQ describit parallelogrammulum PMR*p* (§. 465 *Geom.*) est elementum solidi per illam rotationem producti: cujus ideo summa dat integrum solidum, quia ex innumeris cylindrulis eodem modo formatis constare concipitur.

Sit jam $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = dx$. Sit porro ratio radii ad peripheriam $= r : p$, erit peripheria circuli radio PM descripti $= py : r$, consequenter area $py^2 : 2r$ (§. 429 *Geom.*), quæ ducta in P*p* sive *dx* dat soliditatem cylindruli seu elementi solidi $= py^2 dx : 2r$ (§. 541 *Geom.*).

Quodsi jam ex æquatione ad curvam speciali substituatur valor ipsius y^2; habebitur, si elementum integrari possit, soliditas segmenti, cujus altitudo AP, radius basis PM, hoc est revolutione ipsius AMP circa AP geniti.

PROBLEMA 76.



198. *Cubare Conum.*

Conus describitur, si triangulum ADC circa axem DC rotatur (§.467 *Geom.*). Sit $DC = a$, $AC = r$, $PM = y$, $DP = x$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DP : PM = DC : AC$$
$$x : y = a : r$$
$$\text{Hinc } rx : a = y$$
$$\& \ r^2x^2 : a^2 = y^2$$
$$py^2 dx : 2r = pr^2x^2 dx : 2a^2 r = prx^2 dx : 2a^2$$
$$\int py^2 dx : 2r = prx^3 : 6a^2.$$

Quodsi pro x substituatur a; habebitur soliditas totius Coni $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}apr = \frac{1}{2}pr \cdot \frac{1}{3}a$. Basis nempe $\frac{1}{2}pr$ ducenda est in tertiam altitudinis partem $\frac{1}{3}a$, ut ex elementis Geometriæ constat (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA 77.

199. *Cubare sphæram.*

Sphæra cum describatur per rotationem semicirculi circa diametrum ejus

ejus (§. 470 *Geom.*); erit, si diameter sit $2r$,

$$y^2 = 2rx - x^2 \quad (\S.377\ part.1)$$

Unde $py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$ (§. 197)

$$\int py^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r$$

Habemus ideo indefinitam cubationem segmenti sphærici, cujus diameter $2r$, altitudo x.

Quodsi ergo pro x substituatur diameter $2r$; prodibit soliditas sphæræ integræ $2pr^2 - 8pr^3 : 6r = 2pr^2 - \tfrac{4}{3}pr^2 = \tfrac{2}{3}pr^2 = 2rp.\tfrac{1}{3}r$. Nimirum rectangulum ex diametro $2r$ in peripheriam p multiplicandum est per tertiam radii aut sextam diametri partem $\tfrac{1}{3}r$. Denique si diameter $2r$ sit 1; erit soliditas sphæræ $\tfrac{1}{6}p$.

Corollarium 1.

200. Sphæra igitur æquatur pyramidi quadrangulari, cujus basis est rectangulum ex diametro sphæræ $2r$ in peripheriam eadem descriptam, altitudo semidiameter sphæræ (§ 548 *Geom.*).

Corollarium 2.

201. Cylindri sphæræ circumscripti soliditas est pr^2 (§. 541 *Geom.*). Est itaque ad sphæram ut pr^2 ad $\tfrac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut 1 ad $\tfrac{2}{3}$, seu ut 3 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

Problema 78.

202. *Cubare Conoides parabolicum ex rotatione parabolæ cujuscunque generis circa axem suum genitum.*

Sit parameter $= 1$, erit æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 519 *part.* 1)

$$y^m = x$$
$$y = x^{1:m}$$
$$y^2 = x^{2:m}$$
$$py^2dx : 2r = px^{2:m}dx : 2r \quad (\S.\ 197)$$
$$\int py^2dx : 2r = mpx^{(2+m):m} : (4 + 2m)r$$
$$= mpy^2x : (4 + 2m)r$$

Sit altitudo totius Conoidis $= a$, diameter baseos $2r$; erit, a pro x & r pro y substituto, soliditas totius Conoidis $mpr^2a : (4 + 2m)r = \frac{m}{4 + 2m}apr = \tfrac{1}{2}pr.\frac{ma}{2 + m}$.

E.gr. Si parabola genitrix fuerit Apolloniana, erit $m = 2$, ideoque $m : (2 + m) = 2 : (2 + 2) = \tfrac{1}{2}$. Basis ergo ducenda est in dimidiam altitudinem: consequenter Conoides cylindri super eadem basi & ejusdem altitudinis subduplum (§. 542 *Geom.*).

Problema 79.

203. *Cubare sphæroides ellipticum ex rotatione ellipsis Apollonianæ circa axem genitum.*

Quoniam ad ellipsin Apollonianam (§. 420 *part.* 1)

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

erit $py^2dx : 2r = pbxdx : 2r - pbx^2dx : 2ar$ (§. 197)

$$\int py^2dx : 2r = pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$$

Quodsi pro abscissa x substituatur axis a, prodibit soliditas integri sphæroidis $pba^2 : 4r - pba^3 : 6ar = pba^2 : 4r - pba^2 \cdot 6r = (6pba^2 - 4pba^2) : 24r = pba^2 : 12r$.

Corollarium 1.

204. Quodsi $2r$ ponatur axi conjugato æqualis; erit $4r^2 = ab$ (§. 423 *part.* 1). Unde soliditas sphæroidis habetur $4par^2 : 12r = \tfrac{1}{3}par$, hoc est, sphæroides ellipticum æquatur Cono, cujus altitudo axi majori a, diameter baseos axi minori ellipsis genitricis duplo $4r$ æqualis (§. 548 *Geom.*).

Corollarium 2.

205. Quoniam Cylindri circumscripti altitudo $= a$, diameter $= 2r$, ideoque soliditas $= \tfrac{1}{2}apr$ (§. 541 *Geom.*); erit sphæroides ellipticum ad cylindrum circumscriptum ut $\tfrac{1}{3}apr$ ad $\tfrac{1}{2}apr$, hoc est, ut $\tfrac{1}{3}$ ad $\tfrac{1}{2}$, seu 2 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

Corollarium 3.

206. Si diameter sphæræ $= a$, erit peripheria circuli maximi (posita ratione radii ad peripheriam $= r : p$) $= ap : 2r$, consequenter sphæra $= a^3p : 12r$ (§. 199). Est ideo sphæroides ellipticum ad sphæram axe majori a descriptam ut $\tfrac{1}{3}apr$ ad $a^3p : 12r$, hoc est, (dividendo per $\tfrac{1}{3}ap$) ut r ad $a^2 : 4r$, seu ut $4r^2$ ad a^2, nempe ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris.

COROLLARIUM 4.

207. Si diameter sphæræ $= 2r$, erit soliditas $= \frac{2}{3}pr^2$ (§. 199). Est itaque sphæroides ellipticum ad sphæram axe minori $2r$ descriptam ut $\frac{2}{3}par$ ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut a ad $2r$ (§. 124 *part.* 1), seu ut axis major ad minorem.

PROBLEMA 80.

208. *Cubare Conoides hyperbolicum ex rotatione hyperbolæ Apollonianæ circa axem genitum.*

Quoniam ad hyperbolam scalenam (§. 459 *part.* 1)

$$y^2 = bx + bx^2 : a$$

erit $py^2dx : 2r = bpxdx : 2r + bpx^2dx : 2ar$

$$\int py^2dx : 2r = pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$$

Et quia ad hyperbolam æquilateram (§. 507 *part.* 1)

$$y^2 = ax + x^2$$

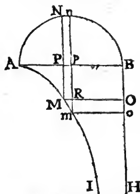
erit $py^2dx : 2r = (apxdx + px^2dx) : 2r$

$$\int py^2dx : 2r = apx^2 : 4r + px^3 : 6r$$

COROLLARIUM.

209. Si altitudo Conoidis fuerit axi transverso æqualis, hoc est, si $x = a$; erit soliditas Conoidis in casu priore $pba^2 : 4r + pba^3 : 6ar = (6pba^2 + 4pba^2) : 24r = 10pba^2 : 24r = 5pba^2 : 12r$.

PROBLEMA 81.



210. *Cubare solidum ex rotatione Cissoidis circa axem AB genitum.*

Sit AB $= 1$, AP $= x$, PM $= y$; erit (§. 548 *part.* 1)

$$y^2 = x^3 : (1 - x)$$

$$py^2dx : 2r = px^3dx : 2r(1 - x)$$

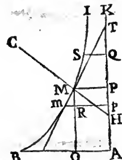
hoc est, quia $2r =$ AB $= 1$,

$$py^2dx : 2r = px^3dx : (1 - x).$$

Est vero $x^3 : (1-x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $py^2dx : 2r = px^3dx + px^4dx + px^5dx + px^6dx + px^7dx + px^8dx$ &c. in infinitum.

Et hinc $\int py^2dx : 2r = \frac{1}{4}px^4 + \frac{1}{5}px^5 + \frac{1}{6}px^6 + \frac{1}{7}px^7 + \frac{1}{8}px^8 + \frac{1}{9}px^9$ &c. definit solidum portione APM descriptum. Quodsi pro x substituatur AB $= 1$; prodit solidum integrum $\frac{1}{4}p + \frac{1}{5}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{7}p + \frac{1}{8}p + \frac{1}{9}p$ &c. seu $p(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ &c. in infinitum).

PROBLEMA 82.



211. *Cubare solidum ex rotatione Logisticæ circa asymptotum* AK *genitum.*

In Logistica, cujus subtangens $= a$, est (§. 54)

$$ydx = ady$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2dx : 2r = paydy : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = pay^2 : 4r$$

Quodsi

Quodsi pro y substituatur $AB = r$; erit integrum solidum $par^2 : 4r = \frac{1}{4} apr$.

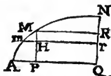
COROLLARIUM.

212. Cylindrus, cujus altitudo $= a$, radius basis $= r$, est $\frac{1}{2} apr$ (§. 541 *Geom.*), ideoque ad solidum logisticum ut $\frac{1}{2} apr$ ad $\frac{1}{4} apr$, hoc est, ut 2 ad 1 (§. 124 *part.* 1).

SCHOLION.

213. *Facile hinc apparet, quod inventis methodo hactenus exposita expressionibus solidorum, ea inter se facile comparentur unumque in alterum transformetur.*

PROBLEMA 83.



214. *Cubare solidum ex rotatione parabolæ circa semiordinatam* QN *genitum*.

Ex resolutione problematis 75 (§. 197) manifestum est, elementum solidi esse circulum radio MR descriptum & in differentiale Rr ipsius RN ductum. Sit itaque ratio radii ad peripheriam $= r : p$, $AQ = r$, $QN = b$, $MR = x$, $NR = y$, erit $Rr = dy$, $MP = RQ = b - y$, $AP = r - x$; peripheria radio MR descripta $= \frac{px}{r}$, consequenter area circuli $= \frac{px^2}{2r}$ (§. 429 *Geom.*), & hinc elementum solidi $= \frac{px^2 dy}{2r}$.

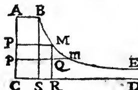
Sit jam parameter parabolæ $= 1$; erit $1 : 2b - y = y : x$ (§. 404 *part.* 1); consequenter $x = 2by - y^2$; ideoque $x^2 = 4b^2y^2 - 4by^3 + y^4$, quo valore in expressione elementi generali substituto, erit id $\frac{4pb^2y^2dy}{2r} - \frac{4pby^3dy}{2r} + \frac{py^4dy}{2r}$. Hujus integrale $\frac{2pb^2y^3}{3r} - \frac{pby^4}{2r} + \frac{py^5}{10r}$ indefinite exprimit solidum ex rotatione portionis NMR circa NR genitum.

Quodsi pro y ponatur b, habebimus solidum integrum $\frac{2pb^5}{3r} - \frac{pb^5}{2r} + \frac{pb^5}{10r} =$ (substituto r pro b^2, ob $b^2 = r$ (§. 383 *part.* 1)) $\frac{1}{2} pbr - \frac{1}{3} pbr + \frac{1}{10} pbr = (30 - 20 + 6)\, pbr : 60 = \frac{8}{30} pbr = \frac{1}{2} pr . \frac{8}{15} b$, hoc est basis seu circulus radio AQ descriptus ducitur in $\frac{8}{15}$ altitudinis QN.

COROLLARIUM.

215. Cylindrus super eadem basi & ejusdem altitudinis est $\frac{1}{2} pbr$ (§. 541 *Geom.*), ideoque ad solidum hoc parabolicum ut $\frac{1}{2} pbr$ ad $\frac{1}{2} pbr . \frac{8}{15}$, hoc est, ut 1 ad $\frac{8}{15}$, seu ut 15 ad 8 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA 84.

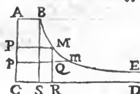


216. *Cubare solidum ex rotatione spatii interminati hyperbolici juxta asymptotum* CD *tanquam axem genitum*.

Sit $AB = b$, $AC = a$, $CP = x$, $PM = y$; erit $Pp = dx$, posita peripheria radio AC descripta $= p$, peripheria radio PC descripta $px : a$, quæ ducta in $PM = y$ dat superficiem cylindri parallelogrammo CPMR descripti $= pxy : a$ (§. 541 *Geom.*). Hæc vero, si ulterius ducatur in $Pp = dx$, prodibit cylindrulus cavus, parallelogrammulo PpQM descriptus seu elementum solidi $= pxydx : a$.

Est vero ex natura hyperbolæ intra asymptotos.

 $xy =$



$xy = ab$ (§. 502 *part.* 1)

Quare $y = ab : x$

$pxydx : a = pabxdx : ax = pbdx$

$\int pxydx : a = pbx$.

Quodsi pro x substituatur a; prodibit solidum integrum pba.

COROLLARIUM.

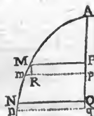
217. Cylindrus ex rotatione parallelogrammi ACSB circa axem CS geniti est $\frac{1}{2}pba$ (§. 541 *Geom.*), ideoque ad solidum hyperbolicum ut $\frac{1}{2}pba$ ad pba, hoc est, ut $\frac{1}{2}$ ad 1, seu ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

SCHOLION.

218. *Possunt etiam figuræ planæ rotari circa tangentes, vel alias lineas quascunque. Sed cum nihil in his difficultatis sit, plura non addimus.*

PROBLEMA 85.

219. *Metiri superficiem corporis rotatione figuræ* ANQ *circa axem* AQ *geniti.*



RESOLUTIO.

Sit ratio radii ad peripheriam $= r : p$, $AP = x$, $PM = y$; erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, peripheria radio PM descripta $= py : r$, quæ ducta in Mm dat elementum superficiei solidi ex rotatione circa axem AQ geniti $py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$.

Quodsi jam ex natura figuræ ANQ valor ipsius dx^2 substituatur & elementum integrabile fiat; superficies desiderata per summationem habetur.

PROBLEMA 86.

220. *Invenire superficiem Coni.*



Cum Conus gignatur ex rotatione trianguli ACD circa axem DC; ex æquatione ad triangulum in expressione generali ante (§. 198) inventa substituendus est valor ipsius dx^2. Sit nempe $CD = a$, $AC = r$, $DP = x$, $PM = y$; erit (§. 268 *Geom.*)

$x : y = a : r$

$rx = ay$

$rdx = ady$

$dx^2 = a^2dy^2 : r^2$

$py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$ (§. 219)

$= py\sqrt{(a^2dy^2 + r^2dy^2)} : r^2$

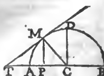
$= pydy\sqrt{(a^2 + r^2)} : r^2$

$\int py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = py^2\sqrt{(a^2 + r^2)} : 2r^2$.

Quodsi pro y ponatur r, prodibit superficies coni integri $= \frac{1}{2}p\sqrt{(a^2 + r^2)} = \frac{1}{2}p \cdot AD$; est nempe æqualis facto ex semiperipheria basis Coni in latus AD, prorsus ut in elementis Geometriæ demonstratum (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA 87.

221. *Invenire superficiem sphæræ.*



Sit diameter circuli genitoris $= 1$, $AP = x$; erit elementum arcus AM (§. 157) $= dx : 2\sqrt{(x - x^2)}$, quod ductum in periphe-

ripheriam radio PM descriptam $= 2p\sqrt{(x - x^2)}$ producit elementum superficiei sphæricæ (§. 219) pdx. Hujus integrale px indefinite metitur superficiem segmenti sphærici, cujus altitudo x.

Quodsi pro x substituatur diameter 1; erit superficies sphæræ integræ $= p$, seu, si $1 = a$, ap.

COROLLARIUM.

222. Est ergo quodlibet segmentum superficiei sphæricæ ad superficiem sphæræ integram ut px ad p, seu ut x ad 1 (§. 124 *part.* 1), hoc est, ut altitudo segmenti ad diametrum sphæræ.

PROBLEMA 88.

223. *Invenire superficiem conoidis parabolici.*

Ad parabolam est $adx = 2ydy$ (§. 21).

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$py\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r \quad (\text{§. } 219)$$

$$= py\sqrt{(4y^2dy^2 + a^2dy^2)} : ar$$

$$= pydy\sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar$$

Fiat $\sqrt{(4y^2 + a^2)} = v$

erit $4y^2 + a^2 = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$

$$ydy = \tfrac{1}{4}vdv$$

$$pydy\sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar = pv^2dv : 4ar$$

$$\int pydy\sqrt{(4y^2 + a^2)} : ar = pv^3 : 12ar = (4py^2 + pa^2)\sqrt{(4y^2 + a^2)} : 12ar.$$

Fiat $y = 0$; relinquetur $pa^2\sqrt{a^2} : 12ar = pa^2 : 12r$. Unde superficies segmenti conoidis parabolici $=$

$$(4py^2 + pa^2)\sqrt{(4y^2 + a^2)} : 12ar - pa^2 : 12r$$

CAPUT V.

De Usu Calculi Integralis in Methodo Tangentium Inversa.

DEFINITIO 9.

224. **M**ethodus *Tangentium inversa* est, qua ex data tangente aut linea quacunque alia, cujus determinatio a tangente pendet, invenitur æquatio ad curvam aut constructio curvæ.

COROLLARIUM.

225. Cum expressiones differentiales tangentis, subtangentis, subnormalis, normalis & arcus, itemque areæ curvæ superius traditæ fuerint (§. 20. 34. 35. 44. 98. 144); si valor datus expressioni differentiali æquetur & æquatio differentialis vel summetur; vel, si id fieri nequeat, construatur, curva desiderata innotescit.

PROBLEMA 89.

226. *Invenire lineam curvam, cujus subtangens* $= 2y^2 : a$.

Quoniam subtangens lineæ algebraicæ $= ydx : dy$ (§. 20); erit

$$ydx : dy = 2y^2 : a$$

$$aydx = 2y^2dy$$

$$adx = 2ydy$$

$$ax = y^2$$

Est ideo curva quæsita parabola (§. 388 *part.* 1), cujus constructio ex superioribus manifesta (§. 393 *part.* 1).

PROBLEMA 90.

227. *Curvam invenire, cujus subnormalis est constans*, e. gr. $= a$.

Quoniam subnormalis lineæ algebraicæ (§. 35) $ydy : dx$; erit

$ydy =$

$$ydy = adx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$
$$y^2 = 2ax.$$

Est ideo curva quæsita parabola, cujus parameter $= 2a$ (§. 388 *part.* 1).

PROBLEMA 91.

228. *Invenire curvam, cujus subnormalis* $= r - x$.

Quoniam $ydy : dx = r - x$ (§. 35);

erit
$$ydy = rdx - xdx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$y^2 = 2rx - x^2$$

Est ideo curva quæsita circulus, cujus radius r seu diameter $2r$ (§. 377 *part.* 1).

PROBLEMA 92.

229. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad* $r - x$ *& y*.

Quoniam (§. 20)
$$r - x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r - x : y = dy : dx$ (§. 124 *part.* 1)
$$rdx - xdx = ydy$$
$$rx - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$
$$2rx - x^2 = y^2$$

Est ideo curva quæsita denuo circulus (§. 377 *part.* 1).

PROBLEMA 93.

230. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad* $r + x$ *& y*.

Quoniam (§. 20)
$$r + x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r + x : y = dy : dx$ (§. 124 *part.* 1)
$$rdx + xdx = ydy$$
$$rx + \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$
$$2rx + x^2 = y^2$$

Est ideo curva quæsita hyperbola æquilatera, cujus axes conjugati & parameter $= 2r$ (§. 507 *part.* 1).

PROBLEMA 94.

231. *Invenire curvam, in qua subtangens multiplo abscissæ aequalis.*

Quoniam (§. 20)
$$mx = ydx : dy$$

erit $mxdy = ydx$
$$mxdy - ydx = 0$$

Ut hæc æquatio integrari possit, multiplicetur per $y^{m-1} : x^2$ (§. 95); erit $(my^{m-1}xdy - y^m dx) : x^2 = 0$
$$y^m : x = a^{m-1}$$
$$y^m = a^{m-1}x$$

Satisfaciunt ergo proposito infinita parabolarum genera (§. 519 *part.* 1).

PROBLEMA 95.

232. *Invenire lineam, in qua subtangens semiordinatæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)
$$ydx : dy = y$$
$$ydx = ydy$$
$$dx = dy$$
$$x = y$$

Patet ideo, lineam quæsitam esse rectam ad cathetum trianguli rectanguli æquicruri tanquam axem relatam, seu hypothenusam trianguli rectanguli æquicruri (§. 89 *Geom.*). Quodsi vero

vero x sumatur pro arcu circuli; erit linea quæsita cyclois (§. 573 *part.* 1).

PROBLEMA 96.

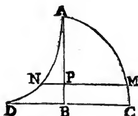
233. *Invenire curvam, cujus subnormalis* $= \sqrt{ax}$.

Quoniam $ydy : dx = \sqrt{ax}$ (§. 35)

erit
$$ydy = a^{1:2}x^{1:2}dx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$$
$$y^2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Patet ideo, quadrata semiordinatarum hujus curvæ exprimere spatia parabolæ, cujus parameter $4a$ (§. 103). Sunt igitur semiordinatæ ipsæ mediæ proportionales inter abscissas & $\tfrac{2}{3}$ semiordinatarum parabolæ circa communem axem descriptæ (§. *cit.*).

SCHOLION.



234. *Curva hæc dici potest Quadratrix parabolæ. Solent enim Geometræ* Quadratricem *alicujus curvæ appellare curvam circa eundem axem descriptam, cujus semiordinatis datis datur quadratura partium respondentium in altera curva. E. gr. si fuerit ut in nostro casu* APMA $=$ PN^2, *vel* APMA $=$ AP.PN, *vel* APMA $=$ PN.a *&c. erit* AND quadratrix *ipsius* AMC.

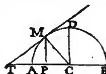
PROBLEMA 97.

235. *Invenire curvam, cujus normalis constans est.*

Sit constans linea $= a$, abcissa $= x$, semiordinata $= y$; erit (§. 44)

$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx = a$$
$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = adx$$
$$y^2dy^2 + y^2dx^2 = a^2dx^2$$
$$y^2dy^2 = a^2dx^2 - y^2dx^2$$
$$ydy = dx\sqrt{(a^2 - y^2)}$$
$$-\frac{ydy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = -dx$$
$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = a - x \quad (\text{§. } 95)$$

Est itaque curva quæsita circulus. Sit enim AC $=$ MC $= a$, AP $= x$, MP $= y$; erit PC $= a - x$, & (§. 417 *Geom.*)



$$PC = \sqrt{(MC^2 - MP^2)}$$

hoc est, $a - x = \sqrt{(a^2 - y^2)}$

PROBLEMA 98.

236. *Invenire curvam, cujus area indefinite exprimitur per* $a\sqrt{x}$.

Quoniam differentiale areæ $= ydx$ (§. 98);

erit $\tfrac{1}{2}ax^{-1:2}dx = ydx$ (§. 17)
$$\tfrac{1}{2}ax^{-1:2} = x$$
$$\tfrac{1}{4}a^2x^{-1} = \tfrac{1}{4}a^2 : x = y^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 = xy^2$$

Est ideo curva hyperbola secundi generis intra asymptotos.

COROLLARIUM.

237. Cum $\sqrt{ax}$ sit semiordinata parabolæ, cujus parameter $= a$; evidens est parabolam Apollonianam esse quadratricem hyperbolæ intra asymptotos, ad quam $\tfrac{1}{4}a^2 = xy^2$.

PROBLEMA 99.

238. *Invenire curvam, cujus quadratura indefinita* $= x^3 : a$.

Quo-

Quoniam $x^3 : a = \int y dx$ (§. 99)

erit $3x^2 dx : a = y dx$

$x^2 = \frac{1}{3} a y$

Est ideo curva quæsita parabola exterior, cujus parameter $\frac{1}{3} a$. Sit enim $AQ = PM = x$, $PQ = AM = y$; erit $\frac{1}{3} a y = x^2$ (§. 388 *part.* 1).



PROBLEMA 100.

239. *Invenire curvam, cujus area* $= a\sqrt{(a^2 + x^2)}$.

Quoniam $axdx : \sqrt{(a^2+x^2)} = ydx$ (§. 98)

$ax : \sqrt{(a^2+x^2)} = y$

$a^2x^2 : (a^2+x^2) = y^2$

hoc est, $y^2 : x^2 = a^2 : a^2 + x^2$

Quæ analogia naturam curvæ definit, cujus quadratrix est hyperbola æquilatera, axibus conjugatis & parametro existentibus a (§. 507 *part.* 1 & §. 234 *part.* 2).

PROBLEMA 101.

240. *Invenire curvam, cujus area* $= x\sqrt{(a^2 + x^2)}$.

Quoniam (§. 98)

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + dx\sqrt{(a^2+x^2)} = ydx$$

erit $\frac{2x^2 + x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = y$.

$$(2x^2 + a^2)^2 = y^2 (a^2 + x^2)$$

$$y^2 : a^2 + 2x^2 = a^2 + 2x^2 : a^2 + x^2$$

Quæ analogia definit itidem naturam curvæ, cujus quadratrix est hyperbola æquilatera.

SCHOLION.

241. *Ex problematibus his apparet, quod data quadratrice semper inveniatur quadrando facili negotio. Et hac quidem methodo inveniri possunt curvæ innumeræ quadrabiles, construique curvarum quadrabilium, seu, quod perinde est, formularum summabilium canones.*

PROBLEMA 202.

242. *Invenire curvam, cujus subtangens est linea constans* a.

Quoniam $ydx : dy = a$ (§. 20)

erit $dx = ay^{-1} dy$

$\int dx = x = \int ay^{-1} dy$.

Quodsi $ay^{-1} dy$ multiplicetur per a; erit $a^2 y^{-1} dy$ elementum hyperbolæ intra asymptotos (§. 118) & quidem æquilateræ, in qua asymptoti junguntur ad angulos rectos (§. 510 *part.* 1). Quodsi ergo y sumatur pro abscissa, erit respondens semiordinata $x = a\int y^{-1} dy$ æqualis spatio hyperbolico asymptotico per constantem a, quæ latus potentiæ in hyperbola æquilatera (§. 477 *part.* 1), diviso. Unde constructio curvæ quæsitæ a quadratura hyperbolæ pendet.

COROLLARIUM I.

243. Quoniam linea, ad quam $x = \int ay^{-1} dy$, est logarithmica ad asymptotum relata (§. 54) atque x in asymptoto sumta logarithmus semiordinatæ ipsi respondentis (§. 553 *part.* 1); erit quoque $\int ay^{-1} dy$ logarithmus ejusdem semiordinatæ y, consequenter $\int ay^{-1} dy = a\int dy : y = ly$; ly denotat logarithmum ipsius y in logistica sumtum, cujus subtangens $= a$. Unde liquet, quomodo differentiale logarithmi aut quantitatis, quam logarithmus ingreditur, sit inveniendum. Quoniam enim $ady : y = dly$, erit etiam $dly^n = nly^{n-1} ady : y$ ubi a notat subtangentem logisticæ.

COROLLARIUM 2.

244. Et quia $\frac{a\int dy}{y}$ est spatium hyperbolicum per latus potentiæ hyperbolæ divisum; spatia hyperbolica per idem latus divisa exprimunt logarithmos, quorum numeri sunt ut semiordinatæ ad asymptotum relatæ.

PRO-

PROBLEMA 103.

245. *Invenire curvam, in qua est ut* a *ad* y *ita* $\sqrt{(a^2 - y^2)}$ *ad subtangentem*.

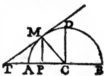
Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \sqrt{(a^2 - y^2)} : \frac{ydx}{dy}$$

$$\text{hoc est, } a : 1 = dy\sqrt{(a^2 - y^2)} : dx$$

$$\text{erit } dy\sqrt{(a^2 - y^2)} : a = dx$$

$$\int dy\sqrt{(a^2 - y^2)} : a = x$$



Quoniam $\int dy \sqrt{(a^2 - y^2)}$ est portio circuli CDMP, cujus radius AC $= a$, abscissa PC $= y$ (§. 124): constructio curvæ a quadratura circuli pendet, hoc est, circulus est quadratrix curvæ quæsitæ (§. 234). Retentis nempe abscissis PC, semiordinatæ x erunt æquales spatio PMDC per constantem a diviso.

PROBLEMA 104.

246. *Invenire curvam, in qua est ut* a *ad* y *ita* $\sqrt{(a^2 + y^2)}$ *ad subtangentem*.

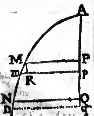
Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \sqrt{(a^2 + y^2)} : \frac{ydx}{dy}$$

$$\text{hoc est, } a : 1 = dy\sqrt{(a^2 + y^2)} : dx$$

$$\text{erit } dy\sqrt{(a^2 + y^2)} : a = dx$$

$$\int dy\sqrt{(a^2 + y^2)} : a = x$$



Quoniam $\int dy\sqrt{(a^2 + y^2)} : a$ est arcus parabolæ AM, cujus parameter $2a$ (§. 146); si semiordinata parabolæ PM sumatur pro abscissa curvæ quæsitæ, erit semiordinata ejusdem arcui parabolico AM æqualis.

SCHOLION.

247. *Apparet ideo, interdum constructionem pendere a rectificatione curvarum. Præstat autem eam ad curvarum potius rectificationem, quam quadraturam reducere, quia in priori casu praxis est facilior, ubi arcum filo metiri datur. In posteriori autem spatiorum quadratura ope serierum infinitarum definienda est in numeris prope veris & inde similiter in ejusmodi numeris semiordinatæ curvarum quæsitarum sunt computanda.*

PROBLEMA 105.

248. *Invenire curvam, in qua est subtangens ad* y *ut quantitas constans* r *ad* $\sqrt{(r^2 - y^2)}$.

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r : \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

$$\text{hoc est, } dx : dy = r : \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

$$\text{erit } dx = rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

$$x = \int rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

Quia (*Vid. Fig. 1 hujus pag.*) $\int rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}$ est arcus circuli DM, cujus radius AC $= r$, PC $= y$ (§. 153); constructio curvæ pendet a rectificatione peripheriæ circuli. Nempe si abscissæ in circulo PC sumantur pro abscissis curvæ quæsitæ; erunt ejusdem semiordinatæ arcubus DM æquales.

PROBLEMA 106.

249. *Invenire curvam, in qua subtangens est ad* y *ut* r^2 *ad* $r^2 + y^2$.

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r^2 : r^2 + y^2$$

$$\text{hoc est, } dx : dy = r^2 : r^2 + y^2$$

$$\text{erit } dx = r^2 dy : (r^2 + y^2)$$

Quo-

Quoniam $\int r^2 dy : (r^2 + y^2)$, aut, si $r = 1$, $\int dy : (1 + y^2)$ est elementum arcus BM, cujus tangens BK $= y$ (§. 158); evidens est, constructionem curvæ quæsitæ denuo pendere a rectificatione arcuum circuli indefinita. Sumtis nempe tangentibus arcuum BK pro abscissis curvæ quæsitæ semiordinatæ ejusdem erunt arcubus BM æquales, radio circuli existente r.

PROBLEMA 107.

250. *Invenire curvam, in qua tangens est constans.*

Sit constans illa $= a$, abscissa $= x$, semiordinata y; erit (§. 34)

$$y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy = a$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a\,dy}{y}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 = \frac{a^2 dy^2 - y^2 dy^2}{y^2}$$

$$x = \frac{\int dy}{y} \sqrt{(a^2 - y^2)}$$

Curva, in qua tangens constans est, (*Vid. Fig. seq.*) describitur puncto M, si alterum extremum rectæ TM in recta AK incedit, diciturque *Tractoria*. Ad ejus ideo descriptionem non opus est, nisi bacillo, in cujus utroque extremo cuspis infixa, ita ut cuspis in M prematur in planum elatere, vel pondere. Est itaque æquatio inventa ad Tractoriam.

Eadem æquatio sic eruitur. Quoniam TM $= a$, PM $= y$; erit PT $= \sqrt{(a^2 - y^2)}$. Sed PT $= y\,dx : dy$ (§. 20). Ergo $y\,dx : dy = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, consequenter $dx = dy\sqrt{(a^2 - y^2)} : y$, aut, quia semiordinatæ continuo decrescentis differentiale negativum, $dx = - dy\sqrt{(a^2 - y^2)} : y$.

COROLLARIUU 1.

251. Si fuerit $x = 0$, erit etiam $dx = 0$, ideoque

$$- dy\sqrt{(a^2 - y^2)} : y = 0$$

$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = 0$$

$$a^2 - y^2 = 0$$

$$a = y$$

Est igitur in A, ubi origo indeterminatæ x, AB $= a$, id quod etiam ex descriptione liquet.

COROLLARIUM 2.

252. Quoniam $dx = dy\sqrt{(a^2 - y^2)} : y$, erit $y\,dx = dy\sqrt{(a^2 - y^2)}$, ideoque spatium interminatum KPMI $= \int dy\sqrt{(a^2 - y^2)}$. Quadratura igitur tractoriæ pendet a Quadratura circuli (§. 124), cujus radius est a, abscissæ, a centro computatæ, sunt y.

COROL.

COROLLARIUM 3.

253. Similiter quia $dx^2 = \frac{a^2dy^2 - y^2dy^2}{y^2}$, erit $dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2 - y^2dy^2}{y^2} + dy^2$

$$= a^2dy^2 : y^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int\frac{ady}{y}$$

Quare cum $\int\frac{ady}{y}$ sit logarithmus ipsius y; arcus tractoriæ sunt ut logarithmi, semiordinatæ ut numeri.

Et quia $\int ady : y$ est abscissa Logarithmicæ, cujus subtangens $= a$; arcus tractoriæ rectificantur per abscissas Logarithmicæ.

COROLLARIUM 4.

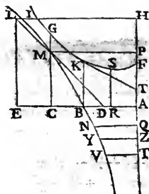
254. Si BO $= v$, erit PM $= a - v$, ideoque $a - v = y$ & $-dv = dy$, consequenter $dx = -dy\sqrt{(a^2 - y^2)} : y = dv\sqrt{(2av - v^2)} : (a - v)$. Habemus ideo æquationem, quæ Tractoriam definit respectu axis BA.

CAPUT VI.

De Usu Calculi Integralis in Logarithmorum Doctrina.

PROBLEMA 108.

255. *Dato numero, invenire logarithmum.*

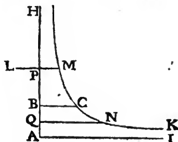


Sit Logarithmicæ ordinata AB $= 1$, eademque subtangenti, quæ constans est (§. 54), æqualis; erit PM numerus unitate major, QN numerus unitate minor, AP logarithmus numeri unitate majoris, AQ logarithmus numeri unitate minoris.

Quodsi jam differentia inter AB & PM sit y; erit PM $= 1 + y$, consequenter AP seu logarithmus unitate majoris numeri $\int dy : (1 + y)$ (§. 243). Est vero $1 : (1 + y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $dy : (1 + y) = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy$ &c. in infinitum, consequenter $\int dy : (1 + y)$, seu logarithmus numeri $1 + y$ unitate majoris, $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

Quodsi differentia inter AB & QN sit y; erit QN $= 1 - y$, consequenter AQ seu logarithmus numeri unitate minoris $= \int - dy : (1 - y)$. Est vero $-1 : (1 - y) = -1 - y - y^2 - y^3 - y^4 -$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $-dy : (1 - y) = -dy - ydy - y^2dy - y^3dy - y^4dy$ &c. in infinitum, consequenter $\int - dy : (1 - y)$, seu logarithmus numeri unitate minoris, $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM 1.



256. Si latus potentiæ hyperbolæ AB vel BC fuerit 1, BP $= y$; erit AP $= 1 + y$ & spatium hyperbolicum asymptoticum $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Et ubi BQ $= y$, erit AQ $= 1 - y$, ideoque (si QN $= v$) ob $1 = v - vy$ (§. 490 *part.* 1), elementum spatii hyperbolici asymptotici $= dy : (1 - y)$, consequenter spatium $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Possunt ergo etiam logarithmi per hyperbolam exhiberi: nimirum si latus potentiæ AB $= 1$, abscissa AP est numerus unitate major, spatium asymptoticum BCMP logarithmus numeri unitate majoris; similiter abscissa AQ est numerus unitate minor & spatium hyperbolicum asymptoticum QNCB logarithmus numeri unitate minoris.

COROLLARIUM 2.

257. Quodsi $y = 1$, erit $1 + y = 2$; ideoque logarithmus hyperbolicus binarii $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM 3.

258. Quoniam logarithmus ipsius $1 : (1 + x)$ & numeri integri $1 + x$ idem est (§. 351 *Arith.*), fractio vero $1 : (1 + x)$ numerus unitate minor; si pro $1 - y$ ponatur $1 : (1 + x$, formula posterior inveniendis logarithmis tam numerorum unitate majorum, quam minorum satisfacit. Nempe cum sit ex hypothesi

$$1 - y = 1 : (1 + x)$$

erit $1 - 1 : (1 + x) = y$

hoc est, $\frac{1 + x - 1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x} = y$

ideoque in formula $y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. pro y substitui debet $x : (1 + x)$, si numeri unitate majoris logarithmus desideretur.

SCHOLION.

259. *Formula posterior si in casu quoque priore, ubi numerus, cujus logarithmus quæritur, unitate major, adhibetur, inventio logarithmi faciliori opera absolvitur, quia series citius convergit, quam si priori formula utamur. Enimvero probe notandum, logarithmos hyperbolicos coincidere cum Neperianis, ideoque diversos esse a Briggianis, quibus communiter utimur. Cum autem hyperbolici sint ad Briggianos ut logarithmus denarii hyperbolicus ad logarithmum denarii Briggianum, sitque logarithmus denarii hyperbolicus* 2.302585092994 *&c. Briggianus* 1.000000000000; *hyperbolici ad Briggianos, quibus vulgo utimur, facile reducuntur.*

PROBLEMA 109.

260. *Dato logarithmo, invenire numerum.*

Sit logarithmus l, numerus $1 + y$; erit $l = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. (§. 255). Quare cum $y = l - bl^2 + (2b^2 - c)l^3 + (5bc - 5b^3 - d)l^4 + (14b^4 + 6bd - 21b^2c + 3c^2 - e)l^5$ &c. (§. 366 *part.* 1) erit ob $a = 1$, & $b = -\frac{1}{2}$, $c = +\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$, $e = +\frac{1}{5}$ &c.

$2b^2 - c = \frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

$5bc - 5b^3 - d = -\frac{5}{6} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = -\frac{40-30-12}{48} = \frac{2}{48} = +\frac{1}{24}$

$14b^4 + 6bd - 21b^2c + 3c^2 - e = \frac{14}{16} + \frac{6}{8} - \frac{21}{12} + \frac{3}{9} - \frac{1}{5} = \frac{7}{8} + \frac{6}{8} - \frac{14}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{40-15-24}{120} = +\frac{1}{120}$

ideoque

$y = l + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{6}l^3 + \frac{1}{24}l^4 + \frac{1}{120}l^5$ &c. in infinitum $= \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4} + \frac{l^5}{1.2.3.4.5}$ &c. in infinitum.

Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $y = l + \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Quoniam vero l est logarithmus numeri $1 + y$; erit numerus $1 + y = 1 + l$

$+l+\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Si l fuerit logarithmus numeri unitate minoris $1-y$; erit $l=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. & eodem ut ante modo reperietur $y=l-\frac{1}{1.2}l^2+\frac{1}{1.2.3}l^3-\frac{1}{1.2.3.4}l^4+\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum, consequenter $1-y=1-\frac{l}{1}+\frac{1}{1.2}l^2-\frac{1}{1.2.3}l^3+\frac{1}{1.2.3.4}l^4-\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum.

Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C &c. erit $y=l-\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl-\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum, consequenter $1-y=1-l+\frac{1}{2}Al-\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl-\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

P R O B L E M A 110.

261. *Dato sinu, invenire logarithmum.*

Sit radius $=1$, cosinus $=x$; erit sinus $=\sqrt{(1-x^2)}$ (§. 377 *part.* 1) $=\sqrt{((1+x)(1-x))}$. Sed $l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6$ &c. & $l(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6$ &c. (§. 255). Ergo $l(1-x^2)=-\frac{2}{2}x^2-\frac{2}{4}x^4-\frac{2}{6}x^6$ &c. (§. 337 *Arith.*) & $l\sqrt{(1-x^2)}=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6$ &c. (§. 338 *Arith.*).

P R O B L E M A 111.

262. *Data tangente, invenire logarithmum.*

Sit radius, seu sinus totus, hoc est, tangens 45° (§. 32 *Trigon.*) $=1$; tangens arcus 45° majoris $=1+x$; tangens arcus 45° minoris $=1-x$; erit logarithmus tangentis in casu priore $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum; in casu posteriore $-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum (§. 255).

S E C T I O   T E R T I A

DE CALCULO EXPONENTIALI.

C A P U T   P R I M U M

De Natura Calculi Exponentialis.

D E F I N I T I O 10.

263. Calculus *exponentialis* est methodus differentiandi quantitates exponentiales & differentialia exponentialium summandi.

D E F I N I T I O 11.

264. *Quantitas exponentialis* est dignitas, cujus exponens variabilis, e. gr. x^x, a^x.

P R O B L E M A 112.

265. *Quantitatem exponentialem differentiare.*

R E S O L U T I O.

Non alia re opus est, quam ut quantitates exponentiales ad logarithmicas revo-

revocentur: quo facto, differentiatio succedit per §. 243.

E. gr. Quæritur differentiale quantitatis exponentialis x^y. Fiat

$$x^y = z$$

$$\text{erit} \quad ylx = lz \qquad (\text{§. 341 } Arith.)$$

$$lxdy + ydx : x = dz : z \qquad (\text{§. 243})$$

$$zlxdy + zydx : x = dz$$

hoc est, $x^y lxdy + yx^{y-1} dx = dz$

Sit quantitas exponentialis differentianda secundi gradus v^{x^y}. Fiat, ut ante,

$$v^{x^y} = z$$

$$\text{erit} \quad x^y lv = lz \qquad (\text{§. 341 } Arith.)$$

$$(x^y lxdy + yx^{y-1}dx)lv + x^y dv : v = dz : z \quad (\text{§. 243})$$

$$z(x^y lxdy + yx^{y-1}dx)lv + zx^y dv : v = dz$$

hoc est,

$$v^{x^y}(x^y lxdy + yx^{y-1}dx)lv + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz$$

seu

$$v^{x^y} x^y lxlvdy + v^{x^y} yx^{y-1} lvdx + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz.$$

Eadem ratione inveniri potest differentiale quantitatis exponentialis cujuscunque alterius.

Problema 113.

266. *Differentiale logarithmicum integrare.*

Sit differentiale integrandum $xlxdx$. Fiat

$$x = 1 + y$$

$$\text{erit} \quad lx = l(1+y)$$

$$\& \quad dx = dy$$

$$xlxdx = l(1+y)(1+y)dy.$$

Est vero $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 255). Ergo $l(1+y)(1+y)dy = (1+y)dy$ $(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum$)$ = (multiplicatione actu facta)

$$ydy - \tfrac{1}{2}y^2dy + \tfrac{1}{3}y^3dy - \tfrac{1}{4}y^4dy + \tfrac{1}{5}y^5dy \text{ \&c.}$$
$$+ y^2dy - \tfrac{1}{2}y^3dy + \tfrac{1}{3}y^4dy - \tfrac{1}{4}y^5dy \text{ \&c.}$$

h. e. $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

Unde tandem habetur $\int xlxdx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{1.2.3.4}y^4 + \frac{1}{1.3.4.5}y^5 - \frac{1}{1.4.5.6}y^6$ &c. in infinitum: in qua serie $y = x - 1$.

Problema 114.

267. *Differentiale exponentialem quantitatem involvens integrare.*

Sit differentiale integrandum $x^x dx$. Fiat $x = 1 + y$, erit $x^x = (1+y)^{1+y}$, ideoque $x^x dx = (1+y)^{1+y}dy$. Fiat

$$(1+y)^{1+y} = 1 + v$$

$$\text{erit} \quad (1+y)l(1+y) = l(1+v)$$

hoc est, $(1+y)(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum$) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 255).

seu per calculum præcedentem $y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{20}y^5$ &c. in infinitum $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 266).

Fiat porro

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$

$$\text{erit } v^2 = + y^2 + 2ky^3 + k^2y^4 + 2kmy^5$$
$$+ 2my^4 + 2ny^5$$

$$v^3 = + y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5$$
$$+ 3my^5$$

$$v^4 = + y^4 + 4ky^5$$

$$v^5 = + y^5$$

(§. 95

(§. 95 *part.* 1). Unde

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c}$$
$$-\tfrac{1}{2}v^2 = -\tfrac{1}{2}y^2 - ky^3 - \tfrac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5$$
$$- my^4 - ny^5$$
$$+\tfrac{1}{3}v^3 = +\tfrac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5$$
$$+ my^5$$
$$-\tfrac{1}{4}v^4 = -\tfrac{1}{4}y^4 - ky^5$$
$$+\tfrac{1}{5}v^5 = +\tfrac{1}{5}y^5$$
$$-y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{6}y^3 - \tfrac{1}{12}y^4 + \tfrac{1}{20}y^5$$

Habemus ergo

$$\frac{1 - 1 = 0}{1 = 1} \quad \frac{k - \frac{1}{2} = 0}{k = 1} \quad \frac{m - k + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0}{m = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{n - \frac{1}{2}k^2 - m + k - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0}{n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$$

$$\frac{p - km - n + k^2 + m - k + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 0}{p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{20} = \frac{1}{3} -}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

Consequenter

$(1+y)^{1+y} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5$ &c. in infinitum.

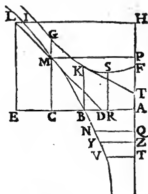
Quare differentiale ad integrandum propositum $(1+y)^{1+y}dy = dy + ydy + y^2dy + \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy + \frac{1}{12}y^5dy$ &c. in infinitum, ideoque $\int(1+y)^{1+y}dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{72}y^6$ &c.

PROBLEMA 115.

268. *Quantitatem exponentialem, consequenter curvam exponentialem, cujus æquatio datur, construere.*

RESOLUTIO.

Quantitates exponentiales reducendæ sunt ad logarithmicas, quæ per abscissas Logarithmicæ exhiberi possunt.



E. gr. Sit construenda curva exponentialis, ad quam $x^x = y$; erit (§. 339 *Arith.*) $xlx = ly$. Supponamus Logarithmicam MBN descriptam & in ea semiordinatam AB = 1. Sit PM = x; erit AP = lx. Est vero $1 : lx = x : ly$ (§. 299 *Arith.*). Ergo ly reperiri potest (§. 271 *Geom.*): cui si æqualis in axe Logisticæ sumatur AH, erit HI = y (§. 553 *part.* 1). Quodlibet ideo curvæ exponentialis punctum G reperitur sequentem in modum.

Fiat AC = x & ducatur MC ipsi AP parallela, quæ Logisticam in M secabit; erit MC = AP = lx. Fiat CD = AB = 1 & DE = AC, ducaturque LE ipsi MC parallela; erit LE = ly. Ducatur LH ipsi EA parallela; erit semiordinata HI Logarithmicæ LMBN = y. Quodsi ergo AC sumatur pro axe curvæ exponentialis fiatque CG = HI; erit G punctum in curva quæsita.

Porro cum $x = 0$, erit $ly = 0$. Sed o est logarithmus unitatis. Ergo y est unitas, consequenter = AB. Quare si fiat AF = AB; erit F punctum curvæ exponentialis.

Similiter quando AB = 1 = x; erit $lx = o$, ideoque ad AB applicata y est 1 seu ipsi AB æqualis. Quamobrem si fiat BK = BA; erit K punctum curvæ exponentialis.

CAPUT

CAPUT II.

De Usu Calculi exponentialis in Curvarum exponentialium symptomatis investigandis.

DEFINITIO 12.

269. *Curva exponentialis* est, quæ definitur per æquationem exponentialem.

DEFINITIO 13.

270. *Æquatio exponentialis* est, quam ingreditur quantitas exponentialis.

PROBLEMA 116.

271. *Invenire subtangentem curvæ, in qua* $a^x = y$.

Quoniam $a^x = y$

erit $xla = ly$ (§. 341 *Arith.*)

$ladx = dy : y$ (§. 243)

$dx = dy : yla$

Ergo subtangens $ydx : dy$ (§. 20) $= ydy : ylady = 1 : la$.



Constructio. Sit descripta Logistica quæcunque MBN & in ea AB = 1. Fiat AC = a, ducaturque CM ipsi AP & MP ipsi AC parallela; erit PM = AC = a & AP = la (§. 554 *part.* 1). Fiat porro PQ = AB = 1, itemque QT ipsi AB parallela; erit TQ = $1 : la$ (§. 302 *Arith.* & §. 268 *Geom.*).

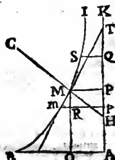
COROLLARIUM.

272. Quoniam curvæ subtangens $1 : la$ constans; æquatio proposita ad Logarithmicam est.

SCHOLION.

273. *Nempe si subtangens Logistica fuerit* $1 : la$; *ea definitur per* $a^x = y$.

PROBLEMA 117.



274. *Quadrare spatium Logisticum interminatum* KPMI.

Sit Logisticæ subtangens PT = $1 : la$, PM = y, Pp = dx; erit

$a^x = y$ (§. 272)

$xla = ly$ (§. 341 *Arith.*)

$ladx = dy : y$ (§. 243)

$dx = dy : yla$

$ydx = ydy : yla = dy : la$

$\int ydx = y : la = y(1 : la) = PM . PT$

COROLLARIUM 1.

275. Spatium Logisticum interminatum KPMI est tranguli subtangente PT, tangente TM & semiordinata PM contenti duplum (§. 392 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

276. Quoniam spatium KPMI = PM . PT & ISQK = SQ . PT (§. 274); erit QPMS = (PM − SQ) PT, hoc est, spatium inter duas semi-

semiordinatas interceptum æquale rectangulo ex subtangente in differentiam semiordinatarum.

PROBLEMA 118.

277. *Cubare solidum Logisticum ex rotatione spatii interminati* KPMI *circa asymptotum* PK *geniti* (*Vid. Fig.* §. 274).

Quoniam (§. 274)

$dx = dy : yla$; erit (§. 197)

$py^2 dx : 2r = py^2 dy : 2ryla = pydy : 2rla$

$\int py^2 dx : 2r = py^2 : 4rla$.

COROLLARIUM 1.

278. Quoniam $py^2 : 2r$ est circulus radio PM $= y$ descriptus (§. 197), $py^2 : 4rla$ est cylindrus, cujus basis eadem est cum basi solidi logistici, altitudo vero $1 : 2la$ seu $\frac{1}{2}$PT (§. 541 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

279. Est ergo solidum istud logisticum ad conum, cujus altitudo subtangens PT $= 1 : la$, semidiameter basis PM $= y$, ut $py^2 : 4rla$ ad $py^2 : 6rla$, hoc est, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$ seu ut 6 ad 4, aut ut 3 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA 119.

280. *Determinare subnormalem Logisticæ* (*Vid. Fig.* §. 274).

Quoniam $ladx = dy : y$ (§. 274)

erit $dy = yladx$

$ydy : dx = y^2 ladx : dx$ (§. 35)

$= y^2 la = y^2 : \frac{1}{la}$

Est ideo subnormalis tertia proportionalis ad subtangentem PT $= 1 : la$ & semiordinatam PM $= y$.

COROLLARIUM.

281. Quodsi ergo parabola describatur, cujus parameter subtangenti logisticæ æqualis; semiordinatæ parabolæ eædem sunt cum semiordinatis logisticæ, illius autem abscissis hujus subnormales æquantur.

PROBLEMA 120.

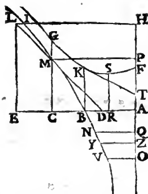
282. *Determinare subtangentem curvæ exponentialis, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $xlx = ly$ (§. 341 *Arith.*)

erit $lxdx + xdx : x = dy : y$ (§. 243)

$ylxdx + ydx = dy$

Ergo subtangens $ydx : dy$ (§. 20) $=$ $ydx : (ylxdx + ydx) = 1 : (lx + 1)$.



Est itaque PT tertia proportionalis ad AB + AP $= 1 + lx$ & AB $= 1$ (§. 268).

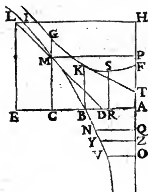
PROBLEMA 121.

283. *Determinare subnormalem curvæ, ad quam* $x^x = y$.

Quia $ylxdx + ydx = dy$ (§. 282); erit subnormalis $ydy : dx = (y^2 lxdx + y^2 dx) : dx$ (§. 35) $= y^2 lx + y^2 = y^2 (lx + 1)$.

Quærenda igitur est (*Vid. Fig. præced.*) ad AB $= 1$ & CG $= y$ tertia proportionalis y^2 & hinc porro ad AB $= 1$, AB + AP $= 1 + lx$ atque lineam inventam y^2 quarta proportionalis.

PROBLEMA 122.



284. *Determinare minimam applicatam* SR *in curva exponentiali, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $ylxdx + ydx = dy$ (§. 282); fiat $ylxdx + ydx = 0$ (§. 63); erit

$$lx + 1 = 0$$

$$1 = -lx$$

Fiat ergo $AO = AB = 1$; erit $OV = AR = x$ (§. 553 *part.* 1).

Quodsi pro lx in æquatione curvæ $xlx = ly$ (§. 282) substituatur valor modo inventus -1; prodibit $x = -ly$. Fiat igitur $AQ = VO = -x$; erit $NQ = y$ (§. *cit. part.* 1).

PROBLEMA 123.

285. *Quadrare curvam exponentialem, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam elementum areæ ydx (§. 98); erit area curvæ $= \int x^x dx =$ (si pro x ponatur $1 + v$) $v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{3}v^4 + \frac{1}{15}v^5 + \frac{1}{72}v^6$ &c. in infinitum (§. 267).

PROBLEMA 124.

286. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subtangens* $= 1 : (1 + lx)$.

Quoniam $1 : (1 + lx) = ydx : dy$ (§. 20)

erit $dy = y(1 + lx)dx$

$$dy : y = dx + lxdx$$

$$\int dy : y = ly, \int(dx + lxdx) = xlx \quad (\S. 243)$$

$$ly = xlx$$

$$y = x^x \quad (\S. 337. 341 \textit{ Arith.})$$

PROBLEMA 125.

287. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis* $y^2(lx + 1)$.

Quoniam $y^2(lx + 1) = ydy : dx$ (§. 35)

erit $y^2(lx + 1)dx = ydy \quad - y^2$

$$lxdx + dx = dy : y$$

$$xlx = ly \quad (\S. 243)$$

$$x^x = y \quad (\S. 337. 341 \textit{ Arith.})$$

PROBLEMA 126.

288. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis* $y^2 la$.

Quoniam $y^2 la = ydy : dx$ (§. 35)

erit $y^2 ladx = ydy$

$$ladx = dy : y$$

$$xla = ly \quad (\S. 243)$$

$$a^x = y \quad (\S. 341 \textit{ Arith.})$$

Est ergo Curva quæsita Logarithmica vulgaris seu Logistica (§. 272).

PROBLEMA 127.

289. *Invenire æquationem ad curvam, cujus area* $(2x^2 lx - x^2) : 4la$.

Quoniam (§. 98)

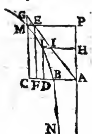
$$(4xlxdx + 2xdx - 2xdx) : 4la = ydx$$

erit $4xlx = 4yla$

$$xlx = yla$$

$$x^x = a^y \quad (\S. 341 \textit{ Arith.})$$

Curva



Curva hæc vi probl. 115 (§. 268) ita construitur ope Logarithmicæ vulgaris MBN. Sit nempe $AB = 1$; quæ in infinitum producatur. Fiat $AD = a$ & $AC = x$, ducanturque DL & CM ipsi AP, HL & PM ipsi AC parallelæ; erit $DL = AH = la$ & $CM = AP = lx$ (§. 268). Fiat $AF = AH$ & ducatur FE ipsi CG parallella, per A vero & E recta AG ipsi CM continuatæ in G occurrens; erit $CG = xlx : la = y$ (§. 268 *Geom.*), ideoque punctum G in curva quæsita, quæ definitur per $x^x = a^y$.

COROLLARIUM 1.

290. Quia $lxdx + dx = lady$ (§. 243)
erit $dx = lady : (lx + 1)$
$ydx : dy = yla : (lx + 1)$ (§. 20).
Est ergo subtangeus curvæ hujus exponentialis quarta proportionalis ad $AB + AP$, CG & constantem AH.

COROLLARIUM 2.

291. Quia $(lxdx + dx) : la = dy$ (§. 290); erit $ydy : dx = y(lx + 1) : la$ (§. 35), ideoque subnormalis curvæ hujus exponentialis est quarta proportionalis ad constantem AH, ad $AP + AB$ & ad CG.

COROLLARIUM 3.

292. Est ergo subtangens ad subnormalem ut $yla : (lx + 1)$ ad $y(lx + 1) : la$, hoc est ut la^2 ad $(lx + 1)^2$ (§. 124 *part.* 1). Quare quadratum compositæ ex constaute AB & variabili AP est ad quadratum constantis AH ut subnormalis curvæ exponentialis ad ejus subtangentem.

SECTIO QUARTA
DE CALCULO
DIFFERENTIO-DIFFERENTIALI.
CAPUT PRIMUM
De Natura Calculi Differentio-Differentialis.

DEFINITIO 14.

293. *Calculus differentio-differentialis* est methodus quantitates differentiales denuo differentiandi.

COROLLARIUM.

294. Quoniam signum differentialis est d (§. 8); differentiale ipsius dx erit ddx; differentiale ipsius ddx erit $dddx$ & ita porro.

HYPOTHESIS.

295. *Scribantur* ddx, $dddx$, $ddddx$ &c. *compendiosius* d^2x, d^3x, d^4x &c.

DEFINITIO 15.

296. *Differentiale primi gradus* est infinitesima quantitatis ordinariæ, ut dx. *Differentiale secundi gradus* est infinitesima quantitatis differentialis primi gradus, veluti d^2x, $dxdx$ vel dx^2, $dxdy$. *Differentiale tertii gradus* est infinitesima quantitatis differentialis secundi gradus, ut d^3x, dx^3, $dxdydz$ & ita porro.

PROBLEMA 128.

297. *Invenire regulas differentiandi differentialia quæcunque data.*

RESOLUTIO.

Eodem prorsus modo investigari possunt, quo supra invenire docuimus regulas differentiandi quantitates ordinarias (§. 17. 19): id quod uno alteroque exemplo ostendere libet.

E. gr. I. Sit investigandum differentiale ipsius xdx.

Fiat $xdx = v$

erit $dx = v : x$

$d^2x = (xdv - vdx) : x^2$ (§. 19)

$x^2d^2x = xdv - vdx$

$vdx + x^2d^2x = xdv$

hoc est, ob $v = xdx$,

$xdx^2 + x^2d^2x = xdv$

$dx^2 + xd^2x = dv$

Differentiatur ergo xdx eodem modo, quo duæ quantitates ordinariæ se mutuo multiplicantes differentiari solent (§. 12).

II. Sit differentiale ipsius $x : dx$ investigandum.

Fiat $x : dx = v$

$x = vdx$

$dx = vd^2x + dxdv$ per cas. præced.

$dx - vd^2x = dxdv$

hoc est, ob $v = x : dx$

$dx - xd^2x : dx = (dx^2 - xd^2x) : dx = dxdv$

$(dx^2 - xd^2x) : dx^2 = dv$

Differentiatur itaque $x : dx$ eodem modo, quo quantitates ordinariæ se mutuo dividentes differentiari solent (§. 19).

III. Sit differentiale ipsius dx^2 investigandum.

Fiat $dx^2 = v$

erit $dx = v : dx$

$d^2x = (dxdv - vd^2x) : dx^2$ per cas. 2

$dx^2d^2x = dxdv - vd^2x$

$vd^2x + dx^2d^2x = dxdv$

hoc est, ob $v = dx^2$

$dx^2d^2x + dx^2d^2x = 2dx^2d^2x = dxdv$

$2dxd^2x = dv$

Differentialium igitur potentiæ, veluti dx^2, eodem modo differentiantur, quo potentiæ quantitatum ordinariarum differentiari solent (§. 13 & seqq.).

COROLLARIUM 1.

298. Cum differentialia composita aut se mutuo multiplicent, aut se mutuo dividant, aut potentiæ sive perfectæ, sive imperfectæ differentialium primi gradus existant; differentialia eodem modo, quo quantitates ordinariæ, differentiantur.

COROLLARIUM 2.

299. Calculus ideo differentio-differentialis non est diversus a calculo differentiali (§ 293).

PROBLEMA 129.

300. *Differentiare differentialia.*

RESOLUTIO.

Differentialia considerentur instar ordinariarum quantitatum & ex circumstantiis casuum specialium dijudicetur, quænam sint variabiles, quænam constantes. Ipsa vero differentiatio absolvatur per problemata *cap. 1 sect. 1* (vi §. 299).

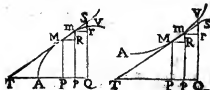
E. gr. Sit differentiale denuo differentiandum $= 1 : dx$ & 1 quantitas constans; erit $d(1 : dx) = - d^2x : dx^2$ (§. 19). Similiter reperitur $d(ydy : dx) = (dy^2 + yd^2y) : dx$, si dx constans; vel $(dxdy^2 - ydyd^2x) : dx^2$, si dy constans.

CAPUT

CAPUT II.

De usu Calculi Differentio-Differentialis in inveniendo Puncto Flexus Contrarii Curvarum.

DEFINITIO 16.



301. *Punctum flexus contrarii* est punctum M, in quo curva AMS flectitur in partes contrarias, ut scilicet axi, aut puncto cuidam fixo, convexitatem obvertat, cum antea concavitatem obverteret. Vocatur *Punctum regressus*, si curva in contrarias partes flexa regreditur versus verticem A.

PROBLEMA 130.

302. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ordinatæ sunt inter se parallelæ.*

RESOLUTIO.

Sint (*Vid. Figuras præced.*) duæ curvæ AMS, quarum una axi concavitatem, altera convexitatem obvertat. Ducatur tangens TM, sintque PM, *pm* & QS infinite propinquæ, & $Pp = pQ$, hoc est; dx sit constans. Demittantur ex punctis curvarum M & *m* perpendiculares MR & *mr*. Quoniam *pm* ipsi QS parallela, *per hypoth.* erit angulus $m = S$ (§. 233 *Geom.*). Sed $MR = Pp$ & $mr = pQ$ *per hypoth.* ideoque $MR = mr$ (§.87 *Arith.*). Ergo $mR = rS$ (§. 251 *Geom.*). Est vero $Sr > Vr$, quando curva axi concavitatem obvertit, & $Sr < Vr$, quando convexitas curvæ axem respicit. Quamobrem in casu priori differentia semiordinatarum dy continuo decrescit, in posteriore autem crescit, sumta abscissæ differentia dx pro constante. In puncto itaque flexus contrarii differentia semiordinatarum dy est minimum aliquod, quando curva primum ad axem concava, deinde convexa; maximum vero aliquod, quando curva ad axem primum convexa, deinde concava. Invenitur ideo illud punctum, si fiat $d^2y = 0$ vel $d^2y = \infty$, hoc est, si sumta dx pro constante, valor ipsius dy denuo differentietur (§. 300) & quæ prodit differentia vel nihilo, vel infinito æqualis ponatur:

COROLLARIUM.

303. Quodsi æquatio ad curvam ignotam detur; inveniri potest, utrum convexitatem, an concavitatem axi obvertat, si ex æquatione differentiali eruatur ratio *mr* & MR. E. gr. In parabola (§. 388 *part.* 1)

$$ax = y^2$$

ideoque

$$adx = 2ydy$$

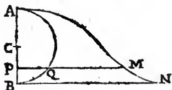
$$a : 2y = dy : dx$$

hoc est, $a : 2\sqrt{ax} = dy : dx$

Crescente ideo abscissa x, decrescit ratio $a : 2\sqrt{ax}$ (§. 205 *Arith.*). Quare cum *da* sit constans, *per hypoth*, dy decrescere debet (§. 204 *Arith.*). Parabola igitur constanter concavitatem axi obvertit, ideoque punctum flexus contrarii habet nullum.

PRO-

PROBLEMA 131.



304. *Determinare punctum flexus contrarii* M *in Cycloide* AMN *ejus naturæ, ut sit* AQB : BN = AQ : QM.

Sit semiperipheria circuli genitoris AQB $= p$, BN $= a$, AB $= 1$, PQ $= v$, AQ $= z$, AP $= x$, PM $= y$. Quoniam *per hypoth.*

$$AQB : BN = AQ : QM$$

$$p : a = z : \frac{az}{p}$$

erit PM $=$ PQ $+$ QM $= v + az : p$. Est ideo æquatio ad curvam

$$y = v + az : p$$

unde $dy = dv + adz : p$

Sed $dz = dx : 2\sqrt{(x - x^2)}$ (§. 157) &, ob $v = \sqrt{(x - x^2)}$ (§. 377 *part.* 1), $dv = (dx - 2xdx) : 2\sqrt{(x - x^2)}$.

Ergo $2pdy = (pdx - 2pxdx + adx) : \sqrt{(x - x^2)}$. Quodsi ideo dx sumatur pro constante; erit (§. 300) $2pd^2y = -2p\sqrt{(x - x^2)}dx^2 : (x - x^2) - (pdx^2 + 4pxdx^2 - adx^2 - 4px^2dx^2 + 2axdx^2) : (x - x^2)2\sqrt{(x - x^2)} = (-4px + 4px^2 - p + 4px - a - 4px^2 + 2ax)dx^2 : 2(x - x^2)\sqrt{(x - x^2)} = (2ax - p - a)dx^2 : 2(x - x^2)\sqrt{(x - x^2)}$. Quare (§. 302)

$$(2ax - p - a)dx^2 : 2(x - x^2)\sqrt{(x - x^2)} = 0$$

$$2ax - p - a = 0$$

$$2ax = a + p$$

$$x = \tfrac{1}{2} + p : 2a$$

Ergo CP $=$ AP $-$ AC $= x - \tfrac{1}{2} = p : 2a$. Est ideo $a : p = \tfrac{1}{2}$: CP

BN : AQB $=$ BC : CP.

PROBLEMA 132.

305. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $ax^2 = (x^2 + a^2)y$.

Quoniam $ax^2 = (x^2 + a^2)y$

erit $ax^2 : (x^2 + a^2) = y$

$$\frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{(x^2 + a^2)^2} = dy$$

hoc est, $\dfrac{2a^3xdx}{x^4 + 2a^2x^2 + a^4} = dy$

Quodsi ideo dx sumatur pro constante, reperietur (§. 300)

$((2a^3x^4 + 4a^5x^2 + 2a^7)dx^2 - (8a^3x^4 - 8a^5x^2)dx^2) : (x^2 + a^2)^4 = (2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2)dx^2 : (x^2 + a^2)^4 = d^2y$.

Quare (302)

$$2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2 = 0 \qquad 2a^3$$

$$a^4 - 3x^4 - 2a^2x^2 = 0 \qquad a^2 + x^2$$

$$a^2 - 3x^2 = 0$$

$$a^2 = 3x^2$$

$$\tfrac{1}{3}a^2 = x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2} = x$$

Quodsi valor ipsius x^2 in æquatione data $ax^2 = (x^2 + a^2)y$ substituatur: prodibit

$$\tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{4}{3}a^2y : \tfrac{4}{3}a^2$$

$$\tfrac{1}{4}a = y$$

Quare si $\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$ & $\tfrac{1}{4}a$ jungantur ad angulos rectos, punctum flexus contrarii determinatur, utut curva nondum fuerit descripta.

PRO-

PROBLEMA 133.

306. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$.

Quoniam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$

erit $4b^3dx = 4b^2ydy - 4y^3dy$

$$\frac{b^3dx}{b^2y - y^3} = dy$$

Porro quoniam dx constans, reperietur (§. 300)

$$d^2y = \frac{-b^5dxdy + 3b^3y^2dxdy}{(b^2y - y^3)^2} = 0$$

$$3b^3y^2 - b^5 = 0$$

$$3y^2 = b^2$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3}b^2}$$

Substituatur hic valor in æquatione ad curvam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$; erit

$$4b^3x = \tfrac{2}{3}b^4 - \tfrac{1}{9}b^4 = \tfrac{5}{9}b^4$$

$$x = \tfrac{5}{36}b$$

Quodsi sit $x = 0$; erit

$$2b^2y^2 - y^4 = 0$$

$$2b^2 = y^2$$

$$\sqrt{2b^2} = y$$

Quodsi ponamus $dy = \infty$; erit ob

$$b^3dx : (b^2y - y^3) = dy$$

$$b^2y - y^3 = 0$$

$$b^2 - y^2 = 0$$

$$b^2 = y^2$$

$$b = y$$

in casu maximi (§. 63)

Quodsi denique hic valor substituatur in æquatione ad curvam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$; erit

$$4b^3x = 2b^4 - b^4 = b^4$$

ideoque $x = \tfrac{1}{4}b$

Curvæ igitur hujus ductus est prorsus mirabilis.

PROBLEMA 134.

307. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $ay^2 = x^3 - bx^2$.

Quia $ay^2 = x^3 - bx^2$

erit $2aydy = 3x^2dx - 2bxdx$

$$dy = \frac{3x^2dx - 2bxdx}{2ay}$$

$$d^2y = (12axydx^2 - 4abydx^2 - 6ax^2dxdy + 4abxdxdy) : 4a^2y^2 = 0$$

Hinc

$$(12axy - 4aby)dx^2 = (6ax^2 - 4abx)dxdy$$

$$\frac{(6x - 2b)ydx}{3x^2 - 2bx} = dy = \frac{(3x^2 - 2bx)dx}{2ay}$$

$$(12x - 4b)ay^2 = (3x^2 - 2bx)^2$$

$$(12x - 4b)(x^3 - bx^2) = (3x^2 - 2bx)^2$$

hoc est,

$$12x^4 - 16bx^3 + 4b^2x^2 = 9x^4 - 12bx^3 + 4b^2x^2$$

$$3x^4 - 4bx^3 = 0 \qquad x^3$$

$$3x - 4b = 0$$

$$3x = 4b$$

$$x = \tfrac{4}{3}b$$

Substituatur valor ipsius x in æquatione data $ay^2 = x^3 - bx^2$; reperietur

$$ay^2 = \tfrac{64}{27}b^3 - \tfrac{16}{9}b^3 = \tfrac{64}{27}b^3 - \tfrac{48}{27}b^3 = \tfrac{16}{27}b^3$$

$$y = \tfrac{4}{3}\sqrt{(b^3 : 3a)}.$$

PROBLEMA 135.

308. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $y - a = (x - a)^{3:5}$

Quoniam $y - a = (x - a)^{3:5}$

erit $dy = \tfrac{3}{5}(x - a)^{-2:5}dx$

Quodsi ergo dx sumatur constante; reperietur

$d^2y =$

$$d^2y = -\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = 0$$

$$-\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5} = 0$$

$$-6 = 0$$

Quoniam nullus valor ipsius x prodit in hypothesi $d^2y = 0$, ponatur

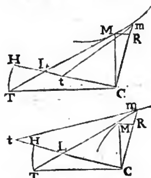
$$-6dx^2 : 25\sqrt[5]{(x-a)^7} = \infty$$

erit $25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

PROBLEMA 136.



309. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum semiordinatae* CM, C*m*, *ex puncto fixo* C *ducuntur*.

RESOLUTIO.

Sit C*m* ipsi CM infinite propinqua & CM $= y$. Tangat TM curvam in puncto M & occurrat ipsi CT ad CM perpendiculari in T. Erigatur etiam C*t* perpendicularis ad C*m* & ducatur tangens *tm* ad punctum *m*, quae ipsi C*t* in *t* occurret. Secabit autem tangens TM perpendicularem C*t* in L, eritque C*t* $<$ CL, quando curva puncto C seu polo convexitatem obvertit; ast eadem C*t* $>$ CL, quando curva est versus polum C concava. Igitur in flexus contrarii puncto L*t* $= 0$. Describatur jam ex centro C radio CM arcus MR $= dx$ & radio CT arcus TH; erit ob MCT $=$ *m*C*t* (§. 145 *Geom.*) MC*m* $=$ HCT (§. 91 *Arith.*), consequenter arcus TH $\sim$ MR (§. 141 *Geom.*). Porro TCM est rectus *per construct.* MR*m* itidem rectus (§. 38), ideoque TCM $=$ MR*m* (§. 145 *Geom.*). Et quia TMC $=$ M*m*C $+$ MC*m* (§. 239 *Geom.*), & MC*m* $= 0$; erit M*m*R $=$ TMC, consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : MR = MC : TC$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Et ob arcus MR & TH similes *per demonstrata*, erit (§. 413 *Geom.* & §. 171 *Arith.*)

$$CM : CT = MR : TH$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy}$$

Denique cum verticales ad L sint aequales (§. 156 *Geom.*) ob infinite parvum LCT vero, MLC $=$ LTC (§. 239 *Geom.*) & H rectus (§. 38), MCT itidem rectus *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$CM : CT = TH : HL$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : HL$$

Ergo HL $= dx^3 : dy^2$

Est vero, ob CT $= ydx : dy$ sumto arculo MR $= dx$ pro constante, *t*H $= (dxdy^2 - ydxd^2y) : dy^2$ (§. 300). Ergo *t*L $=$ *t*H $+$ HL $= (dxdy^2 - ydxd^2y + dx^3) : dy^2$.

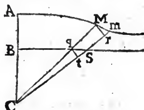
Fiat jam $\frac{dxdy^2 - ydxd^2y + dx^3}{dy^2} = 0$

erit $dy^2 + dx^2 = yd^2y$

PRO-

PROBLEMA 137.

310. *Determinare punctum flexus contrarii in conchoide* Nicomedis.



Sit $AB = qM = a$, $BC = b$, $Cq = z$, $CM = y$, $Mr = dx$; erit $mr = dy$ & (§. 535 *part.* 1)

$$z + a = y$$
$$dz = dy$$

Porro $Bq = \sqrt{(z^2 - b^2)}$ (§. 417 *Geom.*) & ducto arculo qt, erit ob rectos t & B, atque S & q nonnisi infinite parvo angulo qCS differentes (§. 239 *Geom.*) ideoque æquales (§. 4), $\triangle Sqt \sim \triangle BCq$ (§. 267 *Geom.*, consequenter

$$Bq : BC = St : tq$$
$$\sqrt{(z^2 - b^2)} : b = dz : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Et ob sectores Cqt & CMr similes, est

$$Cq : qt = CM : Mr$$
$$z : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}} = z + a : \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Unde $dx = (bzdz + abdz) : z\sqrt{(z^2 - b^2)}$

$$zdx\sqrt{(z^2 - b^2)} = bzdz + abdz$$

$$\frac{zdx\sqrt{(z^2 - b^2)}}{ab + bz} = dz = dy.$$

Si itaque dx sumatur pro constante, cum sit differentiale ipsius $zdx\sqrt{(z^2 - b^2)} = dzdx\sqrt{(z^2 - b^2)} + z^2dzdx : \sqrt{(z^2 - b^2)} = (2z^2 - b^2)dzdx : \sqrt{(z^2 - b^2)}$ & differentiale denominatoris $bz + ab = bdz$; reperitur $d^2y = (2abz^2 - ab^3 + 2bz^3 - b^3z)dzdx : ab + bz)^2\sqrt{(z^2 - b^2)} - bz\sqrt{(z^2 - b^2)}dzdx : (ab + bz)^2 = (2abz^2 - ab^3 + bz^3)dzdx : (ab + bz)^2\sqrt{(z^2 - b^2)} =$, substituto valore ipsius dz, $(2abz^3 - ab^3z + bz^4)dx^2 : (ab + bz)^3$.

Quoniam in puncto flexus contrarii

$$yd^2y = dx^2 + dy^2 \quad (\text{§. } 308)$$

hinc tandem eruitur

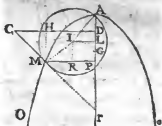
$$b(z + a)(2az^3 - ab^2z + z^4)dx^2 : (ab + bz)^3$$
$$= dx^2 + (z^4 - b^2z^2)dx^2 : (ab + bz)^2$$

$$2az^3 - ab^2z + z^4 = (ab + bz)^2 + z^4 - b^2z^2$$

$$2az^3 - ab^2z = a^2b^2 + 2ab^2z + b^2z^2 - b^2z^2$$
$$= a^2b^2 + 2ab^2z$$

$$2az^3 - 3ab^2z = a^2b^2$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0. \quad 2a$$



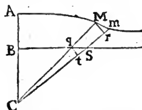
Describatur itaque parametro b parabola & (§. 622 *part.* 1) fiat $AL = \frac{5}{4}b$ & $LI = \frac{1}{4}a$. Ex centro I per verticem A describatur circulus: dico esse $PM = z$. Nam $AI^2 = LI^2 + AL^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{25}{16}b^2$ & $MR = z - \frac{1}{4}a$, $AP = z^2 : b$, $IR = z^2 : b - \frac{5}{4}b$. Quare ob $AI^2 = MI^2 = MR^2 + IR^2$, $\frac{1}{16}a^2 + \frac{25}{16}b^2 = \frac{z^4}{b^2}$

$$\frac{z^4}{b^2} - \tfrac{10}{4}z^2 + \tfrac{25}{16}b^2 + z^2 - \tfrac{1}{2}az + \tfrac{1}{16}a^2$$

$$\frac{z^4}{b^2} - \tfrac{6}{4}z^2 - \tfrac{1}{2}az = 0 \qquad z:b^2$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

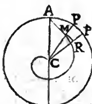
SCHOLION.



311. *Nisi inconsulta nobis visa fuisset figurarum multiplicatio, parabolam circa axem CA descripsissemus, statuto vertice in C & crure sursum tendente.*

PROBLEMA 138.

312. *Determinare punctum flexus contrarii in spirali parabolica* AMC, *quæ generatur, si axis parabolæ in peripheriam circuli incurvatur.*



Quoniam semiordinatæ PM ad axem perpendiculares; in centro C concurrere debent (§. 38). Quare si parameter parabolæ a, abscissa AP $= v$, PM $= y$; erit æquatio ad spiralem parabolicam

$$av = y^2$$

ideoque
$$adv = 2ydy$$
$$dv = 2ydy : a$$

Sit porro radius circuli $= r$, MR $= dx$; erit CM $= r - y$ &

$$CP : Pp = CM : MR$$
$$r : dv = r - y : dx$$
$$rdx = rdv - ydv$$
$$dx = (r - y)\, dv : r.$$

hoc est, substituto valore ipsius dv

$$(2rydy - 2y^2dy) : ar = dx$$
$$(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4)\, dy^2 : a^2r^2 = dx^2$$

&, si dx sumatur pro constante,

$$\frac{2rdy^2 - 4ydy^2 + 2ryd^2y - 2y^2d^2y}{ar} = 0$$
$$(r - 2y)\, dy^2 + (ry - y^2)\, d^2y = 0$$
$$(r - y)\, yd^2y = (2y - r)\, dy^2$$
$$yd^2y = \frac{(2y - r)}{r - y}\, dy^2$$

Habemus ideo

ob $dx^2 + dy^2 = yd^2y$ (§. 309)

$$\frac{(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4 + a^2r^2)}{a^2r^2}\, dy^2 = \frac{(2y - r)}{r - y}\, dy^2$$
$$4r^3y^2 - 8r^2y^3 + 4ry^4 + a^2r^3 - 4r^2y^3 + 8ry^4 - 4y^5 - a^2r^2y = 2a^2r^2y - a^2r^3$$
$$4y^5 - 12ry^4 + 12r^2y^3 - 4r^3y^2 + 3a^2r^2y - 2a^2r^3 = 0$$

Hujus æquationis radix y est semiordinata PM in puncto flexus contrarii.

CAPUT

CAPUT III.

De usu Calculi differentio-differentialis in investigandis evolutis curvarum & radio Osculi.

DEFINITIO 17.

313. Si curvæ BCF filum circumplicetur & successive iterum ab ea abducatur, extremitas ejus A in rectam MC extensi curvam aliam describit, quam *Hugenius* inventor (a) *Curvam ex evolutione descriptam*; sicut alteram, quæ evolvitur, *Evolutam* vocat.

DEFINITIO 18.

314. Portio fili MC appellatur *Radius evolutæ*, item *Radius curvedinis*, *Radius osculi*. Circulus enim, qui radio evolutæ MC ex centro C describitur, dicitur curvam ex evolutione descriptam in M *osculari*.

COROLLARIUM 1.

315. Evoluta igitur BCF est locus centrorum omnium circulorum curvam ex evolutione descriptam AMI osculantium.

COROLLARIUM 2.

316. Quando punctum B cadit in A, radius evolutæ MC æquatur arcui BC, alias aggregato ex AB & arcu BC.

(a) In Horolog. Oscillat. part. 3. def. 3. f. 60.

COROLLARIUM 3.

317. Quia elementum arcus M*m* in curva ex evolutione descripta est arcus circuli radio CM descriptus (§. 313); radius evolutæ CM est ad curvam AI perpendicularis (§. 38).

COROLLARIUM 4.

318. Quoniam radius evolutæ MC ipsam evolutam BCF continuo tangit, ceu ex genesi manifestum (§. 313); curvæ ex evolutione per innumera puncta describuntur, si tangentes in quotlibet punctis evolutæ producantur, donec arcubus sibi respondentibus æquales fiant.

SCHOLION.

319. *Meditatio de curvarum osculis debetur illustri* Leibnitio, *qui primus evolutarum* Hugenianarum *in metienda curvedine curvarum usum ostendit.*

PROBLEMA 139.

320. *Determinare radium osculi vel curvedinis in curvis, quarum semiordinatæ* PM & pm *sunt ad axem perpendiculares (Vid. Fig. præced.).*

RESOLUTIO.

Sit semiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua; sit item radius osculi C*m* alteri CM infinite propinquus. Ducantur CE & MG eidem axi AB parallelæ, quarum CE semiordinatæ MP continuatæ in E occurrat. Quoniam anguli E & R sunt recti & ob EMG & CM*m* (§. 317) rectos, ideoque æquales (§. 145 *Geom.*) utrinque angulo CMG sublato, EMC = GM*m*; erit (§. 267 *Geom.*)

$$MR : Mm = ME : MC$$

$$dx : \sqrt{(dx^2+dy^2)} = t : \frac{t\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$$

 Jam

Jam cum radius MC conſtans intelligatur, quamdiu ex centro C arcus infinite parvus M*m* deſcribitur, interea vero ME augeatur quantitate differentiali R*m*; erit radii oſculi CM differentiale nullum (§. 7). Sed, ſi *dx* ſumatur pro conſtante, differentiale ipſius MC eſt

$$\frac{dt\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}+\frac{tdyd^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}dx}=$$

$$\frac{dtdx^2+dtdy^2+tdyd^2y}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}.$$

Ergo $\frac{dtdx^2+dtdy^2+tdyd^2y}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=0$

$$dtdx^2+dtdy^2=-tdyd^2y$$

Quoniam *m*R differentiale ſemiordinatæ etiam differentiale ipſius ME ob PE conſtantem; erit $dt=dy$.

Quare $dx^2+dy^2=-td^2y$

$$(dx^2+dy^2):-d^2y=t$$

Quod ſi itaque ex æquatione ad curvam datam ſubſtituatur valor ipſius dy^2 & $-d^2y$; prodibit $ME=t$ in quantitatibus ordinariis.

Si vero radius evolutæ MC ipſe deſideretur (quem interdum inveniri præſtat) fiet (§. 268 *Geom.*) ob $PH=ydy:dx$ (§. 35)

$$MP:PH=ME:EC$$

$$y:\frac{ydy}{dx}=\frac{dx^2+dy^2}{-d^2y}:\frac{dx^2dy+dy^3}{-dxd^2y}$$

Unde $EC^2=\frac{dx^4dy^2+2dx^2dy^4+dy^6}{dx^2d^2y^2}$

$$ME^2=\frac{dx^4+2dx^2dy^2+dy^4}{d^2y^2}$$

$$=\frac{dx^6+2dx^4dy^2+dx^2dy^4}{dx^2d^2y^2}$$

$$MC^2=\frac{dx^6+3dy^2dx^4+3dy^4dx^2+dy^6}{dx^2d^2y^2}$$

$$=\frac{(dx^4+2dx^2dy^2+dy^4)(dx^2+dy^2)}{dx^2d^2y^2}$$

$$MC=\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxd^2y}.$$

PROBLEMA 140.

321. *Data æquatione ad curvam algebraicam, invenire æquationem ad evolutam.*

RESOLUTIO.

1. Inveſtigentur quantitates (*Vid. Fig. præced.*) BN & CN in valore abſciſſæ AP aut ſemiordinatæ PM. Nimirum ME invenitur (§. 320): unde ſubducta PM relinquit $PE=NC$. Sed per analogiam $PM:PH=ME:EC$ (§. 268 *Geom.*) reperitur EC. Si vero ex $AP+EC=AN$ ſubtrahatur AB radius evolutæ in vertice B per probl. præced. determinandus, relinquitur BN.
2. Fiat valor ipſius $BN=v$, $CN=z$ & communis æquationum reductio dabit æquationem ad evolutam in puris v & z atque conſtantibus.

PROBLEMA 141.

322. *Invenire radium circuli parabolam oſculantis & æquationem ad ejus evolutam.*

I. Quo-

I. Quoniam $ax = y^2$ (§. 388 *part.* 1)

erit $adx = 2ydy$

$adx : 2y = dy$

$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$

h. e. $adx^2 : 4x = dy^2$

Et, si dx sumatur pro constante, invenietur ob $adx : 2\sqrt{ax} = dy$

$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = d^2y$

Unde (*Vid. Fig. præc.*) $(dx^2 + dy^2) : -d^2y$ (§. 320) $= (4xdx^2 + adx^2)4x\sqrt{ax} : 4axdx^2 = (a + 4x)\sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax} : a = y + 4xy : a = t =$ ME $=$ PM $+$ PE. Est vero PM $= y$. Ergo PE $= 4xy : a$ hoc est, quia $x = y^2 : a$, PE $= 4y^3 : a^2$.

Constructio. Quoniam PM $= y$, TP $= 2y^2 : a$ (§. 21); si in T excitetur ad TM perpendicularis TE ipsi MP continuatæ in E occurrens; erit PE $= 4y^4 : a^2y = 4y^3 : a^2$ (§. 327 *Geom.*). Quodsi ergo ulterius in E & M excitentur perpendiculares EC & MC ad ME & MT; communis intersectio in C radium osculi seu evolutæ MC determinabit (§. 317).

II. Quoniam EC ipsi PH parallela; erit (§. 268 *Geom.*) ob PH $= \frac{1}{2}a$ (§. 36)

PM : PH $=$ ME : EC

$y : \frac{1}{2}a = y + \frac{4xy}{a} : \frac{1}{2}a + 2x$

ideoque $EC^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2ax + 4x^2$

$ME^2 = ax + 8x^2 + 16x^3 : a$

$MC^2 = \frac{1}{4}a^2 + 3ax + 12x^2 + 16x^3 : a$

Jam cum MC conincidit in AB, hoc est, quando radius evolutæ est AB, $x = 0$. Quare $AB^2 = \frac{1}{4}a^2$ & hinc AB $= \frac{1}{2}a$. Est ideo BN $=$ AP $+$ PN $-$ AB $= 3x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Sit jam BN $= v$, CN $=$ PE $= z$; erit

$v = 3x$ $\qquad z = 4x\sqrt{ax} : a$

$\frac{1}{3}v = x$ $\qquad z = \frac{4}{3}v\sqrt{\frac{1}{3}av} : a$

$3az = 4v\sqrt{\frac{1}{3}av}$

$9a^2z^2 = \frac{16}{3}av^3$ $\quad a : 3$

$27az^2 = 16v^3$.

En æquationem ad evolutam Parabolæ *Apollonianæ*: unde intelligitur evolutam parabolæ *Apollonii* esse parabolam secundi generis, cujus parameter $\frac{27}{16}$ parametri in parabola *Apolloniana*.

III. Si MC in terminis analyticis quæratur, erit, substitutis in formula generali $(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxd^2y$ (§. 320) valoribus dy^2 & $-d^2y$ paulo ante inventis, MC $= (dx^2 + adx^2 : 4x)\sqrt{(dx^2 + adx^2 : 4x)}4x\sqrt{ax} : adx^3 = (4x + a)dx^3\sqrt{(4x + a)}4x\sqrt{ax} : 8axdx^3\sqrt{x} = (4x + a)\sqrt{(4x + a)} : 2\sqrt{a}$.

Quodsi fiat $x = 0$; erit vi n. 1 ME $= 0$ & MC $= a\sqrt{a} : 2\sqrt{a} = \frac{1}{2}a$, hoc est, circuli parabolam in vertice osculantis diameter æquatur parametro & centrum ejus, ob ME $= 0$, est in axe parabolæ.

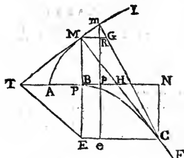
Porro quia MC $= (4x + a)\sqrt{(4x + a)} : 2\sqrt{a} = (4ax + a^2)\sqrt{(4ax + a^2)} : 2a^2$, & $\frac{1}{2}\sqrt{(4ax + a^2)} =$ MH seu normali (etenim MH (§. 417 *Geom.*) $= \sqrt{(MP^2 + PH^2)}$, MP^2 vero (§. 388 *part.* 1) $= \frac{4}{4}ax$, & PH^2 (§. 36) $= \frac{1}{4}a^2$); erit MC $= \frac{8MH^3}{2a^2}$. Est autem $8MH^3$ cubus duplæ normalis MH, sicuti $2a^2$ duplum quadrati parametri.

Constructio. Fiat $a : 2MH = 2MH : \frac{4MH^2}{a}$ & $2MH : \frac{4MH^2}{a} = \frac{4MH^2}{a} : \frac{8MH^3}{a^2}$, hoc est, quæratur ad parametrum & duplam normalem 2MH quarta continue proportionalis; erit ejus dimidium radius osculi MC.

Quoniam etiam MC $= 4MH^3 : a^2$; erit etiam $a : MH = MH : \frac{MH^2}{a}$ & $MH : \frac{MH^2}{a} = \frac{MH^2}{a} : \frac{MH^3}{a^2}$, hoc est, quæratur ad parametrum & normalem MH quarta continue proportionalis, erit ejus quadrupla radius osculi seu evolutæ MC.

PRO-

PROBLEMA 142.



323. *Determinare radium osculi seu evolutae* MC *in infinitis parabolis aut paraboloidibus.*

Ad infinitas parabolas (§. 519 *part.* 1)

$$y^m = a^{m-1}x$$

$$my^{m-1}dy = a^{m-1}dx$$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante; erit

$$(m^2 - m)y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}d^2y = 0$$

$$(m^2 - m)y^{m-2}dy^2 = -my^{m-1}d^2y$$

$$(m-1)y^{-1}dy^2 = -d^2y$$

Quamobrem

$$(dx^2 + dy^2) : -d^2y \ (\text{§. } 320) = (ydx^2 + ydy^2) : (m-1)dy^2$$

hoc est, ob $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2 : a^{2m-2}$
$ME = (m^2y^{2m-1}dy^2 + a^{2m-2}ydy^2) : (m-1)$
$a^{2m-2}dy^2 = (m^2y^{2m-1} + a^{2m-2}y) : (m-1)$
$a^{2m-2} = m^2y^{2m-1} : (m-1)a^{2m-2} + y : (m-1) = \frac{1}{m-1}y + \frac{m^2x^2}{(m-1)y}$.

Sit jam $m = 2$; erit $x = y^2 : a$, & hinc $x^2 = ax \cdot y^2 : a^2 = xy^2 : a$, ideoque $ME = 4xy^2 : ay + y = 4xy : a + y$, ut in problemate praecedente.

PROBLEMA 143.

324. *Determinare radium osculi in circulo.*

Quoniam ad circulum (§. 377 *part.* 1)

$$y^2 = 2rx - x^2$$

erit $2ydy = 2rdx - 2xdx$

$$ydy = rdx - xdx.$$

Quare si dx sumatur pro constante; erit

$$dy^2 + yd^2y = -dx^2$$

$$(dx^2 + dy^2) : y = -d^2y$$

Quare (§. 320)

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = y\frac{(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2} = y$$

Est itaque (*Vid. Fig. praeced.*) $ME = y$, hoc est, punctum E cadit in P, ideoque C in centrum circuli H (§. 38. 320). Radius igitur circuli idem est cum radio osculi, hoc est, circulus, qui circulum osculatur, huic congruit & circuli evoluta est centrum ejus.

PROBLEMA 144.

325. *Invenire radium osculi in ellipsi.*

Quoniam ad ellipsin (§. 420 *part.* 1)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

erit $2aydy = abdx - 2bxdx$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$$

ob $a^2y^2 = a^2bx - abx^2$

Unde, si dx sumatur pro constante, $d^2y = -4bdx^2\sqrt{(a^2bx - abx^2)} : (4a^2bx - 4abx^2) - (a^3b^2dx^2 + 4a^2b^2xdx^2 - 4ab^2x^2dx^2) : (4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)} = (-4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2 - a^3b^2dx^2 + 4a^2b^2xdx^2 - 4ab^2x^2dx^2) : (4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)} = -a^3b^2dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$.

Nimi-

Nimirum si $D = 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$ & $N = abdx - 2bxdx$; reperietur $dD = (a^2bdx - 2abxdx) : \sqrt{(a^2bx - abx^2)}$, ideoque $\frac{dD \cdot N}{D^2}$

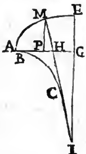
$$= \frac{a^3b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}},$$

quæ est differentialis valoris ipsius dy pars negativa (§. 19)

Est vero porro

$$dy^2 = \frac{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2)dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)}$$

Quare $dy^2 + dx^2 = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)$ & $(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)}dx^3 : (4a^2bx - 4abx^2) 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$, consequenter $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxd^2y = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)} : 2a^3b^2 =$ (brevitatis gratia) $v\sqrt{v} : 2a^3b^2$.



Est vero (§.44) normalis $MH = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$. Quare cum sit $y = \sqrt{(abx - bx^2)} : \sqrt{a}$ & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{v} : 2\sqrt{(abx - bx^2)}\sqrt{a}$. Erit $MH = \sqrt{(abx - bx^2)}dx\sqrt{v} : 2a\sqrt{(abx - bx^2)}dx = \sqrt{v} : 2a$, consequenter $MH^3 = v\sqrt{v} : 8a^3$, ideoque $4MH^3 = v\sqrt{v} : 2a^3$.

Est itaque $MC = v\sqrt{v} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : b^2$:

Constructio. Fiat $b : MH = MH : MH^2 : b$ & $MH : \frac{MH^2}{b} = \frac{MH^2}{b} : \frac{MH^3}{b^2}$ hoc est, quæratur ad parametrum b & normalem MH quarta continue proportionalis; erit hujus quadrupla radius osculi MC.

Corollarium.

326. Si AP sive $x = 0$; circuli in A ellipsin osculantis AB reperitur $a^2b^2\sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2 = a^3b^3 : 2a^3b^2 = \frac{1}{2}b$.

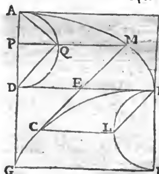
Problema 145.

327. *Invenire radium osculi seu evolutæ in hyperbola.*

Quoniam ad hyperbolam (§. 459 *part.* I) $ay^2 = abx + bx^2$, radius osculi MC eodem prorsus, ut in probl præced. modo invenitur $(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)\sqrt{(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : b^2$ &, si $x = 0$, hoc est in vertice,

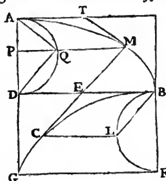
$$= a^2b^2\sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2$$
$$= \frac{1}{2}b.$$

Problema 146.



328. *Invenire radium circuli* MC *cycloidem* AMB *in* M *osculantis.*

Sit diameter circuli genitoris $AD = 1$, $AP = x$, $PM = y$; erit $QP = \sqrt{(x - x^2)}$ (§.377 *part.* I), arcus $AQ = \int(dx : 2\sqrt{(x - x^2)})$ (§.157), ideoque $PM = PQ + QM = \sqrt{(x - x^2)} + \int(dx:$



$\int(dx : 2\sqrt{(x - x^2)})$ (§. 575 *part.* 1). Quamobrem

$$y = \sqrt{(x - x^2)} + \frac{\int dx}{2\sqrt{(x - x^2)}}$$

$$dy = \frac{dx - 2xdx + dx}{2\sqrt{(x - x^2)}} = \frac{2dx - 2xdx}{2\sqrt{(x - x^2)}}$$

$= dx(1 - x) : \sqrt{x}\sqrt{(1 - x)} = dx\sqrt{(1 - x)} : \sqrt{x}$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante, reperietur

$d^2y = - dx^2\sqrt{x} : 2x\sqrt{(1 - x)} - dx^2\sqrt{(1 - x)} : 2x\sqrt{x} = (- xdx^2 - dx^2 + xdx^2) : 2x\sqrt{(x - x^2)} = - dx^2 : 2x\sqrt{(x - x^2)}$.

Unde ob $dx^2 + dy^2 = dx^2 + dx^2(1 - x) : x = (xdx^2 + dx^2 - xdx^2) : x = dx^2 : x$, eruitur $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : - dxd^2y$ (§. 320) $= 2xdx^3\sqrt{(x - x^2)} : xdx^3\sqrt{x} = 2\sqrt{(1 - x)}$ $= 2DQ$ (§. 417 *Geom.*). Nam

$PD^2 = 1 - 2x + x^2$

$PQ^2 = x - x^2$

$DQ^2 = 1 - x$. Ergo $DQ = \sqrt{(1 - x)}$.

Constructio. Quoniam tangens TM ipsi AQ parallela (§. 52); TMQ = AQP (§. 233 *Geom.*). Est vero AQD rectus (§. 317 *Geom.*), & TMC itidem rectus (§. 317). Ergo QMC = PQD (§. 91 *Arith.*); consequenter MC ipsi QD parallela. Constructio igitur talis est: ducatur MC ipsi QD parallela & fiat EC = EM; erit C punctum in evoluta cycloidis.

COROLLARIUM 1.

329. Si $x = 0$; erit radius evolutæ $2\sqrt{1} = 2 = 2AD$, quia $AD = 1$. Quare si DG fiat = AD; in G terminabitur evoluta ex una parte. Si $x = AD = 1$; erit radius evolutæ $2\sqrt{(1 - 1)} = 2\sqrt{0} = 0$. Quare evoluta ex altera parte in B terminatur.

COROLLARIUM 2.

330. Quodsi BL ipsi QD vel MC parallela ducatur; erit LBD = BDQ (§. 233 *Geom.*), ideoque arcus QD & BL (§. 322 *Geom.*) chordæque cognomines (§. 289 *Geom.*), consequenter BL = EC (§. 337 *Geom.*) & hinc LC ipsi BE æqualis & parallela (§. 257 *Geom.*). Est vero BE arcui QD (§. 575 *part.* 1) ideoque & alteri BL *per demonstr.* æqualis. Quare LC æqualis arcui BL (§. 87 *Arith.*). Est itaque evoluta cycloidis itidem cyclois æqualis & similis (§. 575 *part.* 1), hoc est, cyclois sui evolutione seipsam describit.

SCHOLION.

331. *Cum radius osculi aut evolutæ vel æqualis sit arcui evolutæ, vel eundem quantitate data excedat* (§. 316); *omnes arcus evolutarum geometrice rectificantur, quarum radii per constructiones geometricas exhiberi possunt. Unde patet, cur arcus cycloidis* BC *sit chordæ* BL *duplus* (§. 168): *est enim radius evolutæ* MC *ejusdem duplus* (§. 328) *& evoluta cycloidis ipsa quoque cyclois est* (§. 330). *Liquet etiam innumeras inveniri posse curvas, quæ saltem geometrice rectificantur. Ceterum utilis est radii osculi inventio, quia arcus circuli osculatoris substitui potest pro arcu curvæ, quam osculatur, in praxi. Ita speculum sphæricum cavum observante* Leibnitio *in Actis Erudit. An.* 1686 *substituitur parabolico, quia parameter parabolæ est diameter circuli eam in vertice osculantis* (§. 327) *sicque perinde ac parabolicum distantiam foci habet quartæ diametri parti æqualem.*

PROBLEMA 147.

332. *Determinare radium osculi seu evolutæ in Logarithmica.*

Quoniam in Logarithmica (§. 54)

$ydx : dy = a$

$ydx : a = dy$

$dxdy : a = d^2y$, quia dx constans seu $d^2y = ydx^2 : a^2$,

Est

Est vero $dy^2 = y^2dx^2 : a^2$, ideoque

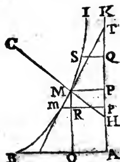
$$dy^2 + dx^2 = y^2dx^2 : a^2 + dx^2$$
$$= (y^2 + a^2)\,dx^2 : a^2$$

$$(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx^3(y^2 + a^2)\sqrt{(y^2 + a^2)} : a^3$$

$$\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxd^2y}$$

$$= dx^3 \frac{(y^2 + a^2)\sqrt{(y^2 + a^2)}\,a^2}{-a^3ydx^3}$$

$$= \frac{(y^2 + a^2)\sqrt{(y^2 + a^2)}}{-ay}$$



Est igitur radius osculi seu evolutæ $= (y^2 + a^2)\sqrt{(y^2 + a^2)} : ay$.

Enimvero cum a sit subtangens Logisticæ PT, y semiordinata PM; erit $\sqrt{(y^2 + a^2)}$ tangens TM (§. 417 *Geom.*). Porro cum sit

$$TP : PM = PM : PH$$
$$a : y = y : PH$$

erit subnormalis $PH = y^2 : a$, consequenter TH composita ex subnormali $y^2 : a$ & subtangente $a = (y^2 + a^2) : a$.

Habemus ideo

$$y : \sqrt{(y^2 + a^2)} = \frac{y^2 + a^2}{a} : CM$$

h. e. PM : TM = TH : MC

Theorema. In Logistica radius osculi seu evolutæ est quarta proportionalis ad semiordinatam, tangentem atque compositam ex subtangente ac subnormali.

Quantitas negativa est ob valorem ipsius y in præsente casu negativum.

Porro quoniam ay est spatium logisticum interminatum KPMI (§. 134) & $(a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 + y^2)} = TM^3$; erit $KPMI : TM^2 = TM : MC$. Habemus itaque hoc

Theorema: Spatium logisticum interminatum est ad quadratum tangentis in ratione tangentis ad radium osculi seu evolutæ.

SECTIO QUINTA
DE ARITHMETICA INFINITORUM.
CAPUT PRIMUM
De Natura Arithmeticæ Infinitorum.

DEFINITIO 19.

333. **A**Rithmeticæ *infinitorum* est methodus summandi series numerorum infinitis terminis constantes, aut earum rationes investigandi.

PROBLEMA 148.

334. *Invenire summam fractionum infinitarum, quarum numerator communis*

munis est unitas, denominatores vero progrediuntur in ratione numeratoris primæ ad suum denominatorem.

Sit fractio prima $1:e$. Numerus terminorum cum sit infinitus & termini continuo decrescant, devenietur tandem ad infinitesimam (§. 2), ideoque differentia fractionis primæ, & hujus, quæ tanquam ultima consideratur, ipsi fractioni primæ $1:e$ æqualis (§. 4). Divisa ergo per $e-1$ dat summam omnium terminorum $1:(e^2-e)$ excepto primo (§. 119 *part.* 1). Quare summa integræ seriei $1:(e^2-e)+1:e$ $=(1+e-1):e^2-e)=e:(e^2-e)$ $=1:(e-1)$.

Sit e. gr. $e=2$; erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ &c. in infinit.$)=1$.

Sit $e=3$; erit $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ &c in infinit.$)=\frac{1}{2}$.

Sit $e=4$; erit $\int(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{3}$.

Sit $e=5$; erit $\int(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{4}$.

Sit $e=6$; erit $\int(\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{5}$.

PROBLEMA 149.

335. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis est unitate minor denominatore primæ & denominatores progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Sit denominator fractionis primæ $=m$; erit numerator $=m-1$. Differentia primi & ultimi termini utpote primo æqualis (*per demonstrata in* §. 334) $=(m-1):m$, quæ per $m-1$ divisa dat summam omnium terminorum excepto maximo seu primo $1:m$ (§. 119 *part.* 1). Quare summa integræ seriei $=m:m=1$.

Sit e. gr. $m=2$; erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ &c. in infinit.$)=1$, ut ante (§. 334).

Sit $m=3$; erit $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c. in infinit.$)=1$.

Sit $m=4$; erit $\int(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}$ &c. in infinit.$)=1$.

SCHOLION.

336. *Poterat idem per modum corollarii ex problemate præcedente deduci. Est enim* $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$ &c.$)=\frac{1}{2}$ (§. 334). *Ergo duplum hujus seriei, hoc est,* $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c.$)=\frac{2}{2}=1$. *Et in genere* $\int(\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}$ &c. *in infinitum*$)=1:(m-1)$ (§. *cit.*). *Ergo multiplum hujus seriei, cujus numerator* $m-1$, *fit necesse est* $(m-1):(m-1)=1$.

PROBLEMA 150.

337. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis deficit a denominatore primæ data quantitate, denominatores vero progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Sit terminus primus $=(m-n):m$, qui, utpote æqualis differentiæ primi & ultimi (§. 334), divisus per $(m-1)$ dat summam omnium terminorum maximo excepto $(m-n):(m^2-m)$ (§. 119 *part.* 1). Quare summa seriei integræ $=(m-n):(m^2-m)+(m-n):m=(m-n+m^2-mn-m+n):(m^2-m)=(m^2-mn):(m^2-m)$ $=(m-n):(m-1)$.

Sit e. gr. $n=1$; erit $(m-n):(m-1)=(m-1):(m-1)=1$.

Sit $n=2$, $m=4$; erit $\int(\frac{2}{4}+\frac{2}{16}+\frac{2}{64}$ &c.$)$ $=(4-2):(4-1)=\frac{2}{3}$.

Sit $n=2$, $m=5$; erit $\int(\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}$ &c.$)$ $=(5-2):(5-1)=\frac{3}{4}$.

Sit $n=2$, $m=6$; erit $\int(\frac{4}{6}+\frac{4}{36}+\frac{4}{216}$ &c.$)$ $=(6-2):(6-1)=\frac{4}{5}$.

Sit $n=2$, $m=7$; erit $\int(\frac{5}{7}+\frac{5}{49}+\frac{5}{343}$ &c.$)$ $=(7-2):(7-1)=\frac{5}{6}$.

Similiter

Sit $n=3$, $m=6$; erit $\int(\frac{3}{6}+\frac{3}{36}+\frac{3}{216}$ &c.$)$ $=(6-3):(6-1)=\frac{3}{5}$.

Sit

Sit $n = 3$, $m = 7$; erit $\int(\frac{4}{7} + \frac{4}{49} + \frac{4}{343}$ &c.) $= (7 - 3):(7 - 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Sit $n = 3$, $m = 8$; erit $\int(\frac{5}{8} + \frac{5}{64} + \frac{5}{512}$ &c.) $= (8 - 3):(8 - 1) = \frac{5}{7}$.

Porro

Sit $n = 4$, $m = 8$; erit $\int(\frac{4}{8} + \frac{4}{64} + \frac{4}{512}$ &c.) $= (8 - 4):(8 - 1) = \frac{4}{7}$.

Sit $n = 4$, $m = 9$; erit $\int(\frac{5}{9} + \frac{5}{81} + \frac{5}{729}$ &c.) $= (9 - 4):(9 - 1) = \frac{5}{8}$.

Sit $n = 4$, $m = 10$; erit $\int(\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000}$ &c.) $= (10 - 4):(10 - 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

&c. &c.

Problema 151.

338. ***Invenire summam fractionum infinitarum, quarum communis est numerator, denominatores vero in ratione quacunque progrediuntur.***

Sit numerator communis $= m$, denominator fractionis primæ $= a$, denominator rationis $= n$; erit series summanda $\frac{m}{a} + \frac{m}{na} + \frac{m}{n^2a} + \frac{m}{n^3a}$ &c. in infinitum. Unde eodem, quo in problematibus præcedentibus, modo reperitur summa $m:(na - a) + m:a = (m + mn - m):(na - a) = mn:(na - a) = mn:a(n - 1)$.

Sit e. gr. $m = 5$, $a = 6$, $n = 2$; erit $\int(\frac{5}{6} + \frac{5}{12} + \frac{5}{24}$ &c.) $= 10:6(2 - 1) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Sit $m = 3$, $a = 5$, $n = 4$; erit $\int(\frac{3}{5} + \frac{3}{20} + \frac{3}{80} + \frac{3}{320}$ &c.) $= 12:5(4 - 1) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Sit $m = 1$, $a = 7$, $n = 2$; erit $\int(\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56}$ &c.) $= 2:7(2 - 1) = \frac{2}{7}$.

Scholion.

339. *Hec problema universalitate sua antecedentia omnia complectitur. Sit enim* $n = a$ & $m = n - l$, *qui est casus problematis præcedentis; substitutis hisce valoribus in formula præsente prodit* $(n^2 - ln):(n - 1)n = (n - l):(n - 1)$, *quæ est formula problematis præcedentis. Similiter sit* $n = a$, $m = n - 1$; *erit summa* $= (n^2 - n):(n^2 - n) = 1$, *ut supra* (§. 335). *Denique si* $m = 1$, $n = a$; *erit summa* $= n:(n - 1)n = 1:(n - 1)$, *ut supra* (§. 334).

Problema 152.

340. ***Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ simplicis ab 1 in infinitum continuatæ (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 &c.) ad summam totidem maximo æqualium.***

Terminus primus $= 1$, numerus terminorum $= n$, differentia $= 1$. Ergo ultimus $= n$ & hinc $\int(1 + 2 + 3 + 4 + 5$ &c.) $= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (§. 107 *part.* 1) & $\int n = n^2$. Cum n sit infinitus numerus, atque (§. 66 *Arith.*) $1:n = n:n^2$; erit n^2 ipso n infinities majus, ideoque n respectu n^2 pro nihilo habendum (§. 3), consequenter $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n^2$. Est itaque $\int(1 + 2 + 3 + 4 + 5$ &c. in infinitum$):\int n = \frac{1}{2}n^2:n^2 = 1:2$ (§. 124 *part.* 1).

Theorema. Summa seriei numerorum naturalium in infinitum continuatæ est ad summam totidem maximo æqualium ut 1 ad 2.

Problema 153.

341. ***Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ sive finitæ, sive infinitæ, cujus terminus primus est 0, ad summam totidem maximo æqualium.***

Terminus primus $= o$, ultimus $= v$, numerus terminorum $= n$; erit summa progressionis $= \frac{1}{2}nv$ (§. 107 *part.* 1), summa vero totidem maximo æqualium nv. Est ergo illa ad hanc ut $\frac{1}{2}nv$ ad nv, hoc est, ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

Problema 154.

342. ***Invenire rationem, quam habet summa omnium quadratorum ab 0 in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.***

Si terminus maximus n; erit summa quadratorum $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (§. 205 *part.* 1).

part. 1). Est vero $1 : n = n^2 : n^3$ (§. 66 *Arith.*): ergo, quia 1 infinitesima ipsius n *per hypoth.* erit etiam n^2 infinitesima ipsius n^3, consequenter $\frac{1}{2}n^2$, ideoque multo magis $\frac{1}{6}n$, respectu ipsius $\frac{1}{3}n^3$ pro nihilo habendum (§. 3). Est ergo summa infinitorum quadratorum $\frac{1}{3}n^3$. Quadratorum vero totidem maximo æqualium summa est n^3. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{3}n^3$ ad n^3, hoc est, ut 1 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA 155.

343. *Invenire rationem, quam habet summa omnium cuborum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit summa cuborum $\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ (§. 205 *part.* 1). Sed eodem modo, quo in problemate præcedente, ostenditur, $\frac{1}{2}n^3$, ideoque multo magis $\frac{1}{4}n^2$, respectu ipsius $\frac{1}{4}n^4$ tandem evanescere. Erit ergo summa infinitorum cuborum $\frac{1}{4}n^4$. Sed summa totidem cuborum maximo æqualium est n^4. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{4}n^4$ ad n^4, hoc est, ut 1 ad 4 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA 156.

344. *Invenire rationem, quam habet summa omnium potentiarum cujuscunque gradus ab* 0 *in infinitum continuatarum ad summam totidem maximæ æqualium.*

Quoniam omnes potentiæ inferiores numeri infiniti respectu superioris evanescunt (id quod eodem modo, quo in probl. 154, ostenditur), summa omnium potentiarum ab o in infinitum continuatarum est $\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}$ (§. 203 *part.* 1) $= \frac{1}{m+1}n^{m+1}$ in casu infiniti, ob $1 = 0$ respectu n. Sed potentia maxima est n^m, ideoque summa totidem maximæ æqualium n^{m+1}. Ergo summa illa ad hanc ut $\frac{1}{m+1}n^{m+1}$ ad n^{m+1}, consequenter ut 1 ad $m+1$ (§. 124 *part.* 1).

E. gr. Sit $m = 2$; erit summa quadratorum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 3.

Sit $m = 3$; erit summa cuborum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 4.

Sit $m = 7$; erit summa potentiarum septimi gradus ad totidem maximæ æqualium ut 1 ad 8.

SCHOLION 1.

345. *In infinitum continuari revera non aliud significat, quam eo usque continuari, donec quantitates quædam respectu aliarum evanescant* (a). *Nam* e. gr. (§. 342) *in summa quadratorum* $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ *ratio termini primi* $\frac{1}{3}n^3$ *ad reliquos* $\frac{1}{2}n^2$ & $\frac{1}{6}n$ *continue crescit. Unde non mirum, si ratio posteriorum tandem adeo exigua evadat, ut assignari amplius nequeat. Est enim primus ad secundum* $= \frac{1}{3}n^3 : \frac{1}{2}n^2 = 2n : 3$ (§. 124 *part.* 1). *Quare crescente* n *ratio ipsius* 2n *ad* 3 *continuo crescit* (§. 203 *Arith.*). *Similiter terminus primus est ad tertium ut* $\frac{1}{3}n^3$ *ad* $\frac{1}{6}n$, *hoc est, ut* $2n^2$ *ad* 1 (§. 124 *part.* 1). *Quare crescente* n *ratio ipsius* $2n^2$ *ad* 1 *multo magis crescit, quam in casu priore* (§. 203 *Arith.*). *In eo igitur casu, in quo terminus secundus respectu primi fit inassignabilis, tertius multo magis inassignabilis esse debet.*

SCHOLION 2.

346. *Eodem modo plurima alia Arithmeticæ infinitorum theoremata inveniri possunt, si utamur iis, quæ in Analysi finitorum* (§. 206 & seqq.) *de numeris figuratis demonstrata sunt.*

SCHOLION 3.

374. *Usum Arithmeticæ infinitorum in Geometria ostenderunt* (b) Wallisius *inventor, & qui eam magis excoluit,* Ismael Bulialdus (c). *Enimvero cum per calculum* Leibnitii *summatorium non modo ea, quæ per Arithmeticam infinitorum eruuntur, longe facilius; sed & plurima huic insuperabilia inveniri possint; e re nostra non esse judico, ut de ejus usu multa proferamus. Suffecerit igitur pauca eam in rem attulisse.*

CAPUT

(a) Vid. Ontologiæ nostræ §. 823. & seqq.

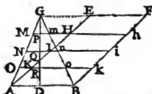
(b) In Arithmetica infinitorum, quæ extat in vol. I. Oper. Mathem.

(c) In Opere Novo ad Arithmeticam infinitorum.

CAPUT II.

De Usu Arithmeticæ Infinitorum in Geometria.

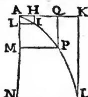
PROBLEMA 157.



348. **I***Nvenire rationem trianguli* AGB *ad parallelogrammum* AEFB *super eadem vel æquali basi* AB *& ejusdem altitudinis.*

Concipiatur altitudo GD in partes infinite parvas & inter se æquales divisa; triangulum AGB resolvetur in parallelogrammula, quorum bases sunt ordinatæ trianguli M*m*, N*n*, O*o* &c. altitudines infinitesimæ ipsius GD; parallelogrammum vero EABF in totidem parallelogrammula & inter se & maximo in triangulo æqualia, quorum nempe bases basi trianguli AB sigillatim æquales sunt. Parallelogrammula itaque seu elementa trianguli progrediuntur in ratione ordinatarum M*m*, N*n*, O*o* &c. (§. 389 *Geom.*). Ordinatæ vero sunt ut abscissæ GP, GQ, GR (§. 396 *Geom.*) &, quoniam altitudo in partes æquales divisa, abscissæ crescunt in progressione arithmetica 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c. Ergo elementa trianguli constituunt progressionem arithmeticam a cyphra inchoatam & in infinitum continuatam. Est ideo triangulum AGB ad parallelogrammum AEFB ut 1 ad 2 (§. 341).

PROBLEMA 158.

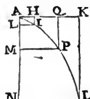


349. *Invenire rationem spatii parabolici externi* AKLPA, *necnon interni* ANLPA *ad rectangulum* AKLN *super eadem basi* KL *& ejusdem altitudinis* AK.

Si spatium parabolicum APLKA & rectangulum KN in parallelogrammula resolvantur, ut in probl. præced. (§. 348), altitudine communi AK in partes infinite parvas æquales divisa; elementa parabolici progrediuntur ut semiordinatæ HI, QP, KL &c. iisdem vero in rectangulo totidem respondent maximo, cujus basis KL, æqualia. Quodsi parameter parabolæ fuerit a, $AH = 1$, $AQ = 2$, $AK = 3$ &c. erit $HI = 1:a$, $QP = 4:a$, $KL = 9:a$ &c. (§. 391 *part.* 1), hoc est bases elementorum, ideoque elementa ipsa (§. 389 *Geom.*), progrediuntur in ratione duplicata abscissarum, hoc est, ut 0, 1, 4, 9 &c. Est ergo spatium parabolicum AKLPA ad rectangulum ANLK ut 1 ad 3 (§. 342), ideoque ANLPA ad idem rectangulum ANLK ut 2 ad 3.

PRO-

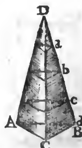
PROBLEMA 159.



350. ***Invenire rationem spatii paraboloidici cujuscunque externi* AKLPA, *necnon interni* ANLPA *ad rectangulum* AKLN.**

Si abscissæ AH, AQ, AK fuerint ut 1, 2, 3 &c. in paraboloidibus quibuscunque, erunt semiordinatæ HI, QP, KL ut 0, 1, 2^m, 3^m &c. (§. 519 *part.* 1). Quare cum etiam spatii paraboloidici AKLPA elementa progrediantur ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 349 *Geom.*), iisdem vero in rectangulo respondeant totidem maximo æqualia; erit illud ad hoc ut 1 ad $1 + m$ (§. 344), consequenter ANLPA ad idem rectangulum KN ut $1 + m - 1$ ad $1 + m$, hoc est, ut m ad $1 + m$.

PROBLEMA 160.

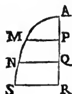


351. ***Invenire rationem pyramidis & coni ad prisma & cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.***

Si pyramidis ADBC altitudo concipiatur in partes infinite parvas æquales divisa; in prismata resolvitur, quæ inter se sunt ut bases (§. 573 *Geom.*), hoc est, ut plana similia *a*, *b*, *c*, *d* (§. 474 *Geom.*). Quoniam vero altitudines illorum prismatum sunt ut 1, 2, 3 &c. planorum latera homologa erunt itidem ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 566 *Geom.*), ideoque ipsa plana ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 406 *Geom.*). Quare cum elementis pyramidis respondeant in prismate super eadem basi & ejusdem altitudinis totidem maximo æqualia; pyramis ad prisma est ut 1 ad 3 (§. 342).

Quodsi ACBD fuerit conus, plana *a*, *b*, *c*, *d* erunt circuli: qui cum progrediantur ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 408 *Geom.*), in cylindro vero ipsis respondeant totidem maximo *d* æquales; conus quoque ad cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis est ut 1 ad 3 (§. 342).

PROBLEMA 161.



352. ***Invenire rationem conoidis parabolici ex rotatione parabolæ* AMSR *circa axem* AR *geniti ad cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.***

Constat ex superioribus (§. 197), altitudine AR in particulas infinite parvas & æquales divisa conoides resolvi

ſolvi in cylindrulos, quorum baſes ſunt circuli radiis PM, QN, RS deſcripti, quique ideo ſunt ut iſti circuli (§. 573 *Geom.*). Quodſi $AP = 1$, $AQ = 2$, $AR = 3$; erit $PM = 1$, $QN = \sqrt{2}$, $RS = \sqrt{3}$ (§. 392 *part.* 1) ideoque circuli ſunt ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 408 *Geom.*). Quare cum iiſdem reſpondeant in cylindro totidem maximo æquales; omnia elementa conoidis ad omnia elementa cylindri ſunt ut 1 ad 2 (§. 341).

Finis Analyſeos Infinitorum, & totius Tomi Primi Elementorum Matheſeos.

ERRATA CORRIGE.

	ERRATA	CORRIGE
pag. 259. *col.* 1. *lin.* 35.	uncæ	unciæ
pag. 262. *col.* 2. *lin.* 44.	$3bdy^5$	$3b^2dy^5$
pag. 277. *col.* 1. *lin.* 15.	100 : 4	400 : 16
pag. 283. *col.* 1. *lin.* 6. *ubi legitur* 180. *lege* 181. *& ſimiliter in ſequentibus, etiam in citationibus, uſque ad pag.* 285. *col.* 2 *lin.* 39. *incluſive. At vero cum in pag.* 285. *col.* 2. *lin.* 2. 3. *&* 4. *legatur* 8 . 12 : 4 = 8 . 3 = 24. Corollarium 3. 190. Cum eodem &c. *lectione continuata lege* 8 . 12 : 4 = 8 . 3 = 24. Cum autem eodem, *ut ſcilicet ex duobus Corollariis fiat unum.*		
pag. 289. *col.* 2. *lin.* 5. 6.	(§. 333 *Arith.*)	(§. 108)
pag. 290. *col.* 1. *lin.* 24.	(§. 333 *Arith.*)	(§. 108)
pag. 314. *col.* 1. *lin.* 3.	niam	nianam
ibi col. 2. *lin.* 4.	$\frac{2}{}$	$\frac{9}{\frac{1}{1}}$
pag. 316. *col.* 1. *lin.* 23.	$\frac{}{7}$	$\frac{}{7}$
pag. 318. *col.* 1. *lin.* 16.	$\sqrt{\frac{4}{7}y^2}$	$\sqrt{\frac{1}{4}y^2}$
ibi col. 2. *lin.* 19.	10000	100000
ibi lin. 20.	81149	81649
pag. 320. *col.* 2. *lin.* 10.	(§. 271 *Geom*)	(§. 268 *Geom.*)
pag. 326. *col.* 1. *lin.* 16.	manuas	minuas
pag. 334. *col.* 1. *lin.* 1.	$=\frac{1}{2}$	$=\frac{1}{2}$
ibi lin. 13.	$3z^2y + y^3$	$3z^2y + z^3$
pag. 359. *col.* 2. *lin.* 2.	$4c^2x\ a$	$4c^2x : a$
pag. 367. *col.* 1 *lin.* 16.	perpendiculais	perpendicularis
pag. 379. *col.* 2. *lin.* 10.	AM	AP
pag. 384. *col.* 1. *lin. penult.*	pro omnibus	omnibus
pag. 387. *col.* 2. *lin.* 28.	$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$	$\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$
ibi lin. 41.	$\sqrt{(\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c^2)}$	$\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$
pag. 388. *col.* 1. *lin. penult.*	$+ \frac{2tpſx}{2mq}$	$- \frac{2tpſx}{2mq}$
ibi col. 2. *lin.* 13.	$\frac{ac^2}{b}$	$\frac{a^2c}{b}$
pag. 394. *col.* 1. *lin. penult.*	698	598
pag. 408. *col.* 2. *lin. penult.*	$+ ay$	$+ ax$
pag. 447. *col.* 2 *lin.* 30.	reclaxgulum	rectangulum
pag. 452. *col.* 1. *lin.* 12.	ſeriam	ſeriem
pag. 456. *col.* 2. *lin.* 6.	$\frac{m}{m-1}\sqrt[m]{x^{m-n}}$	$\frac{m}{m-n}\sqrt[m]{x^{m-n}}$
pag. 461. *col.* 1. *lin.* 27.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
pag. 471. *col.* 2. *lin.* 26.	Problema 53.	Problema 55.
pag. 491. *col.* 2. *lin.* 3.	caſa	caſu
pag. 503. *col.* 2. *lin.* 23.	$= x$	$= y$
pag. 504. *col.* 2. *lin.* 8.	Problema 202.	Problema 102.
pag. 506. *col.* 2. *lin.* 26.	$dy\sqrt{(a^2 - y^2}$	$dy\sqrt{(a^2 - y^2)}$

NOI

NOI
RIFORMATORI
Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Revisione ed Approvazione del *P. F. Lauro Maria Picinelli Inquisitore di Verona*, nel Libro intitolato: *Elementa Matheseos Universæ in quinque Tomos distributa: Auctore Christiano VVolfio*: non v'esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Attestato del Segretario nostro, niente contro Principi e buoni costumi, concediamo Licenza a *Dionigio Ramanzini* Stampatore in *Verona*, che possi essere stampato osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia e di Padova.

Dat. li 4. Agosto 1739.

{ Z. Piero Pasqualigo Rif.
{ Lorenzo Tiepolo Kav. Proc: Rif.
{

Registr. in Libro a car. 14.

Agostino Gadaldini Segr.



